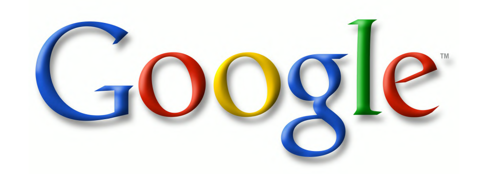
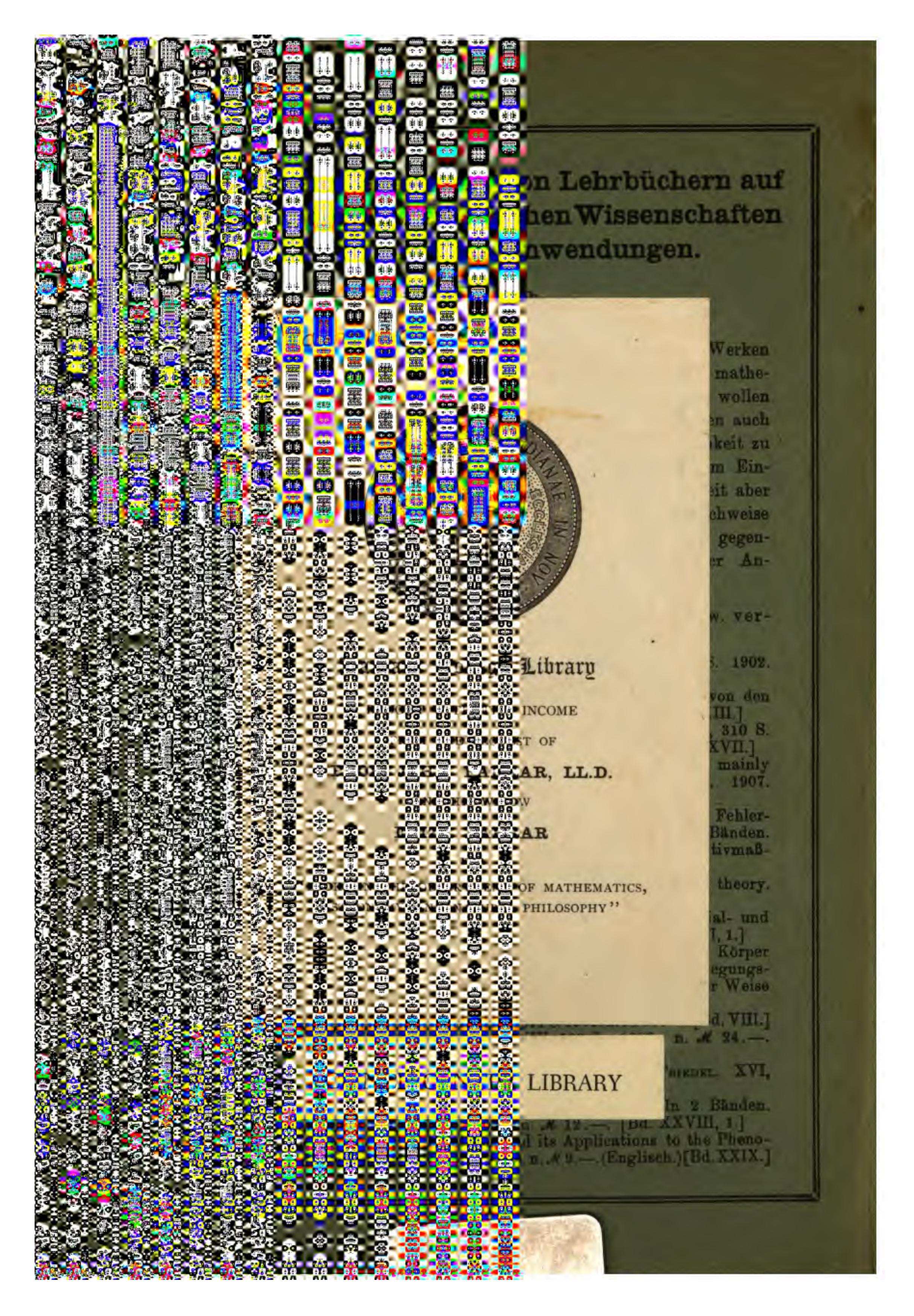




anszendente ebene Kurven. Theorie
rrs. XXI, 744 S. 1902. n. ℳ 28.—

etrie. Deutsch von Fr. Schütte. In
oden. XI, 219 S. 1906. n. ℳ 6.80.

Deutsch von A. Timpe. XVI, 664 S.

III, 260 S. 1901. n. ℳ 9.—. [Bd. VII.]
heorie. 2 Bände. I. Band. XII, 642 S.

rstellung ihrer Theorie und Anwen-
heit der neueren Forschungen. Be-
zmann. XVI, 266 S. 1900. ℳ 10.—.

X, 519 S. 1906. n. ℳ 16.—.

echnung. VI, 92 S. 1904. n. ℳ 4.—.

unktes, der geraden Linie und der
ngen und Übungen über analytische
14.— [Bd. XVI.]
es, des Kegelschnittes und der Flächen
548 S. 1910. [Bd. XXX, 1.]
e Arithmetik. 2., umgearbeitete Aufl.
IV.]
2., umgearbeitete Auflage. X, 598 S.

andtschaften. 4 Bde. [Bd. XXVII, 1—4.]
ilden erster Stufe. XII, 415 S. 1908. n. ℳ 16.—
dtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe.

dtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

gen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe.

X, 380 S. 1908. n. ℳ 16.— [Bd. I.]
retische Elektrizitätslehre. X, 444 S.

Pfaffsche Problem und die Theorie
erster Ordnung. XI, 622 S. 1900.

cles and of rigid, elastic, and fluid
Physics. XII, 588 S. 1904. n. ℳ 14.—.
Ausgabe von C. H. Müller erscheint

Geometry of Curves and ruled Sur-
—. (Englisch.) [Bd. XVIII.]

z. in Vorbereitung:

r gewöhnlichen linearen Differential-

gsmathematik.
eorie der algebraischen Flächen.
2. Aufl. 2 Bände. II. Band. [Bd. IX, 2.]
der Analysis situs.

metrie.

der Diff.- u. Integralrechnung.

Gelehrten), Handbuch der Ge-

nsformationsgruppen.

n physikalischen Apparate und

oren.
sten Linienelemente in der Ebene.
linearen Differenzengleichungen.

stik.
ndter Funktionen.
der modernen Maschinenlehre.

lialgeometrie. 2 Bände. II. Bd.
linearen Substitutionsgruppen.
etrie. Deutsch von Fr. Schütte.

d Punktrechnung. 2 Bände.
orie. 2 Bände. II. Band.

nd Funktionenlehre.
metrie, mit besonderer Berück-
e.
nik.
igkeiten.
ares, des Kegelschnittes und der
Band. [Bd. XXX, 2.]
ra.

n Flächen.
Mathematical Physics. (Englisch.)
g in die theoretische Physik.
Teile.
formationen.
ihre Integrale.

ter Geometrie.

efinden sich in meinem mathe-
tte. Verlagsanerbieten für die
sein.

B. G. Teubner.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND IX, 2

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

UND IHRE ANWENDUNG AUF FEHLERAUSGLEICHUNG STATISTIK UND LEBENSVERSICHERUNG

VON

EMANUEL CZUBER

O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

ZWEITER BAND

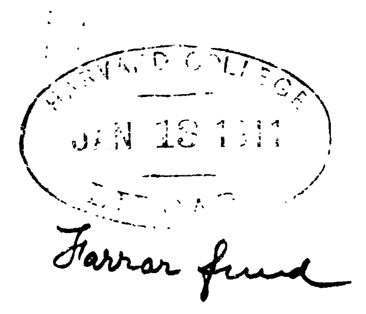
MATHEMATISCHE STATISTIK · MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER LEBENSVERSICHERUNG

MIT 34 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE, SORGFÄLTIG DURCHGESEHENE UND ERWEITERTE AUFLAGE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910



VORWORT.

Der zweite Band umfaßt den dritten und vierten Teil der ersten Auflage in einer, wie schon der Umfang zeigt, ziemlich eingreifenden Neubearbeitung.

Bei der Darstellung der *mathematischen Statistik* sind zwar die Grundlinien der ersten Auflage beibehalten worden; im einzelnen aber erfuhr das Kapitel vielfache Umgestaltung. Neben den mathematischen Entwicklungen wurde auf die Darlegung der leitenden Gedanken bei der Bildung und Beurteilung statistischer Maßzahlen und der Reihen solcher Zahlen größerer Nachdruck gelegt; die analytische Darstellung derartiger Reihen nach den auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen beruhenden Methoden, die in neuerer Zeit von englischen Statistikern ausgebildet worden sind, ist als Seitenstück und Ergänzung der Kollektivmaßlehre aufgenommen. Erheblich erweitert ist die Behandlung der Sterblichkeitsmessung unter Heranziehung der neueren bedeutenden Arbeiten auf diesem Gebiete; der Tafelausgleichung ist ein besonderer Paragraph zugewiesen, dessen Inhalt über die Grenzen des in der ersten Auflage gebotenen hinausführt. Ebenso haben die auf die Invalidität bezüglichen Untersuchungen eingehendere Würdigung gefunden. Zu den früheren praktischen Belegen für die vorgeführten theoretischen Entwicklungen sind zahlreiche neue hinzugekommen; manche der früheren Beispiele haben unter Benutzung der seither gesammelten Beobachtungen Fortführung bis auf die Gegenwart erfahren. Einige Resultate dürften auch selbständiges Interesse in Anspruch nehmen.

Eingreifender noch sind die Änderungen in dem die *mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung* betreffenden Schlußteile. Den allgemeinen Erwägungen, die der Inangriffnahme versicherungstechnischer Aufgaben vorauszugehen haben, ist ein breiterer Raum gegeben. Selbstverständlich fanden die Rechnungen mit zweifach abgestuften Sterbetafeln gebührende Berücksichtigung. Die Versicherungswerte, bei welchen die Invalidität als maßgebendes Element auftritt, sind eingehender dargestellt. Ein besonderer Paragraph ist den Durchschnittsprämien gewidmet; er bot Gelegenheit, auch auf einige der leitenden Gedanken der Sozialversicherung einzugehen. Auf die umstrittene Frage der Bemessung des Deckungskapitals in der

Lebensversicherung und die Vorschläge zur Reform der Prämienreserveberechnung ist im Anschlusse an die noch vorherrschende Nettomethode mit einigen Ausführungen hingewiesen. Bezüglich des Risikos in der Lebensversicherung wurde versucht, das Verhältnis zwischen Theorie und Praxis möglichst scharf zu kennzeichnen; auf einige der neueren Gedankenbildungen ist wegen ihres theoretischen Interesses in Kürze eingegangen.

Die Tafeln, dazu bestimmt, in die Konstruktion und den Gebrauch statistischer Tabellen einzuführen und den Behelf zur ziffermäßigen Verfolgung der abgeleiteten Formeln zu bieten, haben eine dem Texte entsprechende Ergänzung erfahren; bei der Auswahl ist darauf Bedacht genommen worden, daß typische Formen und die größeren Arbeiten dieser Richtung vertreten seien.

Vollständigkeit wurde nicht angestrebt und wäre auch nicht zu erreichen; die literarischen Nachweise aber können als eine Ergänzung hingenommen werden, die den Weg für weitergehende Studien anzeigt.

GRINDELWALD, 19. Januar 1910.

DER VERFASSER.

INHALTSVERZEICHNIS.

Vierter Teil.

Mathematische Statistik.

I. Abschnitt. Die menschlichen Massenerscheinungen.

§ 1. Mathematische Beschreibung statistischer Massen und Massenerscheinungen. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der mathematischen Statistik.

§ 2. Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte.

II. Abschnitt. Sterblichkeitsmessung.

§ 1. Sterblichkeitsmaße.

§ 2. Formale Bevölkerungstheorie.

§ 3. Sterbetafeln.

§ 4. Tafelausgleichung.

III. Abschnitt. Invalidität und Sterblichkeit.

Fünfter Teil.

Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung.

I. Abschnitt. Versicherungswerte.

§ 1. Grundlagen.

§ 2. Erlebensversicherungen und Renten.

§ 3. Todesfallversicherungen.

§ 4. Gemischte Versicherungen.

§ 5. Renten und Todesfallversicherungen von besonderer Zahlungsmodalität.

§ 6. Renten für verbundene Leben.

§ 7. Kapitalversicherungen für verbundene Leben.

§ 8. Versicherungswerte, die von Invalidität abhängen.

II. Abschnitt. **Prämien.**

§ 1. Einmalige und Jahresprämien.

§ 2. Veränderliche Prämien.

§ 3. Prämienrückgewähr.

§ 4. Durchschnittsprämien. Sozialversicherung.

III. Abschnitt. Prämienreserve.

§ 1. Theorie der Prämienreserve.

§ 2. Prämienreserven verschiedener Versicherungskombinationen.

§ 3. Rückkauf, Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung, Abänderung.

IV. Abschnitt. Das Risiko in der Lebensversicherung.

Tafeln.

Vierter Teil.

Mathematische Statistik.

I. Abschnitt. Die menschlichen Massenerscheinungen.

§ 1. Mathematische Beschreibung statistischer Massen und Massenerscheinungen. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der mathematischen Statistik.

190. Statistische Massen und Massenerscheinungen. Vom Standpunkte der Statistik erscheint das einzelne *Individuum* lediglich als der Träger gewisser Merkmale, Zustände, Zustandsänderungen. Durch Zusammenfassung einer Vielheit von Individuen, die in einem oder mehreren Merkmalen übereinstimmen, entsteht eine *statistische Masse*. Die Übereinstimmung wird, sofern es sich um quantitativ darstellbare Merkmale (z. B. Alter, Dauer eines bestimmten Zustandes) handelt, nie eine vollkommene sein, sondern nur in der Einhaltung gewisser Grenzen bestehen; bei qualitativen Merkmalen kann sie absolut oder relativ sein (Geschlecht — Invalidität). Dadurch, daß man die Individuen einer Masse entweder nach dem die Masse zusammenhaltenden oder nach einem anderen Merkmal, Zustand, untereinander vergleicht und differenziert, tritt eine *Gliederung* der Masse ein in bezug auf ihre innere Struktur.

Die Veränderungen, die eine statistische Masse durch Zu- und Abgang von Individuen ihrem Umfange nach und durch Zustandsänderungen ihrer Elemente ihrer Struktur nach erfährt, bezeichnet man als *statistische Massenerscheinungen*.

Wie bei allen Naturerscheinungen, so richtet sich auch bei den menschlichen Massenerscheinungen die nächste Frage nach ihrem Verlaufe, also nach ihrer *Beschreibung;* ihre Erledigung bildet die Voraussetzung für die weitergehende Frage nach deren *Verursachung.*

Aufgabe der *mathematischen Statistik* ist es, Methoden zur zahlenmäßigen Beschreibung statistischer Massen und Massenerscheinungen und die Grundlagen zur Kausalitätsforschung im Gebiete der letzteren auszubilden.

191. Statistische Zahlen und Zahlenreihen. Bei der zahlenmäßigen Darstellung statistischer Massen und Massenerscheinungen ist

zwischen *absoluten* und *relativen* Zahlen zu unterscheiden. Absolute Zahlen drücken die Umfänge von Massen und ihrer Teile aus; relative Zahlen werden durch Inbeziehungsetzen absoluter Zahlen gewonnen. Die einfachste Form relativer Zahlen sind die *Verhältniszahlen* von Massenumfängen.

Ein wichtiges Mittel der Forschung bilden *Reihen* statistischer Zahlen, absoluter oder relativer, deren Glieder untereinander in irgend einem organischen Zusammenhange stehen.

Zur Entstehung statistischer Reihen gibt zunächst Anlaß die Gliederung von Massen nach bestimmten quantitativen oder qualitativen Merkmalen. Die Gliederung nach einem quantitativen Merkmal und ihre Beschreibung bilden den Gegenstand der *Kollektivmaßlehre* (s. den dritten Teil).

Eine andere Gattung statistischer Reihen ergibt sich dadurch, daß homologe Zahlen, die sich auf *sachlich*, *zeitlich* oder *räumlich* verschiedene Materien beziehen, zusammengefaßt werden. Solche Reihen dienen dazu, den Einfluß sachlicher Momente, der Zeit und der räumlichen Provenienz auf die Beschaffenheit der Massen und den Verlauf von Massenerscheinungen zu untersuchen, und werden dadurch zu einer Grundlage der Kausalitätsforschung.

Einige Beispiele werden die Entstehung statistischer Zahlen und Zahlenreihen am besten beleuchten.

1. Die Masse der Geburten, die in einem bestimmten Gebiete innerhalb eines Zeitraumes erfolgen, kann u. a. nach folgenden Gesichtspunkten gegliedert werden: a) Ob ehelich oder unehelich; b) ob lebend oder tot; c) ob männlich oder weiblich. Durch Kombination dieser drei Disjunktionen entstehen acht Teilmassen, deren Umfänge die absolute Gliederung ergeben. Diese ist zu Vergleichszwecken minder geeignet als irgend eine relative Gliederung. Eine solche kann in der Weise erzielt werden, daß man angibt, wie viele Prozent oder Promille o. dgl. der ganzen Masse auf jede Kategorie entfallen. Richtet sich die Aufmerksamkeit auf die Geschlechtsgliederung allein, dann besteht eine vielfach übliche Darstellung darin, daß man angibt, wie viel Knabengeburten auf 100 Mädchengeburten in jeder der vier Kategorien aus a) und b) im Ganzen entfallen. Nachstehend ist die Gliederung der 1905 in Österreich registrierten Geburten in dem eben entwickelten Sinne mitgeteilt.

Kategorie	Absolute Gliederung			Relative Gliederung	
	Männlich	Weiblich	zusammen	auf 1000 Geburten entfallen	es entfallen Knaben auf 100 Mädchen
Ehelich, lebend . . .	413,667	393,142	806,809	852,9	105,2
„ tot	11,459	8,547	20,006	21,2	134,0
Unehelich, lebend .	58,992	55,963	114,955	121,5	105,2
„ tot . . .	2,359	1,849	4,208	4,4	127,5
Im Ganzen	486,477	459,501	945,978	1000	105,9

2. Die Bevölkerungsmasse, die durch eine Volkszählung erfaßt wird, läßt eine um so reichere Gliederung zu, je mehr Daten erfragt worden sind, und es ist Sache der Bearbeitung einer Volkszählung, die demographisch und verwaltungstechnisch wichtigen Gliederungen herauszugreifen und darzustellen. Hier sei als Beispiel die Altersgliederung oder der *Altersaufbau* der Bevölkerung Österreichs nach der Volkszählung vom 31. Dezember 1900, getrennt nach dem Geschlecht, absolut und relativ, vorgeführt.

Alter	Absoluter Altersaufbau		Relativer Altersaufbau in Prozenten	
	Männlich	Weiblich	Männlich	Weiblich
von 0 bis 10	3,439,327	3,429,924	26,76	25,79
über 10 „ 20	2,509,043	2,601,067	19,52	19,56
„ 20 „ 30	2,077,705	2,124,722	16,17	15,98
„ 30 „ 40	1,629,506	1,690,970	12,68	12,71
„ 40 „ 50	1,319,761	1,373,277	10,27	10,33
„ 50 „ 60	995,590	1,077,344	7,74	8,10
„ 60 „ 70	603,844	675,258	4,70	5,08
„ 70 „ 80	234,044	273,547	1,82	2,06
„ 80 „ 90	42,146	49,259	0,33	0,37
„ 90	1,727	2,647	0,01	0,02
Im Ganzen . . .	12,852,693	13,298,015	100	100

Diese Zahlenreihen geben nur die großen Züge des Altersaufbaues, da sie die Bevölkerung nach Altersdezennien zusammenfassen. Für manche Zwecke ist eine detailliertere Darstellung, nach einzelnen Altersjahren fortschreitend, notwendig.

3. Die Masse der Todesfälle, die in einer Versicherungsanstalt oder in den Anstalten eines Versicherungsgebiets während einer Periode, z. B. während eines Geschäftsjahres sich ereignen, können aus mannigfachen Gesichtspunkten gegliedert werden. Eine wichtige Gliederung ist die nach Sterbealtern und nach Todesursachen, um den Einfluß der hauptsächlichsten Todesursachen (vielmehr Gruppen von solchen) überhaupt und in den verschiedenen Altern insbesondere kennen zu lernen. Als Beispiele solcher Reihen, die also *sachlich* voneinander unterschieden sind, führen wir hier die absolute und die prozentische Gliederung der Todesfälle aus dem Jahre 1905 bei den in Österreich tätigen privaten Versicherungsanstalten an.[1]) Die mit I bis X bezeichneten Gruppen von Todesursachen beziehen sich auf:

I. Stoffwechselstörungen und Intoxikationen.
II. Infektions- und Invasionskrankheiten.

1) Die privaten Versicherungsanstalten in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Länder im Jahre 1905. Wien, 1909 S. 78—79.

III. Erkrankungen des Nervensystems.
IV. " der Atmungsorgane.
V. " " Zirkulationsorgane.
VI. " " Verdauungsorgane.
VII. " " Harnorgane.
VIII. " " Geschlechtsorgane.
IX. Anderweitige Erkrankungen.
X. Gewaltsame Ursachen.

Absolute Gliederung.

Alter	Todesursache										Zusammen
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
30—35	18	21	49	266	54	33	18	10	35	80	584
35—40	13	19	96	349	79	33	29	3	44	90	755
40—45	14	43	145	324	139	74	50	9	67	72	937
45—50	22	24	150	309	171	91	53	4	119	77	1020
50—55	28	22	153	275	212	72	86	5	131	48	1032
55—60	39	16	163	234	254	82	81	—	147	43	1059
60—65	54	15	161	179	226	58	61	4	155	17	930
65—70	75	9	99	158	197	41	38	—	107	7	731
70—75	153	17	89	125	143	16	30	—	64	7	644
75—80	217	6	47	87	77	12	13	—	20	4	483
80—85	177	2	19	40	38	5	4	—	10	2	297
über 85	69	3	10	5	6	3	1	—	1	—	98
Summen	879	197	1181	2351	1596	520	464	35	900	447	8570

Relative Gliederung.

Alter	Todesursache										Zusammen
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
30—35	3,1	3,6	8,4	45,5	9,2	5,7	3,1	1,7	6,0	13,7	100
35—40	1,7	2,5	12,7	46,2	10,5	4,4	3,9	0,4	5,8	11,9	100
40—45	1,5	4,6	15,5	34,6	14,8	7,9	5,3	1,0	7,1	7,7	100
45—50	2,2	2,3	14,7	30,3	16,8	8,9	5,2	0,4	11,7	7,5	100
50—55	2,7	2,1	14,8	26,7	20,5	7,0	8,3	0,5	12,7	4,7	100
55—60	3,7	1,5	15,4	22,1	24,0	7,7	7,6	—	13.9	4,1	100
60—65	5,8	1,6	17,3	19,3	24,3	6,2	6,6	0,4	16,9	1,8	100
65—70	10,3	1,2	13,5	21,6	27,0	5,6	5,2	—	14,6	1,0	100
70—75	23,8	2,6	13,8	19,4	22,2	2,5	4,7	—	9,9	1,1	100
75—80	44,9	1,3	9,7	18,0	16,0	2,5	2,7	—	4,1	0,8	100
80—85	59,6	0,7	6,4	13,5	12,8	1,7	1,3	—	3,3	0,7	100
über 85	70,4	3,1	10,2	5,1	6,1	3,1	1,0	—	1,0	—	100
Durchschnitt	10,3	2,3	13,8	27,4	18,6	6,1	5,4	0,4	10,5	5,2	100

Die vertikalen Reihen, die sich auf einerlei Todesursache beziehen, zeigen sehr verschiedenen Charakter; die Stoffwechselkrankheiten z. B. verursachen die meisten Todesfälle in den hohen Altern, die Krankheiten der Atmungsorgane (darunter hauptsächlich die Tuberkulose)

wirken in allen Altersstufen erheblich, in den jüngeren Jahren stärker usw. Die horizontalen Reihen lassen erkennen, wie sich eine bestimmte Altersklasse den verschiedenen Todesursachen gegenüber verhält; es partizipiert beispielsweise die Altersklasse 30—35 fast mit der Hälfte ihrer Todesfälle an den Erkrankungen der Atmungsorgane, während die höchste Altersklasse von den Stoffwechselstörungen am stärksten betroffen ist usw.

4. Als Beispiel statistischer Reihen, die durch das Zeitmoment von einander unterschieden sind, sei der relative Altersaufbau der reichsdeutschen Bevölkerung in den Jahren 1871 und 1890 angeführt.[1])

Alter	1871	1890
0—5	12,85	13,01
5—10	11,25	11,19
10—15	10,39	10,95
15—20	9,11	9,32
20—25	8,63	8,61
25—30	7,82	7,58
30—40	13,31	12,76
40—50	10,64	10,38
50—60	8,35	7,83
60—70	5,20	5,20
70—80	2,09	2,36
über 80	0,36	0,42
	100	100

Hiernach erfuhren die Alter von 20 bis 60 eine Verminderung, während die Alter bis 5 und jene von 70 aufwärts eine Verstärkung zu verzeichnen haben.

5. Als Beispiel durch das räumliche Moment unterschiedener statistischer Reihen sind nachstehend die relativen Altersgliederungen der in dem Zeitraume 1876—1885 in Österreich und der 1875—1885 in Frankreich registrierten Todesfälle angeführt.[2])

Alter	Österreich (1876—1885)	Frankreich (1875—1885)
0—1	318,2	186,8
1—5	167,9	95,6
5—10	46,4	26,4
10—15	18,6	16,2
15—20	20,5	23,0
20—30	48,8	62,4

1) L. v. Mayr, Bevölkerungsstatistik, 1897, S. 73.
2) L. v. Mayr, Bevölkerungsstatistik, 1897, S. 235.

Alter	Österreich (1876—1885)	Frankreich (1875—1885)
30—40	50,9	61,8
40—50	58,6	68,6
50—60	74,7	90,4
60—70	92,1	134,5
70—80	74,2	153,1
80—90	26,3	76,6
über 90	2,8	6,6
	1000	1000

Der Unterschied beider Reihen ist ein sehr erheblicher und äußert sich darin, daß in Frankreich die jugendlichen Alter wesentlich schwächer, die höheren und namentlich die höchsten Alter erheblich stärker an den Sterbefällen beteiligt sind als in Österreich. Doch wäre es übereilt, wollte man daraus auf den Zusammenhang der Sterblichkeit mit dem Alter unmittelbare Schlüsse ziehen.

192. Verhältniszahlen. Statistische Wahrscheinlichkeiten. Aus den vorstehenden Beispielen ist schon zu ersehen, daß relative Zahlen zu Vergleichszwecken und zur Gewinnung allgemeiner Einsichten besser geeignet sind, als absolute Zahlen.

Unter den relativen Zahlen sind, wie ebenfalls schon bemerkt worden, die *Verhältniszahlen* die einfachsten. Man erhält eine Verhältniszahl ganz allgemein durch Division der Umfänge zweier statistischer Massen; für ihre Bedeutung ist die innere Beziehung der beiden Massen zu einander maßgebend.

Von besonderem Interesse und geradezu fundamentaler Wichtigkeit ist der Fall, daß die den Zähler bestimmende Masse ein Teil der im Nenner auftretenden ist. Hierbei können wieder die Elemente der Zählermasse von den übrigen durch ein bestimmtes Merkmal, einen Zustand, in dem sie sich befinden, unterschieden sein, oder sie können sich von den andern dadurch abheben, daß mit ihnen während einer gewissen Zeit eine bestimmte Zustandsänderung vor sich gegangen ist.

In jedem dieser Fälle bedeutet die Verhältniszahl eine *relative Häufigkeit,* und zwar im ersten die relative Häufigkeit einer Eigenschaft oder eines gewissen Zustandes in einem bestimmten *Zeitpunkte*, im zweiten die relative Häufigkeit einer gewissen Zustandsänderung, eines Geschehens, während eines bestimmten *Zeitraumes*.

Nun kann jeder relativen Häufigkeit der Sinn einer Wahrscheinlichkeit unterlegt werden, und nach der Methode, die hier ihrer Bestimmung zugrunde liegt, mag sie als *statistische Wahrscheinlichkeit* bezeichnet werden. Zu dieser äußerlichen Begründung des Namens wird sich im weiteren Verlaufe eine tiefergehende Kennzeichnung ergeben. Lexis hat die beiden eben erwähnten Formen der statis-

tischen Wahrscheinlichkeit als analytische und genetische Wahrscheinlichkeit unterschieden.[1])

Vorher mögen sie je an einem Beispiel erläutert werden. Der Bruch, dessen Nenner eine Geburtenmenge ausdrückt, während der Zähler angibt, wie viele dieser Geburten männlich waren, kann als analytische Wahrscheinlichkeit gedeutet werden, als relative Häufigkeit der Knabengeburten in der Gesamtmasse. Der Bruch, dessen Nenner eine Gesamtheit von Personen eines bestimmten Alters, etwa von x Jahren, dessen Zähler die aus ihr während des nächsten Altersjahres hervorgegangenen Todesfälle zählt, wird als genetische Wahrscheinlichkeit zu bezeichnen sein, und zwar als Wahrscheinlichkeit, mit der die Individuen der Nennergesamtheit das Sterben während des bezeichneten Zeitraumes zu erwarten hatten.

Die Anwendung des Wortes Wahrscheinlichkeit erhält einen tieferen Sinn, wenn man auf die Verursachung von Eigenschaften, Zuständen und Zustandsänderungen in der menschlichen Gesellschaft näher eingeht. Man wird bemerken, daß es neben *allgemein* wirkenden Ursachen, die alle Einzelfälle oder doch die Hauptmasse derselben beeinflussen, auch *individuelle*, von einem Fall zum andern wechselnde Ursachen gibt, daß die Dinge also analog liegen wie bei zufälligen Tatbeständen und Ereignissen, die den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden.

Man denke beispielsweise an die relative Häufigkeit verheirateter Männer eines bestimmten ehefähigen Alters zu einer bestimmten Zeit. Den in dem Lande herrschenden Sitten, der allgemeinen wirtschaftlichen Lage sind mehr oder weniger alle unterworfen; für den einzelnen Fall können die mannigfachsten Umstände persönlicher Art bestimmend sein. Handelt es sich um die relative Häufigkeit des Sterbens unter Personen eines bestimmten Alters während eines Jahres, so nehmen wenigstens bei der Hauptmasse die klimatischen, die sanitären Verhältnisse des Landes, die allgemeine wirtschaftliche Lage und die Abstammung darauf Einfluß; daneben aber spielen allerlei persönliche Umstände, wie Lebensführung, erbliche Veranlagung, Beruf u. a. mit.

Es ist nun ganz wohl denkbar, daß sich unter den allgemein auftretenden Ursachen solche von dominierender, durchschlagender Wirkung befinden und daß hieraus eine gewisse *Beständigkeit* in den zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten oder aus verschiedenen Gesamtheiten gebildeten Verhältniszahlen entspringt trotz des Wechsels, den die individuellen Ursachen im Verlauf der Einzelfälle herbeiführen. Dadurch tritt die *Massenerscheinung*, die sich aus der Vereinigung einer großen Zahl gleichartiger Einzelfälle ergibt, in einen fundamentalen Gegensatz zu der *Einzelerscheinung*.

1) Abhandl. z. Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, 1903, p. 62 u. 84.

Wir wollen diese Parallele bis an die äußerste Grenze verfolgen, die in solchen zufälligen Ereignissen zu erblicken ist, denen während der Verwirklichung *konstante Ursachen* zugrunde liegen, die sich also auf ein Bernoullisches Urnenschema zurückführen lassen. Für solche Ereignisse ist eine Erwartungsbildung bezüglich eines künftigen Massenverlaufes möglich, und die Erfahrung lehrt, daß diese Erwartungsbildung in der Hauptsache durch den wirklichen Verlauf auch bestätigt wird.

Ob es Massenzustände und Massenerscheinungen gibt, die diesem Grenzfall völlig analog sind, läßt sich auf spekulativem Wege nicht entscheiden. Die oberflächliche Anschauung scheint eher dagegen zu sprechen, da sie uns überall und in allem Änderung zeigt; ausgeschlossen ist es aber nicht, daß manche Materien sich dem Grenzfall nähern. Ohne an dieser Stelle auf eine Prüfung dieser Frage einzugehen, nehmen wir den in der älteren Literatur, von Laplace und Poisson, vertretenen Standpunkt ein, es seien die statistischen Verhältniszahlen, sofern sie nur den oben ausgesprochenen formalen Bedingungen genügen — eine Forderung, die in früherer Zeit auch nicht gestellt wurde — empirische Bestimmungen konstanter Wahrscheinlichkeiten oder von Funktionen solcher. Dann lassen sich durch Anwendung der Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie mancherlei Fragen erledigen, wie dies in den zunächst folgenden Artikeln gezeigt werden wird.

Als Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen sei aber das folgende festgehalten. *Zwischen einer statistischen Wahrscheinlichkeit und einer Wahrscheinlichkeit a priori, die sich auf eine unveränderliche Urteilsmaterie stützt, besteht der wesentliche Unterschied, daß die erstere gerade nur jene Materie kennzeichnet, aus der sie hervorging, und zu begründeten Erwartungsbildungen nur dann berechtigt, wenn besondere Untersuchungen ihre völlige oder wenigstens angenäherte Analogie mit einer Wahrscheinlichkeit der zweiten Art erwiesen haben.*

Es ist bisher nur von solchen Verhältniszahlen die Rede gewesen, die nach ihrem Bau den Namen einer Wahrscheinlichkeit rechtfertigen. Die Statistik bedient sich bei der Kausalitätsforschung noch anderer Verhältniszahlen, die aus der Vergleichung von Massen hervorgehen, bei denen es an einem solchen organischen Zusammenhange mangelt. Lexis nennt solche Zahlen *Koordinationsverhältnisse.*[1])

Als Beipiele seien angeführt die *Geburtenziffer* und die *Sterbeziffer*. Die erstere drückt die auf eine Einheit (1, 100, 1000 o. dgl.) der Bevölkerung entfallende Zahl der während eines Jahres beobachteten Geburten, die letztere gibt die analoge Zahl von Sterbefällen. Ob man die Bevölkerung am Beginn des betreffenden Jahres oder in der Mitte desselben nimmt, ein organischer Zusammenhang zwischen den in Beziehung gesetzten Massen besteht nicht: denn weder gehen die

---

1) Abhandl. z. Theorie der Bevölk.- u. Moralstatist., 1903, p. 84.

Geburten aus der ganzen Masse der Bevölkerung hervor noch stammen die Sterbefälle aus der zu Beginn oder in der Mitte des Jahres vorhandenen Bevölkerung allein. Beide Ziffern können nur einen allgemeinen Blick auf die Bewegung der Bevölkerung vermitteln, zu weitergehenden Schlüssen bieten sie keine Handhabe. Ähnlich verhält es sich mit dem Verhältnis der jährlichen Geburten aus einem Gebiete zur Zahl der dort geschlossenen Ehen, der Zahl der jährlichen Ehelösungen (durch Tod oder Gerichtsspruch) zur Zahl der Eheschließungen usw.

193. Wahrscheinlichkeit vorgegebener Grenzen einer statistischen Wahrscheinlichkeit. In einer Masse von s Individuen sei ein bestimmtes Ereignis E in m Fällen beobachtet worden, während in den übrigen $n = s - m$ Fällen das entgegengesetzte Ereignis $\overline{E}$ eingetreten ist.

Es ist dann mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

zu erwarten, daß die supponierte unbekannte Wahrscheinlichkeit p von E zwischen den Grenzen

$$\frac{m}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

liege (s. Nr. 106).

Die Grenzen fallen, von dem Einfluß des Größenverhältnisses $m:n$ abgesehen, um so enger aus, $\frac{m}{s}$ ist also als eine um so zuverlässigere Bestimmung von p zu erachten, je größer s ist. Darin liegt der mathematische Grund des längst geübten Prinzips, statistische Schlußfolgerungen auf möglichst breite Grundlage zu stellen.

Man kann $\frac{m}{s}$ als eine direkte Beobachtung l von p ansehen, der die Präzision

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$$

zukommt; aus h läßt sich nach den Formeln in Nr. 144 der mittlere und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von p ermitteln.

Beispiel. Von 54391 männlichen Personen, welche durch das Alter von 50 Jahren gingen, sind 1049 vor Erreichung des Alters von 51 Jahren gestorben.[1]) Aus diesen Daten ergibt sich für die Sterbenswahrscheinlichkeit der 50-jährigen männlichen Personen die empirische Bestimmung

1) Deutsche Sterblichkeitstafeln etc. 1883, p. 104.

$$\frac{m}{s} = \frac{1049}{54391} = 0{,}01929$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r = \frac{0{,}47694}{h} = 0{,}47694\sqrt{\frac{2 \cdot 1049 \cdot 53342}{54391^3}} = 0{,}000397,$$

so daß Eins gegen Eins darauf zu wetten wäre, daß genannte Wahrscheinlichkeit zwischen die Grenzen 0,01889 und 0,01969 falle.

194. Prüfung zweier homologer Verhältniszahlen auf ihre Verursachung. Zwei Massen von Individuen seien auf dasselbe Ereignis E hin beobachtet worden; die Ergebnisse dieser Beobachtungen seien durch die Zahlen s, m, n in dem einen und durch s', m', n' in dem andern Falle dargestellt. Daraus sind die empirischen Werte

$$l = \frac{m}{s}, \quad l' = \frac{m}{s'}$$

der Wahrscheinlichkeiten p, p' abgeleitet worden; dieselben mögen die positive Differenz $l' - l = \delta$ ergeben. Wie groß ist auf Grund dieser Wahrnehmung die Wahrscheinlichkeit, daß $p' > p$ sei?

Setzt man $p' - p = t$ und bezeichnet die Fehler von l, l' mit ε, ε', so ist auch

$$l' + \varepsilon' - (l + \varepsilon) = t,$$

woraus

$$t - \delta = \varepsilon' - \varepsilon.$$

Es stellt sich also $t - \delta = z$ als lineare Funktion der unabhängigen Fehler ε, ε' dar; infolgedessen unterliegt z dem Gesetz (Nr. 138)

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

wenn

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2}$$

und h, h' die Präzisionen der Bestimmungen l, l' sind; nach der vorigen Nummer ist

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}, \quad h' = \sqrt{\frac{s'^3}{2m'n'}},$$

daher

$$H = \sqrt{\frac{s^3 s'^3}{2(s'^3 mn + s^3 m'n')}}.$$

Die gestellte Aufgabe kommt nun darauf zurück, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß t positiv, z also zwischen den Grenzen $-\delta$ und ∞ enthalten sei. Diese ist aber

$$P = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\infty} e^{-H^2 z^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-H\delta}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-H\delta} e^{-x^2}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{H\delta}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{H\delta} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}[1 + \Phi(\gamma)], \quad (1)$$

wenn man $\Phi(\gamma)$ in der Nr. 78 erklärten Bedeutung gebraucht und

$$\gamma = H\delta = \delta \sqrt{\frac{s^3 s'^3}{2(s'^3 mn + s^3 m'n')}} \quad (2)$$

setzt.

Dieses Resultat kann in zweifacher Weise verwendet werden. Die eine besteht darin, daß man aus gegebenem δ die Wahrscheinlichkeit P rechnet; die andere geht auf die Bestimmung der größten Abweichung δ aus, die zwei empirische Werte noch aufweisen dürfen, ohne daß man sich genötigt sähe, verschiedene Grundwahrscheinlichkeiten anzunehmen; diese Bestimmung läßt sich jedoch ohne eine willkürliche Festsetzung nicht durchführen; man wählt beispielsweise $\gamma = 2$ oder $\gamma = 3$ und betrachtet das hieraus nach (2) berechnete δ noch für praktisch ververträglich mit $p' = p$.

Beispiele. In Paris wurden in dem 40-jährigen Zeitraume 1745 bis 1784 beobachtet:

$m = 393\,386$ Knabengeburten,
$n = 377\,555$ Mädchengeburten,
$s = 770\,941$ Geburten überhaupt;

in London in dem 95-jährigen Zeitraume 1664—1758:

$m' = 737\,629$ Knabengeburten,
$n' = 698\,958$ Mädchengeburten,
$s' = 1\,436\,587$ Geburten überhaupt.

Daraus berechnet sich

$$\frac{m}{s} = 0{,}51026 \text{ oder nahe } \frac{25}{24}, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}51353 \text{ oder nahe } \frac{19}{18},$$

also $\frac{m'}{s'} - \frac{m}{s} = \delta = 0{,}00327$. Wie groß ist auf Grund dieser Beobachtung die Wahrscheinlichkeit, daß in London die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt größer sei als in Paris?

Aus der Formel (2) berechnet sich

$$\gamma = 3{,}353$$

und hieraus mittels (1) nach Tafel I

$$P = 0{,}9999989,$$

so daß die Wahrscheinlichkeit, es sei dem nicht so, nur wenig über ein Milliontel ausmacht.[1])

In Österreich entfielen in dem 17-jährigen Zeitraume 1878 bis 1894 von $s = 12\,695\,948$ ehelichen Lebendgeburten

$$m = 6\,533\,961 \text{ auf Knaben}, \quad n = 6\,161\,987 \text{ auf Mädchen};$$

von $s' = 332\,306$ ehelichen Totgeburten

$$m' = 191\,159 \text{ auf Knaben}, \quad n' = 141\,147 \text{ auf Mädchen}.$$

Daraus berechnet sich

$$\frac{m}{s} = 0{,}51465, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}57525,$$

$$\delta = 0{,}06060;$$

weiter $\gamma = 49{,}3$; das zugehörige $\Phi(\gamma)$ ist von der Einheit praktisch nicht zu unterscheiden; infolgedessen unterscheidet sich auch P so wenig von 1, daß man fast mit Gewißheit aussagen kann, der Knabengeburt liege bei Totgeborenen eine größere Wahrscheinlichkeit zugrunde als bei den Lebendgeborenen. Die Ergebnisse der vorausgehenden zwölfjährigen Periode 1866—1877 bestätigen dies: hier war

$$\frac{m}{s} = 0{,}51548, \quad \frac{m'}{s'} = 0{,}57520,$$

$$\delta = 0{,}05972.$$

Man kann die vorstehende Frage auch in anderer Weise erledigen. Bezeichnet man die Größe $\sqrt{\frac{2\,mn}{s^3}}$ als den Modul der betreffenden Beobachtungsmaterie[1]), und betrachtet man $\mp 3\sqrt{\frac{2\,mn}{s^3}}$ als die äußersten Grenzen der Abweichung — es kommt ihnen die Wahrscheinlichkeit 0,99998 zu —, so ergibt sich für jede der zu vergleichenden statistischen Wahrscheinlichkeiten ein Intervall, innerhalb dessen sie mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist; liegen diese Intervalle getrennt, so darf man auf verschiedene Verursachung schließen, sind sie übergreifend, so erscheint es zweifelhaft, ob verschiedene Ursachenkomplexe zugrunde liegen. Diese Schlußweise wird allerdings häufig auch auf Verhältniszahlen angewendet, denen nicht streng der Charakter von Wahrscheinlichkeiten zuerkannt werden kann, z. B. auf Sterbeziffern. So beurteilt beispielsweise A. Tschuprow[2]) die allgemeine Sterblichkeit zweier Orte nach diesem Verfahren. Im Jahre 1897 starben

1) Vgl. Laplace, Théorie analyt., Art. 29.

2) Schmollers Jahrb. der Gesetzgebung usw., 29 (1905), p. 54.

in Wien von 1558129 Einwohnern 33181,
„ Prag „ 193097 „ 6392;

die Sterblichkeitspromille betragen 21, bzw. 31, liegen also beträchtlich auseinander; ihr dreifacher Modul ist 0,51, bzw. 1,68, das Intervall im ersten Falle 20,49, 21,51, im zweiten Falle 29,32, 32,68; da beide getrennt liegen, ist auf ungleiche Intensität der Sterbeursachen in Wien und Prag zu schließen.

195. Konjekturalrechnungen. Die in früherer Zeit festgehaltene Vorstellung von der Unveränderlichkeit statistischer Verhältniszahlen hat dazu geführt, aus der einmaligen Kenntnis solcher Zahlen auf künftige Gestaltungen zu schließen. So suchte Laplace, nachdem er aus Beobachtungen in einer großen Anzahl über das ganze Land verteilter Gemeinden die Geburtenziffer[1]) bestimmt hatte, aus den auf $1\frac{1}{2}$ Millionen *geschätzten* Geburten des ganzen Landes dessen Gesamtbevölkerung zu ermitteln, wobei er in strenger Anwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch deren äußerste Grenzen feststellte.

Die theoretische Grundlage solcher Rechnungen besteht in Folgendem. Von s beobachteten Einzelfällen haben m Fälle den Verlauf E, $n = s - m$ den entgegengesetzten Verlauf genommen. In einer zweiten Beobachtungsreihe sei bloß die Zahl m' der Wiederholungen von E erhoben worden. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die zugehörige Zahl n' innerhalb bestimmter Grenzen liege.

Die wahrscheinlichste Bestimmung von n' ist

$$n_0' = \frac{n m'}{m}. \tag{1}$$

Bezeichnet man die dem Eintreffen von E entsprechende Wahrscheinlichkeit mit p, so ist

$$p = \frac{m}{s} + \varepsilon = \frac{m'}{s'} + \varepsilon' \tag{2}$$

zu setzen, wenn ε den der ersten, ε' den der zweiten empirischen Bestimmung von p anhaftenden Fehler bedeutet. Hieraus ergibt sich, wenn für s' die Summe $m' + n'$ eingeführt wird:

---

1) Wie es um die vorausgesetzte Konstanz dieser Ziffer bestellt ist, mag daraus erschlossen werden, daß Laplace (Théorie analyt. d. probab., Art. 31) sie mit 35,26983 bestimmt hatte (aus dem Zeitraum 1799 bis 1802), während sie aus den Zeitperioden 1865—69, 1876—80, 1887—91 mit 25,9, 25,4, 23,0 angegeben wird (pro 1000). — Zur Kennzeichnung der örtlichen Schwankungen der Geburtenziffer sei angeführt, daß ihr Wert 1900 in 58 Städten und Gemeinden Österreichs mit mehr als 15000 Einwohnern um die Mitte des genannten Jahres sich bei einem Durchschnitt von 30,2 zwischen den Extremen 11,1 (Olmütz) und 49,5 (Drohobycz) bewegte, bei Zählung der Lebendgeburten allein. Statist. Monatsschr., Wien 1901, p. 91.

$$n' = \frac{\frac{n m'}{s} + m'\varepsilon' - m'\varepsilon}{\frac{m}{s} + \varepsilon - \varepsilon'}$$

$$= \frac{\frac{n m'}{m} + \frac{m' s}{m}\varepsilon' - \frac{m' s}{m}\varepsilon}{1 + \frac{s}{m}\varepsilon - \frac{s}{m}\varepsilon'}$$

und weiter durch Entwicklung nach $\varepsilon, \varepsilon'$, wenn man bei den Gliedern ersten Grades stehen bleibt:

$$n' = n_0' - \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon',$$

woraus

$$n' - n_0' = z = -\frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon'.$$

Es stellt sich also der Fehler z in der Bestimmung n_0' als eine lineare Funktion von $\varepsilon, \varepsilon'$ dar; sein Gesetz ist daher nach Nr. 138

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 z^2},$$

wenn

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\frac{s^4 m'^2}{m^4}}{h^2} + \frac{\frac{s^4 m'^2}{m^4}}{h'^2}$$

ist; dabei ist h die Präzision der ersten, h' die Präzision der zweiten Beobachtungsreihe, also

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}, \quad h' = \sqrt{\frac{s'^3}{2m'n'}} = \sqrt{\frac{s^3 m'}{2m^2 n}},$$

wenn man bei der Berechnung von h' statt n', s' deren wahrscheinlichste Bestimmungen $\frac{n m'}{m}, \frac{s m'}{m}$ verwendet. Hiernach ist

$$H = \sqrt{\frac{m^3}{2 s n m' (m + m')}}. \tag{3}$$

Es besteht also die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-H^2 z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Hz} e^{-t^2} dt = \Phi(\gamma) \tag{4}$$

dafür, daß die Differenz $n' - n_0'$ zwischen die Grenzen $-\frac{\gamma}{H}$ und $+\frac{\gamma}{H}$ oder daß n' zwischen die Grenzen

$$\frac{n m'}{m} - \gamma\sqrt{\frac{2 s n m'(m + m')}{m^3}} \quad \text{und} \quad \frac{n m'}{m} + \gamma\sqrt{\frac{2 s n m'(m + m')}{m^3}} \tag{5}$$

falle.

Man kann von diesen Formeln in verschiedener Weise Gebrauch machen: Einmal, um zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P die zugehörigen Grenzen der Bestimmung (1), dann aber auch, um die äußersten Grenzen dieser Bestimmung in dem Sinne einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit des Zutreffens (etwa mit $\gamma = 3$) zu rechnen.

Wäre s' die Größe, um welche gefragt wird, so hätte man dafür die wahrscheinlichste Bestimmung

$$s_0' = \frac{s m'}{m}, \tag{1*}$$

während sich aus dem Ansatz (2) ergibt:

$$s' = \frac{m'}{\frac{m}{s} + \varepsilon - \varepsilon'} = \frac{\frac{s m'}{m}}{1 + \frac{s}{m}\varepsilon - \frac{s}{m}\varepsilon'};$$

durch Entwicklung nach ε, ε' mit der gleichen Beschränkung wie vorhin wird

$$s' = s_0' - \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon',$$

so daß genau wie im vorigen Falle

$$s' - s_0' = z = -\frac{s^2 m'}{m^2} + \frac{s^2 m'}{m^2}\varepsilon';$$

es gelten also auch hier die Resultate (3) bis (5).

Beispiel. In dem Zeitraume 1866—1877 sind in Österreich registriert worden:

$m = 4311076$ männliche,
$n = 4052193$ weibliche,
$s = 8363269$ Lebendgeburten überhaupt;

wären in dem darauffolgenden Zeitraume 1877—1894 nur die

$m' = 6533961$ *männlichen* Lebendgeburten

verzeichnet worden, welcher Schluß wäre daraus auf die Zahl n' der weiblichen Lebendgeburten zu ziehen?

Ihr wahrscheinlichster Wert wäre

$$n_0' = \frac{n m'}{m} = 6141587,$$

die äußerste, mit $\gamma = 3$ gerechnete Abweichung, der die Wahrscheinlichkeit

$$P = \Phi(3) = 0{,}9999779 = 1 - \frac{1}{45250}$$

zukommt, beträgt

$$3\sqrt{\frac{2snm'(m+m')}{m^3}} = 23226;$$

es ist also mit der eben angegebenen, sehr großen Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß n' über das Intervall

$$6118361 \text{ bis } 6164813$$

nicht hinausfallen werde; tatsächlich ist der beobachtete Wert von n', nämlich:

$$6161987,$$

in diesem Intervall enthalten.

Wiederholt man dieselbe Konjekturalrechnung für den Zeitraum 1895—1905, wo

$$m' = 5374573$$

war, so findet man

$$n_0' = 5051852$$

mit der zu $\gamma = 3$ gehörigen Abweichung

$$19908,$$

also mit den Grenzen 5041944 und 5071760; hier aber fällt der wirklich beobachtete Wert

$$n' = 5084067$$

aus dem Intervall heraus (vgl. hierzu Nr. 206, b.).

196. Beschreibung von Massengestaltungen und Massenerscheinungen. Die Statistik bedient sich bei der Beschreibung, bei der vergleichenden und schließlich bei der Kausalitätsforschung je nach der Natur des Gegenstandes und nach dem verfolgten Zweck der *absoluten*, der *relativen Zahlen* und der *Mittelwerte*.

Durch die absoluten Zahlen werden Massenumfänge und absolute Gliederungen in bezug auf irgend ein Merkmal heterogener Massen dargestellt. Es sind demnach Einzelzahlen und Reihen absoluter Zahlen zu unterscheiden. Die Einzelzahl konstatiert lediglich eine einzelne Tatsache und gibt daher zu weiteren Erwägungen keinen Anlaß; anders steht es um Reihen von Zahlen, über die weiter unten noch gesprochen werden wird.

Relative Zahlen drücken *Verhältnisse* von Massenumfängen aus. Eine einzelne Verhältniszahl stellt wieder nur eine einzelne Tatsache fest, zwei homologe Verhältniszahlen geben schon Anlaß zur Vergleichung und Reihen solcher Zahlen können die Grundlage für mancherlei Fragestellungen bilden.

Ein vielgebrauchtes Mittel zur *zusammenfassenden* Darstellung von Reihen absoluter und relativer Zahlen besteht in der Bildung von *Mittelwerten*. Hat auch der Mittelwert in manchen Fällen eine prak-

tische Bedeutung, so bildet er doch für sich allein eine unzureichende Beschreibung der Reihe und man sucht ihn daher durch verschiedene Angaben zu ergänzen; so gibt man häufig neben einem bestimmten Mittelwert auch den *Spannrahmen* der Reihe an, der durch die extremen Glieder gebildet wird, oder man beschreibt ihre Gestaltung in noch eingehenderer Weise durch Angabe einer reduzierten Verteilung (Nr. 177).

Aus der unübersehbaren Menge möglicher Mittelwertbildungen finden in der praktischen Statistik nur einige wenige Anwendung und selbst die theoretische Statistik geht über diese nicht wesentlich hinaus.

Der am häufigsten gebrauchte Mittelwert ist das *arithmetische Mittel*, das *einfache* und das *gewogene*; es wird auch als Durchschnittswert der Reihenglieder bezeichnet. Sein Bildungsgesetz ist durch $\frac{[a]}{n}$, bzw. $\frac{[pa]}{[p]}$ ausgedrückt, wenn a die Reihenglieder, n ihre Anzahl, p ihre Gewichte sind; seine wesentlichen mathematischen Merkmale sind in den Ansätzen:

$$[(m-a)^2] \text{ ein Minimum}, \qquad [m-a]=0,$$

bzw.

$$[p(m-a)^2] \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad [p(m-a)]=0$$

enthalten. Bei absoluten Größen wird in der Regel das einfache Mittel in Betracht kommen, bei relativen Zahlen das gewogene Mittel, weil einer Verhältniszahl ein Gewicht zuzuschreiben ist, bestehend in der ihren Nenner bildenden Zahl. Wird z. B. nach der durchschnittlichen Zahl jährlicher Geburten eines Zeitraumes gefragt, so ist die Antwort durch das einfache arithmetische Mittel zu geben (um ein solches handelt es sich auch dann, wenn nicht die jahrweisen Geburtszahlen, sondern nur die Gesamtzahl gegeben ist); fragt man hingegen nach der durchschnittlichen Geschlechtsgliederung, wie sie sich aus einer Reihe jahrweiser Gliederungen ergibt, etwa in dem Sinne, daß man die Gliederung durch den Quotienten aus der Zahl der Knabengeburten durch die Gesamtzahl der Gebornen ausdrückt, so kann die Antwort nicht durch das einfache Mittel der jährlichen Gliederungszahlen gegeben werden, erfolgt vielmehr durch das im obigen Sinne gerechnete gewogene Mittel, was auf dasselbe hinauskommt, daß man die sämtlichen Knabengeburten einerseits und die Gesamtgeburten anderseits zusammenfaßt und aus beiden Summen den Quotienten bildet.

Ein anderer vielfach verwendeter Mittelwert ist der *Zentral-* oder *Medianwert*. Sowie das arithmetische Mittel die Mitte einnimmt in bezug auf die *Größe* der Glieder, so zeichnet sich der Zentralwert

durch seine mittlere *Lage* unter ihnen aus, indem ebenso viele unter ihm wie über ihm liegen; er ist sonach ein Positionsmittelwert, nicht abhängig von den Einzelwerten der Glieder. Das ihn kennzeichnende analytische Merkmal ergibt sich durch folgende Betrachtung. Ist z eine Variable, die sich zwischen die äußersten, somit auch zwischen zwei aufeinander folgende Glieder a_k, a_{k+1} der steigend geordneten Wertreihe $a_1, a_2, \cdot\cdot a_n$ einstellt, und ist weiter

$$Z=(z-a_1)+(z-a_2)+\cdots+(z-a_k)+(a_{k+1}-z)+(a_{k+2}-z)+\cdots+(a_n-z)$$

die Summe der absoluten Abweichungen der einzelnen Glieder von z, so ändert sich Z, wenn z um dz variiert, ohne das Intervall (a_k, a_{k+1}) zu verlassen, um

$$dZ=(2k-n)\,dz;$$

dies ist negativ bei $k<\frac{n}{2}$, positiv bei $k>\frac{n}{2}$ und $=0$ bei $k=\frac{n}{2}$; bei ungeradem n wechselt also dZ sein Vorzeichen an der Stelle $z=a_{\frac{n+1}{2}}$, bei geradem n bleibt es im Intervall $\left(a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ Null, ist links davon beständig negativ, rechts beständig positiv. Im ersten Falle kommt also dem Werte $a_{\frac{n+1}{2}}$, im zweiten Falle jedem Werte aus $\left(a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ die Eigenschaft zu, daß in bezug auf ihn als Ausgangspunkt Z, d. i.

$$[|z-a|] \text{ ein Minimum}$$

ist.

Ein anderer Positionsmittelwert, dem in vielen Fällen eine Vorzugsstellung einzuräumen ist, ist der *dichteste Wert* (Nr. 178, 181). Bei sehr vielen, namentlich bei gliederreichen statistischen Reihen tritt an einer Stelle mehr oder weniger deutlich eine Verdichtung ein, ein Hindrängen nach einem Werte, den man daher als den dichtesten bezeichnet. Insofern die betreffende Erscheinung die Tendenz zeigt, diesen Wert am häufigsten hervorzubringen, nennt man ihn auch den *typischen* oder *normalen* Wert der betreffenden Größe. Bei Zahlenreihen, die sich auf heterogen zusammengesetzte Massen beziehen, kann das Verhalten der komponierenden Massen in der gerade untersuchten Richtung ein so verschiedenes sein, daß jede ihren besonderen dichtesten Wert ausbildet, so daß deren mehr als einer erscheinen; doch gehört ein solches Verhalten zu den Ausnahmen.

Die Berechtigung des dichtesten Wertes beschränkt sich auf absolute Zahlen, welche die Bedeutung quantitativer Individualdaten der Elemente einer Masse besitzen, und auf solche Verhältniszahlen, die mit einem und demselben Nenner gebildet, also von gleichem Gewicht sind; denn im andern Falle kann die Ungleichheit der Gewichte eine wesentliche Verschiebung in der Bedeutung der Einzelglieder bewirken.

Außer den genannten gibt es noch viele andere Mittelwerte, die aber für statistische Zwecke kaum eine ernstliche Bedeutung haben: so das geometrische Mittel $\sqrt[n]{\prod_1^n a_i}$, das harmonische Mittel $\frac{n}{\left[\frac{1}{a}\right]}$, das antiharmonische Mittel $\frac{[a\,a]}{[a]}$; bei theoretischen Untersuchungen spielen noch die Potenzmittel $\sqrt[r]{\frac{[a^r]}{n}}$ eine Rolle, unter diesen insbesondere das quadratische Mittel $\sqrt{\frac{[a\,a]}{n}}$ (Nr. 183).[1])

An diese Darlegungen möge eine Betrachtung über die Beschreibung menschlicher Massenerscheinungen durch Zahlen mit vergleichenden Blicken auf die übrigen Naturwissenschaften angeschlossen werden.

Die Physik (und auch die Chemie) erkennt einen wesentlichen Teil ihrer Aufgabe in der Feststellung sogenannter *Konstanten*, das sind Zahlen, welche von Ort oder Zeit oder von beiden unabhängig eine gewisse definitive Bedeutung für die Natur besitzen. Aber selbst hier darf die Bezeichnung „Konstante“ nicht ohne Kritik hingenommen werden. Wenn z. B. die verschiedenen Stoffe durch ihr spezifisches Gewicht gekennzeichnet werden, so kommt dieser Zahl, selbst abgesehen davon, daß ihre experimentelle Bestimmung die Mängel einer solchen an sich trägt, ebensowenig eine definitive Bedeutung zu, als dem Namen des Stoffes eine einheitliche Bedeutung zuerkannt werden kann: wir können für den Begriff „Eisen“ nur verschiedene materielle Vertreter aufstellen und diese stimmen in ihren Merkmalen, darunter auch das spezifische Gewicht, keineswegs überein. Ein anderes Beispiel: als Ausdruck der an einem Orte herrschenden Gravitation kann die (Sekunden-) Pendellänge daselbst genommen werden, und man ist gewohnt, in ihr eine Konstante des betreffenden Ortes zu erblicken, abweichende Bestimmungen auf Rechnung unvermeidlicher Beobachtungsfehler zu setzen; aus diesem Gesichtspunkte mißt man, und nicht ohne gewisse Berechtigung, einer neueren Bestimmung erhöhten Anspruch auf Geltung bei. Bedenkt man aber, daß die Gravitation von der Massenverteilung im Weltraume und, in unserem Beispiel, hauptsächlich von der Massenverteilung der Erde abhängt, so wird man an der Frage nicht vorbeikommen, ob zwei abweichenden Bestimmungen

---

1) Für die arithmetische Theorie der verschiedenen Mittelwerte sei verwiesen auf A. Messedaglia, Calcul des valeurs moyennes, Annal. d. Démogr. internat. IV (1880), p. 387—422. Über die statistischen Mittelwerte und Verhältniszahlen, ihre praktische Bedeutung, die Voraussetzungen ihrer Verwendbarkeit für die Kausalitätsforschung vgl. man die Monographie von F. Žižek, Die statistischen Mittelwerte, Leipzig 1908.

der Pendellänge an demselben Orte außer Beobachtungsmängeln nicht auch innere Verschiedenheitsursachen zugrunde liegen. Zu einer ähnlichen Betrachtung gibt die Lotrichtung Anlaß, die man durch die Polhöhe mißt; hier haben neuere Untersuchungen in der Tat dazu geführt, daß zeitlich verschiedene Messungen der Polhöhe an demselben Orte nicht aus dem Titel der Beobachtungsfehler allein, sondern auch infolge kleiner Schwankungen der Beziehungsrichtung, der Erdachse, zu abweichenden Resultaten führen können.

So erweisen sich denn die physikalischen Konstanten bei näherer Prüfung nicht als absolut feststehende Zahlen; nur ist der Bereich der möglichen oder der experimentell ermittelten Werte zumeist ein so enger, daß man, wenigstens soweit es sich um praktische Zwecke handelt, ohne Bedenken von eigentlichen Konstanten sprechen kann.

Da entsteht denn die Frage, ob man in *dem* Gebiete der Naturwissenschaften, das den Menschen zum Gegenstande hat, und dazu gehört auch die Statistik, wenigstens in dem beschränkten Sinne der Physik die Existenz von Konstanten annehmen und erweisen kann.

Bei der Beurteilung menschlicher Massenzustände und Massenerscheinungen unter dem Gesichtspunkte dieser Frage wird man auf deren Verursachung besondere Rücksicht zu nehmen und zwischen *inneren* und *äußeren* Ursachen zu unterscheiden haben; unter den ersteren werden solche zu verstehen sein, die im Bau, in der Veranlagung des Menschen, in seinen physiologischen Funktionen gelegen und der Beeinflussung von außen mehr oder weniger vollständig entzogen sind; unter den letzteren die Einflüsse klimatischer, sozialer Natur und die Betätigungen des Eigenwillens. Von vornherein wird man die Existenz von Konstanten eher in solchen Erscheinungen zu erwarten und zu suchen haben, die, soweit man wenigstens sehen kann, nur durch innere Ursachen bestimmt sind; während man bei Erscheinungen, auf deren Verlauf auch äußere Umstände Einfluß nehmen, auf Zahlen von allgemeiner, von Zeit und Ort unabhängiger Bedeutung ebensowenig rechnen wird, als man auf eine Beständigkeit dieser Umstände oder auch nur auf die Wiederkehr gleichartiger Komplexe von Umständen zählen kann. Die Verschiedenheit nach gleichen Regeln gebildeter Zahlen ist auf dem Gebiete der Erscheinungen der zweiten Art der Anstoß zur Kausalitätsforschung, indem die Verschiedenheit der Zahlen ein Symptom für die Verschiedenheit in der Verursachung bildet.

Aber auch bei den Erscheinungen der erstbesprochenen Art darf man nach den bisher gewonnenen Erfahrungen den Nachweis von Konstanten allgemeiner und definitiver Bedeutung kaum erwarten. Ein Vorgang, der nach dem Stande unseres Wissens nur von inneren, von physiologischen Ursachen abhängt, ist die Geschlechtsdeterminierung. In der Tat wird später gezeigt werden, daß sich in der

Geschlechtsgliederung der Neugebornen eine Zahl nachweisen läßt, die in einem gewissen, mathematisch festgestellten Sinne auf eine Konstante hinweist; aber nicht auf eine Konstante von definitiver, von Zeit und Ort unabhängiger Größe; vielmehr wechselt ihr Wert nach Ort und Zeit in einem wenn auch geringen Grade und ändert sich auch bei Sonderung der Geburten nach gewissen natürlichen Merkmalen. In der Zahl der Geburten, die durchschnittlich auf eine Ehe aus einer großen Masse beobachteter Ehen entfallen, wird man auf den ersten Blick ein statistisches Element erblicken, das sehr beträchtlich unter dem Einflusse äußerer Ursachen steht (klimatische, wirtschaftliche Verhältnisse, Kulturgrad u. v. a.); dagegen wäre man geneigt, in der Zahl, die den Anteil der unfruchtbaren Ehen in einer umfangreichen Masse von Ehen ausdrückt, die empirische Bestimmung einer Konstanten zu vermuten, so lange man die Ursache der Unfruchtbarkeit lediglich in physiologischen Verhältnissen der beiden Geschlechter glaubt erblicken zu sollen; die neuere Forschung hat aber diese Vermutung widerlegt[1]), hat beträchtliche Unterschiede in jener Zahl je nach der Örtlichkeit und nach der Zeit aufgezeigt und damit erwiesen, daß die Sterilität auch äußeren Einflüssen unterworfen ist.

Man wird also kaum fehlgehen mit der Behauptung, *daß es in der „Physik der Menschheit" außer den absoluten Konstanten, die sich auf den äußeren Bau des Menschen, d. i. auf die Zahl der verschiedenen Organe (Augen, Ohren, Hände, Füße, Finger, Zehen) beziehen und von Individuum zu Individuum dieselben bleiben — jede Abweichung davon ist ein Naturspiel, eine Monstrosität —, andere Konstanten von definitiver Bedeutung nicht gibt.*[2])

Es hat den Anschein, daß den unwandelbaren Gesetzen, welche die leblose Natur beherrschen, bei der Menschheit die Anlage zur fortschreitenden Entwicklung gegenübersteht.

197. Analytische Darstellung statistischer Reihen. Englische Statistiker, allen voran K. Pearson[3]) und Edgeworth, haben in jüngster Zeit Methoden zur formelmäßigen Darstellung statistischer Reihen ausgebildet, in denen sie eine der mathematischen Grundlagen der Entwicklungslehre erblicken. Die einer solchen Formel entsprechende Linie, als *Häufigkeitskurve* bezeichnet, gibt dann ein Bild des Gesetzes, nach welchem das betreffende statistische Merkmal verteilt ist, oder nach welchem die zugrunde liegende Massenerscheinung verläuft. Es handelt sich also im wesentlichen um dasselbe Problem,

---

1) A. N. Kiaer, Statist. Beiträge zur Beleuchtung der ehelichen Fruchtbarkeit. Christiania, 1903—05.

2) Man vgl. hierzu L. v. Bortkiewicz, Die statistischen Generalisationen. Rivista di Scienza „Scientia", vol. V (1909).

3) Philos. Trans. London 186 (1895), I. A.

mit dessen Lösung sich die Kollektivmaßlehre beschäftigt. Der Weg aber, der dabei eingeschlagen wird, ruht auf dem Boden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und geht von folgender Erwägung aus.

Die Glieder der Binomialentwicklung $\varkappa\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$, wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet, schließen sich bei einigermaßen großem n eng an eine Exponentialkurve $y = ce^{-h^2x^2}$ an, die als *normale* Häufigkeitskurve erklärt wird und die Häufigkeit im Auftreten der Spezialwerte einer Größe zum Ausdruck bringt, auf die eine große Zahl variierender Ursachen einwirkt, deren jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit vermindernd wie vergrößernd in einem bestimmten kleinen Außmaße wirken kann. Verallgemeinert man den Gedanken in dem Sinne, daß man die beiden Wahrscheinlichkeiten ungleich groß voraussetzt, so ist zu erwarten, daß die Binomialentwicklung $\varkappa(p+q)^n$ sich einer Kurve nähern werde, welche die Häufigkeit der Spezialwerte darzustellen geeignet ist in den Fällen, wo die Verursachung eine minder einfache ist, wo beispielsweise die Wahrscheinlichkeit vergrößernder Elementarwirkungen jene der vermindernden übertrifft; die für die normale Verteilungskurve charakteristische Eigenschaft der Symmetrie wird sich hier nicht einstellen, die Kurve wird geeignet sein, asymmetrische Reihen zu erfassen.

Die Durchführung dieses Gedankenganges gestaltet sich wie folgt. Man konstruiere ein Polygon durch Auftragen der Glieder von $\varkappa\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$ in Abständen von der Größe c. Dann gehören zu den Abszissen $x_r = rc$ und $x_{r+1} = (r+1)c$ die Ordinaten

$$y_r = \varkappa\,\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_{r+1} = \varkappa\,\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

aus denen sich der Ausdruck konstruiert:

$$\frac{\dfrac{y_{r+1}-y_r}{c}}{\frac{1}{2}(y_{r+1}+y_r)}$$

$$= \frac{\dfrac{n-r+1}{r}-1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-r+1}{r}+1\right)c} = \frac{n-2r+1}{\frac{1}{2}(n+1)c} = \frac{nc-(r+r+1)c+2c}{\frac{1}{2}(n+1)c^2} = \frac{(n+2)c-(x_{r+1}+x_r)}{\frac{1}{2}(n+1)c^2};$$

setzt man $x_r' = x_r - \frac{1}{2}(n-2)c$ und zur Abkürzung $\frac{1}{2}(n+1)c^2 = \sigma^2$, so hat dieser Ansatz folgenden Inhalt:

$$\frac{\text{Neigung des Polygons}}{\text{Mittlere Ordinate}} = -\frac{2x \times \text{Mittlere Abszisse}}{2\sigma^2}.$$

Stellt man den gleichen Ausdruck für die *Kurve* $y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ her, wobei die Neigung durch $y' = -\frac{x}{\sigma^2} y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{x}{\sigma^2} y$ zu ersetzen ist, so ist auch hier

$$\frac{\text{Neigung der Kurve}}{\text{Mittlere Ordinate}} = -\frac{2x \times \text{Abszisse}}{2\sigma^2}.$$

Man kann demnach durch entsprechende Wahl von y_0 und σ die Normalkurve dem Polygon so nahe bringen als man will, ohne die Hypothese eines unbegrenzt großen n zu brauchen.

Bei der asymmetrischen Binomialentwicklung $\varkappa(p+q)^n$ führt die gleiche Rechnung zu folgenden Ansätzen:

$$y_r = \varkappa \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)} p^{n-r+1} q^{r-1},$$

$$y_{r+1} = \varkappa \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\ldots r} p^{n-r} q^r;$$

$$\frac{\frac{y_{r+1}-y_r}{c}}{\frac{1}{2}(y_{r+1}+y_r)}$$

$$= \frac{(n-r+1)\frac{q}{p} - r}{\frac{1}{2}\left(n-r+1\frac{q}{p}+r\right)c} = \frac{2}{c}\,\frac{(n-r+1)\lambda - r}{(n-r+1)\lambda + r} = \frac{2}{c}\,\frac{\lambda(n+1) - r(\lambda+1)}{\lambda(n+1) + r(\lambda+1)},$$

dabei ist $\frac{q}{p} = \lambda$ gesetzt worden; schreibt man weiter

$$y_{r+1} - y_r = \Delta y_r, \quad c = \Delta x, \quad \frac{1}{2}(y_{r+1} + y_r) = y_{r+\frac{1}{2}},$$

$$x_{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{r+1} + x_r) = \frac{c}{2}(2r+1),$$

so nimmt die Relation die Gestalt an:

$$\frac{\Delta y_r}{\Delta x \cdot y_{r+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{c}\,\frac{\lambda(n+1) - (\lambda+1)\left(\frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2}\right)}{\lambda(n+1) + (1-\lambda)\left(\frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{c}\,\frac{q(n+1) - \frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} + \frac{1}{2}}{q(n+1) + (p-q)\left(\frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2}\right)}$$

und weiter nach der Verschiebung $x'_{r+\frac{1}{2}} = x_{r+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} + q(n+1)\right)c$

$$\frac{\Delta y_r}{\Delta x \cdot y_{r+\frac{1}{2}}} = -2\frac{x'_{r+\frac{1}{2}}}{q(n+1)c^2 + (p-q)\left\{cx'_{r+\frac{1}{2}} + c^2 q(n+1)\right\}}$$

$$= -2\frac{x'_{r+\frac{1}{2}}}{c^2 q(n+1)(1+p-q) + (p-q)cx'_{r+\frac{1}{2}}} = -\frac{\frac{2}{(p-q)c}x'_{r+\frac{1}{2}}}{\frac{2cpq(n+1)}{p-q} + x'_{r+\frac{1}{2}}},$$

schließlich mit den Abkürzungen $\frac{2}{(p-q)c} = \gamma$, $\frac{2cpq(n+1)}{p-q} = a$:

$$\frac{\Delta y_r}{\Delta x \cdot y_{r+\frac{1}{2}}} = -\frac{\gamma x'_{r+\frac{1}{2}}}{a + x'_{r+\frac{1}{2}}};$$

geht man von der Differenzen- zur Differentialgleichung

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\frac{\gamma x}{a+x}$$

über, so führt die Integration auf

$$ly - l\frac{y_0}{a^{a\gamma}} = -\gamma x + a\gamma l(a+x),$$

woraus

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{a\gamma} e^{-\gamma x} \tag{1}$$

folgt.

Pearson bezeichnet diese Kurve als nicht genügend allgemein, weil sie in der einen Richtung bei $x = -a$ abgeschlossen ist, in der anderen aber ins Unendliche verläuft. Und doch gebe es viele Fälle, wo von vornherein klar ist, daß die Ausdehnung eine begrenzte sein muß, und wenn man sie auch a priori nicht kennt, so ist man doch von ihrer Existenz überzeugt und muß sie als eine aus den Beobachtungen selbst zu bestimmende Größe betrachten ebenso wie den Mittelwert. Außer physikalischen Beispielen führt er auch bevölkerungsstatistische als Beweis an, so die folgenden: Ordnet man in einem bestimmten Gebiete die Geburten eines Jahres nach dem Alter der Mütter, so wird die Kurve der Geburtenhäufigkeit begrenzt sein einerseits durch das Pubertätsalter, andererseits durch das Klimakterium, die nicht unbegrenzt den Jahren der Kindheit und des Greisenalters genähert werden können. Ebenso existiert bei Sterblichkeitskurven

eine vollkommen klare untere Altersgrenze und es sei höchst wahrscheinlich, daß auch eine obere existiert, und diese könne nur aus dem statistischen Material selbst abgeleitet werden. Ein Mann von der heutigen Organisation mag fähig sein, 120 Jahre zu leben, wir überschreiten aber die momentan herrschende Lebensmöglichkeit, wenn wir das Grenzalter bis 200 hinausrücken Durch diese Erwägung erscheine die Normalkurve von manchen statistischen Materien theoretisch ausgeschlossen, und wenn auch zugegeben werden müsse, daß für manche praktische Zwecke begrenzte Kurven ganz wohl durch unbegrenzte, also insbesondere unter Umständen durch die Normalkurve oder die Kurve (1), ersetzt werden können, so gehe dies in vielen Fällen nicht an und *es können mitunter begrenzte Kurven Aufschluß geben über die mögliche Ausdehnung, also über die Grenzen der Erscheinung, und das sei an sich von großem Wert.*

Mir will scheinen, als ob Pearson in diesem Punkte seinen Formeln zu viel zutrauen und den *berechneten* Grenzen einer statistischen Erscheinung eine Bedeutung beilegen würde, die ihnen *sachlich* nicht zukommt.

Der weitere Ausbau, den er seiner Theorie gibt, ist also mathematisch von großem Interesse, vom erkenntnistheoretischen Standpunkte aus aber nicht ganz einwandfrei. Pearson stellt sich die Aufgabe, folgende Kurventypen herzustellen, durch die dann nach seiner Meinung alle statistischen Erscheinungen erfaßt werden können.

Type I. Beiderseits begrenzt, asymmetrisch.

Type II. Beiderseits begrenzt, symmetrisch.

Type III. Einseitig begrenzt und asymmetrisch.

Type IV. Beiderseits unbegrenzt und asymmetrisch.

Type V. Beiderseits unbegrenzt und symmetrisch (die Normalkurve).

198. Fortsetzung. Zur Konstruktion einer Häufigkeitskurve der Type I benutzt Pearson wieder ein Urnenschema. Eine Urne enthalte np schwarze und nq weiße Kugeln und r davon werden sukzessive gezogen. Unter der Voraussetzung, daß $r \gtreqless np$, kann die Wiederholungszahl der schwarzen Kugeln jeden Wert von 0 bis np annehmen; bei $r < np$ kann sie 0 bis r betragen; das Häufigkeitspolygon wird also begrenzt und schief sein. Von ihm aus gelangt man durch den nämlichen Prozeß, wie er in Nr. 197 befolgt worden, zu einer Kurve.

Die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Erfolge bei $r < np$ Ziehungen sind durch die $r + 1$ Glieder des folgenden Ansatzes bestimmt:

$$\frac{np(np-1)(np-2)\cdots(np-r+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$
$$\times\left\{1+r\frac{nq}{np-r+1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\frac{nq(nq-1)}{(np-r+1)(np-r+2)}\right.$$
$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{nq(nq-1)(nq-2)}{(np-r+1)(np-r+2)(np-r+3)}$$
$$\left.\cdots+\frac{nq(nq-1)(nq-2)\cdots(nq-r+1)}{np(np-1)(np-2)\cdots(np-r+1)}\right\};$$

in der Tat drückt das erste Glied die Wahrscheinlichkeit aus, daß alle r Ziehungen schwarz ergeben; das zweite Glied, das ausgeführt lautet:

$$r\frac{np(np-1)\cdots(np-r+2)nq}{n(n-1)\cdots(n-r+1)},$$

die Wahrscheinlichkeit, daß $\overline{r-1}$-mal schwarz und einmal weiß erscheint in irgend einer Anordnung usw.; das letzte Glied betrifft den Fall, daß nur weiße Kugeln erscheinen.

Das Polygon, das durch Auftragen der einzelnen Glieder in der angeschriebenen Ordnung und im gegenseitigen Abstande c entsteht, hat bei den Abzsissen $x_s = sc$ und $x_{s+1} = (s+1)c$ die Ordinaten:

$$y_s = \frac{np(np-1)\cdots(np-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\frac{r(r-1)\cdots(r-s+2)}{1\ 2\cdots(s-1)}\frac{nq(nq-1)\cdots(nq-s+2)}{np(np-1)\cdots(np-r+s-1)}$$
$$y_{s+1} = \frac{np(np-1)\cdots(np-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\frac{r(r-1)\cdots(r-s+1)}{1\cdot 2\cdots s}\frac{nq(nq-1)\cdots(nq-s+1)}{np(np-1)\cdots(np-r+s)},$$

woraus

$$\frac{y_{s+1}}{y_s} = \frac{r-s+1}{s}\frac{nq-s+1}{np-r+s},$$

$$\frac{y_{s+1}-y_s}{\frac{1}{2}(y_{s+1}+y_s)c}$$
$$=\frac{2}{c}\frac{\frac{r-s+1}{s}\frac{nq-s+1}{np-r+s}-1}{\frac{r-s+1}{s}\frac{nq-s+1}{np-r+s}+1}=\frac{2}{c}\frac{(r+1)(nq+1)-(n+2)s}{(r+1)(nq+1)-\{2(r+1)+n(p-q)\}s+2s^2};$$

ersetzt man darin s mittels der Gleichung $x_{s+\frac{1}{2}} = \left(s+\frac{1}{2}\right)c$ durch $x_{s+\frac{1}{2}}$, so wird weiter

$$\frac{\Delta y_s}{y_{s+\frac{1}{2}}\Delta x}$$
$$=\frac{2}{c}\frac{(r+1)(nq+1)-(n+2)\left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c}-\frac{1}{2}\right)}{(r+1)(nq+1)-\{2(r+1)+n(p-q)\}\left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c}-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

und dies verwandelt sich nach Ausführung der Verschiebung

$$x_{s+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{(r+1)(nq+1)}{n+2}\right) c = x'_{s+\frac{1}{2}}$$

in

$$\frac{\Delta y_s}{y_{s+\frac{1}{2}} \Delta x} = -\frac{2}{c^2} \times$$

$$\frac{x'_{s+\frac{1}{2}}}{\frac{(r+1)(nq+1)}{n+2} - \frac{2(r+1)+n(p-q)}{n+2}\left(\frac{x'_{s+\frac{1}{2}}}{c} + \frac{(r+1)(nq+1)}{n+2}\right) + \frac{2}{n+2}\left(\frac{x'_{s+\frac{1}{2}}}{c} + \frac{(r+1)(nq+1)}{n+2}\right)^2}.$$

Ordnet man den Nenner, unter Einbeziehung des Faktors $\frac{2}{c^2}$, nach Potenzen von $x'_{s+\frac{1}{2}}$, so nimmt er die Form $\beta_1 + \beta_2 x'_{s+\frac{1}{2}} + \beta_3 x'^2_{s+\frac{1}{2}}$ an, und die Ausdrücke der Koeffizienten gestalten sich nach einiger Transformation wie folgt:

$$\beta_1 = \frac{c^2(r+1)(n-r+1)(np+1)(nq+1)}{(n+2)^3}$$

$$\beta_2 = \frac{cn(n-2r)(p-q)}{2(n+2)^2}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{n+2}.$$

Durch den Übergang zur Differentialgleichung ergibt sich also

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung führt zu verschiedenen Resultaten, je nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\Delta = \beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3$ des quadratischen Nenners.

Ist $\Delta < 0$, so erhält man nach der Umformung

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2\beta_3} \frac{2\beta_3 x + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2} dx + 2\beta_2 \frac{dx}{(2\beta_3 x + \beta_2)^2 - \Delta}$$

durch Integration zunächst

$$ly = ly_0 - \frac{1}{2\beta_3} l\left(\left(x + \frac{\beta_2}{2\beta_3}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\beta_3^2}\right) + \frac{\beta_2}{\beta_3\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2\beta_3 x + \beta_2}{\sqrt{-\Delta}}$$

und mittels der Abkürzungen

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\beta_3} = a, \qquad \frac{1}{2\beta_3} = m, \qquad \frac{\beta_2}{\beta_3\sqrt{-\Delta}} = \nu,$$

schließlich

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m} e^{\nu \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}, \tag{2}$$

wenn man noch $x + \frac{\beta_2}{2\beta_3}$ durch x ersetzt und die Integrationskonstante bei der Transformation passend abändert.

Ist $\Delta > 0$, so hat der Nenner reelle und von einander verschiedene Wurzeln a_1, a_2, mit deren Einführung sich die Differentialgleichung schreibt:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{\beta_3 (x - a_1)(x - a_2)};$$

ihr Integral

$$ly = ly_0 - \frac{1}{\beta_3 (a_1 - a_2)} \{a_1 l(x - a_1) - a_2 l(x - a_2)\}$$

nimmt mit der Abkürzung $\beta_3(a_1 - a_2) = \frac{1}{\nu}$ und Abänderung der Integrationskonstanten die Form

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}$$

an, die man, für a_1, a_2, ν positive wie negative Werte zulassend, auch in

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2} \tag{3}$$

umsetzen kann, wobei zu beachten bleibt, daß das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ dem Betrage nach mit $\frac{a_1}{a_2}$ übereinstimmt.

In dieser Gleichung sind mannigfache Kurventypen enthalten je nach den Vorzeichen der Parameter.

Sind diese sämtlich positiv, so hat man eine beiderseits begrenzte asymmetrische Kurve; ihre Grenzpunkte sind $x = -a_1$, $x = a_2$; über diese hinaus ist sie ohne reale Bedeutung oder auch imaginär, da die Exponenten zumeist gebrochene Zahlen sein werden.

Nimmt die Gleichung die Gestalt

$$y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

an, so besitzt die Kurve die Asymptote $x = a_1$ und endet bei $x = a_2$; sie behält die Asymptote bei, erstreckt sich aber rechts davon ins Unendliche, wenn a_2 unendlich wird, in welchem Falle die Gleichung im Hinblick auf $m_2 = \nu a_2$[1]) übergeht in

1) ν ist eine Konstante, die nichts gemein hat mit dem vorhin eingeführten ν.

$$y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-m_1} e^{-\nu x}.$$

Der weiteren Form

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{-m_2}$$

entspricht eine Kurve mit den Asymptoten $x = a_1$, $x = a_2$.

Bei unbegrenzt wachsendem a_2 resultiert aus (3) wegen $m_2 = \nu a_2$ die Grenzform

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} e^{-\nu x}, \tag{4}$$

die eine einerseits — bei $x = -a_1$ — begrenzte, anderseits ins Unendliche sich erstreckende Kurve darstellt, übrigens übereinstimmt mit (1).

Aus der Annahme $a_1 = a_2$, die auch $m_1 = m_2$ zur Folge hat, ergibt sich die Gleichung

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{m} \tag{5}$$

einer symmetrischen, beiderseits begrenzten Kurve.

Wird hier m negativ, so hat man es mit einer symmetrischen Linie zwischen den Asymptoten $x = \mp a$ zu tun.

Schreibt man in (5) $h^2 a^2$ für m und läßt hierauf a ins Unendliche wachsen, so gelangt man zu der Normalkurve

$$y = y_0 e^{-h^2 x^2}. \tag{6}$$

Von den vorstehenden Gleichungen führt also (3) auf den Typus I, (5) auf den Typus II, (4) auf III, (2) auf IV; (6) entspricht dem Typus V. Es ist nicht ausgeschlossen, und Pearson hat einzelne Beispiele davon gegeben, daß auch die anderen in die Numerierung nicht einbezogenen Gleichungen zur Verwendung kommen können.

Bei den asymmetrischen Häufigkeitskurven hat Pearson ein *Maß der Schiefe* oder der Asymmetrie eingeführt; ein Element dieses Maßes ist der Abstand d der Schwerpunkts- und der Maximalordinate, das andere Element wäre bei begrenzten Kurven die Ausdehnung (der Rang); um aber bei allen Kurven einheitlich vorzugehen, wählt er hierfür den Trägheitshalbmesser der von der Kurve begrenzten Fläche in bezug auf die Schwerpunktsordinate und betrachtet den Quotienten beider Größen als Maß der Schiefe.

199. Fortsetzung. Anwendung auf eine gegebene statistische Reihe. Zur Darstellung einer statistischen Reihe nach einer der Formeln bedient sich Pearson der *Methode der Momente.*

Man beginnt mit dem graphischen Auftragen der Reihe nach

einem für c einerseits und die Ordinaten anderseits gewählten Maßstabe; dabei errichtet man entweder über jedem c der Abszissenachse ein Rechteck von der Höhe des betreffenden y, oder aber man verbindet die oberen Endpunkte der y durch ein Polygon. Der Anblick der so erhaltenen Figur und die innere Natur der Reihe leiten die Wahl der zu versuchenden Formel.

Das Wesen der Momentenmethode besteht nun darin, daß man die Fläche der Figur und ihre Momente erster, zweiter, ... Ordnung in bezug auf die Schwerpunktsordinate nach einem mechanischen Verfahren bestimmt und die so erhaltenen Werte den analogen, aus der zugrunde gelegten Formel auf analytischem Wege abgeleiteten Ausdrücken gleichsetzt: ist man in der Bestimmung der Momente so weit gegangen, als es die Anzahl der in der Formel auftretenden Parameter erfordert, so stehen damit die zur Berechnung dieser Parameter notwendigen Gleichungen zur Verfügung.[1])

Man wird die Momentenbestimmung zuerst in bezug auf die Ordinatenachse vornehmen und hierauf erst zur Schwerpunktsordinate übergehen; ist die Figur in der ersten der beiden erwähnten Arten, also aus Rechtecken zusammengesetzt worden, so gelten für diesen Übergang dieselben Gleichungen (43) in Nr. 185, die dort den Zusammenhang zwischen den Potenzmitteln der Abweichungen vom arithmetischen Mittel und jener von einem beliebigen andern Ausgangswert darstellen.

Die Integrale, die bei der analytischen Ermittlung der Momente auftreten, führen bei den Typen I, II, III auf Gammafunktionen, bei dem Typus IV auf neue transzendente Funktionen, für die auch bereits Tabellen berechnet worden sind; beim Typus V tritt das Laplacesche Integral auf.

Für den Typus III soll hier die Rechnung mit allen Details ausgeführt werden. Die zugehörige Gleichung (4) läßt sich schreiben:

---

1) Als Gegenstück zur Methode der Momente empfiehlt F. P. Cantelli in einem Memoir „Sull' adattamento delle curve ad una serie di misure o di osservazioni" (Roma, 1905) ein von ihm als *Methode der Flächen* bezeichnetes Verfahren zur Anpassung einer entsprechend gewählten Kurve $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots c_n)$ mit n Parametern an eine gegebene Beobachtungsreihe, dessen Grundgedanke der folgende ist: Man teilt das Gebiet von x in n gleiche Teile, bestimmt für jeden derselben die Fläche der theoretischen Kurve durch Bildung des Integrals $\int y\,dx$ über dem betreffenden Intervall und die Fläche des aus den aufgetragenen Beobachtungswerten konstruierten Polygons über dem gleichen Intervall; durch Gleichsetzung dieser Flächen ergeben sich die zur Bestimmung der Parameter führenden Gleichungen. Cantelli erklärt, das Verfahren sei in vielen Fällen einfacher als die Methode der Momente und namentlich als die Methode der kleinsten Quadrate und könne ebenso gute Resultate ergeben wie diese. Die Anwendbarkeit hängt davon ab, ob sich das $\int y\,dx$ für beliebige Intervalle auswerten läßt.

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m e^{-\nu x};$$

setzt man $\nu(a + x) = z$, so wird wegen $\nu a = m$

$$y = \frac{y_0 e^m}{m^m} z^m e^{-z}.$$

Bezeichnet man mit α die Fläche und mit μ_n' das Verhältnis des Moments n-ter Ordnung bezüglich der Geraden $x = -a$ zur Fläche, so hat man

$$\alpha = \int_{-a}^{\infty} y\,dx = \frac{y_0 e^m}{m^m \nu} \int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz = \frac{y_0 a e^m}{m^{m+1}} \Gamma(m + 1),$$

$$\alpha \mu_n' = \int_{-a}^{\infty} y(x + a)^m dx = \frac{y_0 e^m}{m^m \nu^{n+1}} \int_0^{\infty} z^{m+n} e^{-z} dz = \frac{y_0 e^m}{m^m \nu^{n+1}} \Gamma(m + n + 1),$$

woraus
$$\mu_n' = \frac{\Gamma(m + n + 1)}{\nu^n \Gamma(m + 1)}.$$

Da die Gleichung drei Parameter enthält, nämlich ν, a, y_0, so hat man bis zum Moment dritter Ordnung zu gehen; für $n = 1, 2, 3$ ergibt nun die letzte Formel:

$$\mu_1' = \frac{\Gamma(m + 2)}{\nu \Gamma(m + 1)} = \frac{m + 1}{\nu}$$

$$\mu_2' = \frac{\Gamma(m + 3)}{\nu^2 \Gamma(m + 2)} = \frac{(m + 1)(m + 2)}{\nu^2}$$

$$\mu_3' = \frac{\Gamma(m + 4)}{\nu^3 \Gamma(m + 3)} = \frac{(m + 1)(m + 2)(m + 3)}{\nu^3};$$

daraus berechnen sich die auf die Schwerpunktsordinate[1]) bezogenen Größen μ_2, μ_3:

$$\mu_2 = \frac{m + 1}{\nu^2}, \qquad \mu_3 = \frac{2(m + 1)}{\nu^3}.$$

Hieraus erhält man die Parameter der Gleichung sukzessive wie folgt:

$$\nu = \frac{2\mu_2}{\mu_3},$$

$$m + 1 = \frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2}, \qquad m = \frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2} - 1,$$

$$a = \frac{m}{\nu} = \frac{2\mu_2^2}{\mu_3} - \frac{\mu_3}{2\mu_2}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \quad m^{m+1}}{a e^m \Gamma(m + 1)}.$$

1) Ihr Abstand von der Ordinatenachse ist μ_1'.

Zum Zwecke der Bestimmung des Wertes der Schiefe braucht man die Abszisse der Maximalordinate und die des Schwerpunkts; erstere ergibt sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, d. i. aus

$$\nu \frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{m-1} e^{-\nu x} = 0$$

und ist $x = 0$, so daß y_0 selbst die Maximalordinate darstellt; letztere ist, wie vorhin schon bemerkt worden, im ursprünglichen Koordinatensystem durch μ_1' gegeben; folglich ist

$$d = \mu_1' - a = \frac{m+1}{\nu} - a = \frac{1}{\nu} = \frac{\mu_3}{2\mu_2},$$

und weil $\sqrt{\mu_2}$ der Trägheitsradius[1]) bezüglich der Maximalordinate ist, so hat man als Maß der Schiefe

$$\frac{d}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\mu_3}{2\mu_2^{\frac{3}{2}}}.$$

200. Fortsetzung. Beispiel. Nach einer von W. F. Willcox mitgeteilten, aus den Jahren 1882—86 stammenden Statistik der Ehescheidungen in den Vereinigten Staaten[2]) verteilten sich diese nach der Dauer der Ehe wie folgt:

Ehedauer in Jahren	Scheidungen (1882—86)	Ehedauer in Jahren	Scheidungen (1882—86)
1	5314	11	4384
2	7483	12	4089
3	9426	13	3563
4	9671	14	3144
5	9014	15	2931
6	8274	16	2721
7	7021	17	2217
8	6093	18	1877
9	5305	19	1577
10	5002	20	1459
		21 und darüber	9401
		Summe	109966

Das Diagramm dieser Reihe weist beträchtliche Asymmetrie auf; der Natur der Sache nach ist es links scharf begrenzt, denn die Ehedauer 0 bildet eine unüberschreitbare Schranke; nach der rechten Seite läßt sich eine bestimmte Grenze, nämlich eine Ehedauer, über die hinaus es keine Scheidung mehr gibt, nicht wohl angeben. Alle diese Umstände weisen auf eine Kurve der Type III hin.

1) Gleichbedeutend mit der „Streuung“ in der Kollektivmaßlehre.

2) Columbia College, vol. I, p. 25.

Unter Benutzung zweier extremer Annahmen über die Verteilung der 5314 Scheidungen im ersten Jahre der Ehe und der ungegliederten 9401 Scheidungen nach mehr als 20 Jahren bestimmte Pearson

$$\mu_2 = 60{,}7376, \qquad \mu_3 = 809{,}15;$$

daraus berechnet sich nach den obigen Formeln

$$\nu = 0{,}150127, \qquad m = 0{,}36891$$
$$a = 2{,}4573$$
$$d = 6{,}66103$$
$$\text{Maß der Schiefe} = 0{,}8547;$$

α bedeutet die Gesamtzahl der Fälle, und hiermit wird

$$y_0 = 8882{,}45,$$

so daß die Gleichung der die Reihe darstellenden Kurve lautet:

$$y = 8882{,}45\left(1 + \frac{x}{2{,}4573}\right)^{0{,}36891} e^{-0{,}150127x}.$$

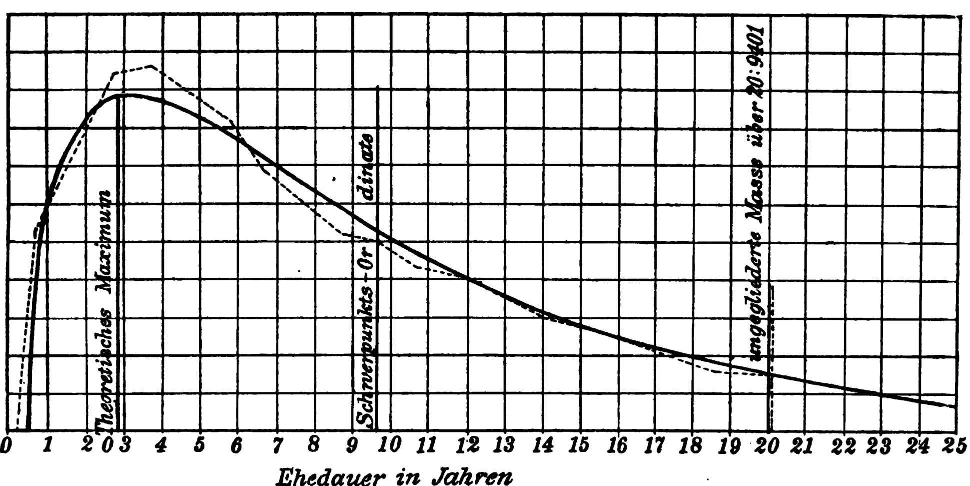


Fig. 19.

In Fig. 19 sind das Polygon und die ihm angepaßte Kurve dargestellt; die Figur bricht bei dem 25. Jahre der Ehedauer ab, die Kurve aber liegt erst bei etwa 45 Jahren der Achse so nahe, daß sie bei dem gewählten Maßstab von ihr praktisch nicht unterschieden werden kann. Die vorgeführte Materie ist bemerkenswert als ein Beispiel beträchtlicher Asymmetrie.

§ 2. Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte.

201. Präzision einer statistischen Relativzahl. Es sei beobachtet worden, daß von $s = m + n$ Einzelfällen m den Verlauf E, n den Verlauf $\bar{E}$ genommen haben. Um die betreffende Massenerscheinung quantitativ zu beschreiben, bildet man aus den absoluten Beobachtungszahlen m, n, s irgendeine Relativzahl und läßt sich dabei häufig von dem Gesichtspunkte leiten, dieselbe möge eine leicht faßbare Bedeutung haben.

Setzt man voraus, daß der Erscheinung ein konstanter Bedingungskomplex zugrunde liege, so sind die Verhältniszahlen $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ empirische Bestimmungen der komplementären Wahrscheinlichkeiten p, $1-p$ von E, $\bar{E}$, und die gemeinsame Präzision dieser Bestimmungen ist:

$$h = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}}. \tag{1}$$

Jede andere aus m, n, s abgeleitete Verhältniszahl v hat dann die Bedeutung einer empirischen Bestimmung einer gewissen Funktion V von p, so zwar, daß

$$V = f(p), \quad v = f\left(\frac{m}{s}\right) \tag{2}$$

ist; es handelt sich nun um die Präzision dieser Bestimmung.

Diese Aufgabe fällt unter das in Nr. 155 behandelte Problem der Genauigkeitsbestimmung einer Funktion direkt beobachteter Größen; bezeichnet man mit μ den mittleren Fehler von $\frac{m}{s}$, mit μ_v den mittleren Fehler von v, so ist

$$\mu_v^2 = f'\left(\frac{m}{s}\right)^2 \mu^2;$$

geht man vom mittleren Fehler zur Präzision über (Nr. 144), so ergibt sich

$$\frac{1}{2h_v^2} = f'\left(\frac{m}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{2h^2},$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (1):

$$h_v = \frac{1}{\left|f'\left(\frac{m}{s}\right)\right|}\sqrt{\frac{s^3}{2mn}}, \tag{3}$$

womit die Aufgabe allgemein gelöst ist.

Zur Erläuterung einige praktische Fälle.

Der Quotient $\frac{s}{m}$, welcher ausdrückt, auf wie viele Einzelfälle

ein einmaliges Eintreffen von E entfällt, ist eine Bestimmung von $\frac{1}{p}$; aus $f(p) = \frac{1}{p}$ folgt $f'(p) = -\frac{1}{p^2}$; folglich ist die Präzision dieses Quotienten nach (3):

$$h = \frac{m^2}{s^2}\sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = \sqrt{\frac{m^3}{2sn}}. \tag{4}$$

Die Zahl $a\frac{m}{n}$, welche ausdrückt, wieviel Ereignisse E auf a Ereignisse $\bar{E}$ entfallen, ist eine empirische Bestimmung von $f(p) = a\frac{p}{1-p}$; da nun $f'(p) = \frac{a}{(1-p)^2}$, so ist ihre Präzision

$$h = \frac{n^2}{as^2}\sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{n^3}{2sm}}. \tag{5}$$

Beispiel. Im Jahre 1897 sind in Österreich beobachtet worden:

$m = 415721$ männliche,
$n = 393503$ weibliche,
$s = 809224$ eheliche Lebendgeburten überhaupt.

Daraus berechnet sich:

1) $\frac{m}{s} = 0{,}51373$ als eine Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt;

2) $\frac{s}{m} = 1{,}94654$ als Anzahl der Geburten, auf welche eine Knabengeburt fällt;

3) $\frac{1000m}{n} = 1056{,}46$ als Anzahl der Knaben, die auf 1000 Mädchen entfallen.

Die Präzisionen h_1, h_2, h_3 dieser drei empirischen Bestimmungen sind:

$$h_1 = \sqrt{\frac{s^3}{2mn}} = 1272{,}7$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{m^3}{2sn}} = 335{,}9$$

$$h_3 = 0{,}001\sqrt{\frac{n^3}{2sm}} = 0{,}30093.$$

Es kommt also der ersten Bestimmung die größte Präzision zu.

202. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen normaler Dispersion. Die im vorangehenden durchgeführte wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung statistischer Relativzahlen setzt voraus, daß der untersuchten Massenerscheinung ein derartiger Komplex von Bedingungen zugrunde liege, daß jene Relativzahlen als empirische Werte einer *festen* Wahrscheinlichkeit oder einer Funktion dieser Wahr-

scheinlichkeit angesehen werden können. Die älteren theoretischen Statistiker haben das Zutreffen dieser Voraussetzung als etwas Selbstverständliches angenommen; in neuerer Zeit aber hat sich die Notwendigkeit[1]) einer Prüfung herausgestellt und ihre Durchführung hat sich geradezu zu einem Hauptproblem der theoretischen Statistik ausgebildet.

Wie ein Urteil darüber zu erlangen ist, ob und wieweit die hervorgehobene Voraussetzung erfüllt sei, hat W. Lexis[2]) durch ein methodisches Verfahren gezeigt; mit seiner Vorführung wird zugleich die Antwort auf eine in Nr. 192 formulierte Frage gegeben sein. Die Grundlage dieses Verfahrens bilden *Reihen von Relativzahlen*, die sich auf die betreffende Massenerscheinung beziehen und deren Glieder aus zeitlich oder räumlich getrennten Beobachtungsgebieten stammen. Das Studium der *Schwankungen* in einer solchen Reihe, der Verteilung oder *Dispersion* ihrer Glieder um einen Mittelwert ist es, was zur Schöpfung eines begründeten Urteils in der angegebenen Richtung führt.

Wir beginnen mit der Darlegung des einfachsten Falles, der zugleich die Norm für alle weiteren Untersuchungen bildet.

Über eine Massenerscheinung E seien z Beobachtungsreihen *gleichen Umfanges*, je s Einzelfälle umfassend, ausgeführt worden; die beobachteten Wiederholungszahlen von E seien $m_1, m_2, \cdots m_z$. Liegt E eine feste Wahrscheinlichkeit p zugrunde, so sind die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s} \tag{1}$$

als gleich genaue empirische Bestimmungen oder gleich genaue, von systematischen Fehlern freie direkte Beobachtungen der Unbekannten p aufzufassen, und ihre Anordnung um das arithmetische Mittel als den wahrscheinlichsten Wert, der sich aus ihnen für p ableiten läßt:

$$p_0 = \frac{\frac{m_1}{s} + \frac{m_2}{s} + \cdots + \frac{m_z}{s}}{z} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs}, \tag{2}$$

wird dann jene Erscheinungen darbieten, welche wir bei den Ergebnissen von Versuchsreihen mit zufälligen Ereignissen konstanter Wahrscheinlichkeit wie auch bei den Ergebnissen direkter Beobachtungen der bezeichneten Qualität kennen gelernt haben (s. Nr. 86, 147—148).

---

1) Bienaymé und Cournot waren die ersten, die an der bis dahin festgehaltenen Voraussetzung Zweifel äußerten. L. v. Bortkiewicz in Conrads Jahrb. (3). 27, (1904), p. 246.

2) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jahrb. für Nat.-Ök. u. Statist. 27 (1876), p. 209—245. — Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. Br. 1877. — Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen. Jahrb. für Nat.-Ök. u. Statist. 32 (1879), p. 60—98. — Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena 1903, insbesondere die Kap. V bis IX.

Die mittlere Abweichung der Zahlen (1) von dem wahren Werte p, beziehungsweise ihre Präzision, ist nach Nr. 80, 85:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}, \tag{3}$$

und die einzelnen Abweichungen

$$-\frac{m_i}{s} + p = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

befolgen das Gesetz

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon^2}.$$

Dagegen unterliegen die Abweichungen

$$-\frac{m_i}{s} + p_0 = \lambda_i \qquad (i = 1, 2 \cdots s$$

dem Gesetze

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \lambda^2},$$

worin (s. Nr. 148)

$$h_2 = \sqrt{\frac{z}{z-1}} h_1 = \sqrt{\frac{z}{z-1}} \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}} \tag{4}$$

ist.

Weder h_1 noch h_2 läßt mangels der Kenntnis von p eine strenge Auswertung zu. Maßgebend wäre der Wert h_2, weil ja nicht die ε, sondern nur die λ zugänglich sind; indessen besteht zwischen h_2 und h_1 bei einigermaßen erheblichem z nur ein geringer Unterschied[1]). Man erhält eine zureichend genaue Bestimmung von h_2, wenn man p durch p_0 ersetzt und von dem Faktor $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ absieht: sie heiße h', so daß

$$h' = \sqrt{\frac{s}{2p_0(1-p_0)}}; \tag{5}$$

ebenso wird

$$\mu' = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s}} \tag{6}$$

eine zureichende Bestimmung von μ_1 abgeben.

Diese Berechnung von h', μ' ist unabhängig von den Einzelwerten der Reihe (1).

Es gibt aber noch eine zweite Berechnung dieser Größen, die sich auf die Abweichungen λ der Werte (1) von ihrem Mittelwerte p_0 stützt; nach dieser ergeben sich für μ_1, h_1 die Werte:

---

1) Es ist bei

$z =$	10	50	100	1000
$\sqrt{\frac{z}{z-1}} =$	1,054	1,011	1,005	1,0005.

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{z-1}}, \quad \text{daraus} \quad h'' = \sqrt{\frac{z-1}{2[\lambda\lambda]}}. \tag{7}$$

Statt der mittleren Abweichung könnte die durchschnittliche verwendet werden, und es ergäben sich für diese, entsprechend μ' und μ'', die beiden Bestimmungen (s. Nr. 141, 148):

$$\vartheta' = \sqrt{\frac{2p_0(1-p_0)}{\pi s}}, \quad \vartheta'' = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{z(z-1)}}. \tag{8}$$

Man unterscheidet die beiden Methoden, von welchen die eine zu den Werten h', μ', ϑ', die andere zu den Werten h'', μ'', ϑ'' geführt hat, als die *kombinatorische* oder indirekte, beziehungsweise als die *physikalische* oder direkte[1]). Die erste ruht auf dem Boden des Bernoullischen Theorems und hängt dadurch mit den Voraussetzungen zusammen, die über die Natur der Erscheinung E, über die Art ihrer Verursachung, gemacht worden sind; die zweite stützt sich auf die Fehlertheorie.

Treffen die eben erwähnten Voraussetzungen zu, so wird, bis auf die durch die Natur der Sache begründete Unvollkommenheit, nicht nur Übereinstimmung herrschen zwischen den Werten

$$h', \quad \mu', \quad \vartheta'$$

einerseits und

$$h'', \quad \mu'', \quad \vartheta''$$

andererseits, sondern es werden sich die λ der Hauptsache nach auch dem Gesetze

$$\frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2 \lambda^2}$$

gemäß verteilen, d. h. die Anzahl der λ, die zwischen die Grenzen

$$-\frac{\gamma}{h''} \quad \text{und} \quad +\frac{\gamma}{h''}$$

fallen, wird voraussichtlich nahe kommen der Zahl

$$z\,\Phi(\gamma) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt. \tag{9}$$

Dieser Fall, welcher dem Verhalten von Reihenergebnissen über *zufällige* Ereignisse entspricht, wäre der Typus einer menschlichen Massenerscheinung, der ein *konstant* bleibender Bedingungskomplex zugrunde liegt, bei welcher der Verlauf der einzelnen Fälle den Charakter des Zufälligen an sich trägt und die Fälle als untereinander unabhängig anzusehen sind. Lexis[2]) bezeichnet eine solche Massen-

1) W. Lexis, Zur Theorie etc., p. 27; L. v. Bortkiewicz, Das Gesetz der kleinen Zahlen (1898), p. 5. — In den „Abhandlungen zur Theorie des Bevölkerungswechsels etc." Jena 1903, p. 131, nennt Lexis die erste Methode die „statistische". 2) l. c.

erscheinung als eine *unverbundene*, die ihr zugrunde liegende Größe p als eine *typische* Wahrscheinlichkeitsgröße mit *normaler Dispersion*. Von einer solchen Größe ist anzunehmen, daß sie in der physiologischen Konstitution der beobachteten Masse gelegen sei, und in diesem Sinne sagt man, sie bilde eine diese Masse charakterisierende Konstante, eine „massenphysiologische Konstante".

Das summarische Merkmal, daß man in der Reihe (1) empirische Werte einer typischen Wahrscheinlichkeit mit normaler Dispersion und in p_0 ihre beste, aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial ableitbare Bestimmung vor sich habe, besteht darin, daß nahezu

$$h' = h'' \quad \text{oder} \quad \mu' = \mu'', \quad \vartheta' = \vartheta''$$

ist, oder daß der Quotient

$$Q = \frac{h'}{h''} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\mu''}{\mu'}, \quad Q = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \tag{10}$$

sich von der Einheit nur wenig unterscheidet. Diesen Quotienten, von v. Bortkiewicz[1]) als *Fehlerrelation* bezeichnet, hat E. Dormoy[2]) in der dritten Form vor Lexis, also unabhängig von diesem in die mathematische Statistik eingeführt und ihm den Namen „Divergenzkoeffizient" gegeben.

Betreffs der praktischen Durchführung der Untersuchung mögen gleich einige Bemerkungen angeschlossen werden.

Sind die Beobachtungsreihen nicht von gleichem Umfange, wohl aber, wie dies häufig vorkommt, durch Zahlen $s_1, s_2, \cdots s_z$ von gleicher *Ordnung* dargestellt, so wird es genügen, in den Formeln, wo s vorkommt, dieses durch das arithmetische Mittel $\frac{[s]}{z}$ zu ersetzen und die Rechnung weiter so zu führen wie vorhin; auch zwischen den beiden Mittelwerten

$$\frac{\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} + \cdots + \frac{m_z}{s_z}}{z} \quad \text{und} \quad \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{s_1 + s_2 + \cdots + s_z}$$

wird kein erheblicher Unterschied bestehen.

Gehen aber die Zahlen $s_1, s_2, \cdots s_z$ beträchtlich auseinander, dann wird man die Quotienten

$$\frac{m_1}{s_1}, \quad \frac{m_2}{s_2}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s_z} \tag{1*}$$

als Beobachtungen von den Gewichten $s_1, s_2, \cdots s_z$ behandeln und erhält (s. Nr. 149):

$$p_0 = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{s_1 + s_2 + \cdots + s_z}, \tag{2*}$$

1) Das Gesetz der kleinen Zahlen, p. 31.

2) Journal des actuaires francaises, 1874. Théorie mathémat. des assurances sur la vie (1878), I, p. 39.

als deren arithmetisches Mittel und

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[s\lambda\lambda]}{z-1}} \tag{7*}$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1, d. i. einer fiktiven Beobachtung, die aus einer Reihe mit der Beobachtungszahl $s = 1$ stammt; dem entsprechend wird

$$\mu' = \sqrt{p_0(1-p_0)} \tag{6*}$$

und der Divergenzkoeffizient

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'} = \sqrt{\frac{[s\lambda\lambda]}{(z-1)p_0(1-p_0)}}.$$

Hat man statt der Quotienten $\frac{m_i}{s_i}$, die unmittelbar die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit haben, andere Relativzahlen

$$v_1, \quad v_2, \quad \cdots \quad v_z \tag{1**}$$

gerechnet, die sich als Spezialwerte einer gewissen Funktion $f(p)$ von p darstellen, so sind (1**) direkte Beobachtungen dieser Funktion, und die Berechnung von μ'', h'' modifiziert sich nur dahin, daß nun

$$\lambda_i = -v_i + \frac{[v]}{z}$$

wird; dagegen tritt an die Stelle von h' im Sinne der Ausführungen in Nr. 201 der Ausdruck:

$$h' = \frac{1}{|f'(p_0)|}\sqrt{\frac{s}{2p_0(1-p_0)}}. \tag{5*}$$

Bei ungleichen Grundzahlen $s_1, s_2, \cdots s_z$ erfahren diese Formeln die bereits erklärte Abänderung.

Die beiden Beispiele in Nr. 151 bieten das reine *Bild* eines Beobachtungsmaterials, wie es am Beginne dieser Untersuchung vorausgesetzt wurde, und typischer Wahrscheinlichkeiten mit normaler Dispersion. In dem Beispiele a) ist

$$h' = 14{,}14, \quad h'' = 16{,}32, \quad \text{also} \quad Q = 0{,}86,$$

in dem Beispiele b)

$$h' = 18{,}97, \quad h'' = 21{,}46 \quad \text{und} \quad Q = 0{,}87;$$

die normale Dispersion der Einzelwerte ist dort nachgewiesen.

Wenn über eine und dieselbe Massenerscheinung mehrere Reihen von der Form (1) vorliegen und wenn man annehmen kann, daß allen ein und dieselbe Wahrscheinlichkeit p zugrunde liegt, so kann die Frage entstehen, welches Verhalten bei den für die einzelnen Reihen berechneten Divergenzkoeffizienten theoretisch zu erwarten sei, insbesondere, welche Genauigkeit, etwa gemessen an ihrem mittleren

Fehler, ihnen zukommt. Mit der hierauf bezüglichen Untersuchung hat sich v. Bortkiewicz beschäftigt;[1]) ihr Resultat geht dahin, daß bei Zutreffen aller Voraussetzungen zwischen

$$\sqrt{\frac{[(1-Q_i)^2]}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2z}}$$

angenäherte Übereinstimmung stattfinden sollte, wobei die Summe im Zähler des ersten Ausdrucks sich über sämtliche Q_i der betrachteten n Reihen erstreckt.

203. Typische Wahrscheinlichkeitsgrößen mit übernormaler Dispersion. Stellt man sich vor, daß der Bedingungskomplex der Massenerscheinung E ein mit der Zeit oder dem Orte veränderlicher sei, daß ferner die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s} \tag{1}$$

sich auf eine Reihe von z Jahren oder auf z getrennte Beobachtungsgebiete beziehen, so kann die Sache so aufgefaßt werden, als lägen gleich genaue direkte Beobachtungen einer Größe vor, die selbst von Beobachtung zu Beobachtung sich ändert. Dann kommen in den Abweichungen

$$\lambda_i = -\frac{m_i}{s} + p_0 \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

der Glieder der Reihe (1) von ihrem Mittelwert

$$p_0 = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs} \tag{2}$$

nicht bloß die *zufälligen* Abweichungen, sondern auch die *wesentlichen* Schwankungen der Grundgröße p zum Ausdruck; das hat eine Vergrößerung des aus den λ berechneten mittleren Fehlers μ'', somit eine Verminderung der nach der physikalischen Methode bestimmten Präzision h'' zur Folge; man hat daher eine Ungleichung des Sinnes

$$h' > h'' \tag{3}$$

und einen Divergenzkoeffizienten

$$Q > 1 \tag{4}$$

zu erwarten. Je ausgesprochener dieses Verhalten auftritt, um so sicherer ist der Schluß, daß die wirkliche Sachlage den gemachten Voraussetzungen entspreche.

Dies hindert jedoch nicht, daß die λ wieder ein Gesetz von der Form des früheren Falles befolgen, nämlich das Gesetz

1) Mitteilungen des Verbandes der österr. und ungar. Versicherungstechniker, V. Heft, 1901, p. 1—3.

$$\frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2 \lambda^2};$$

es brauchen nämlich nur die Schwankungen der Grundgröße selbst den Charakter des Zufälligen zu besitzen; denn, hat die Grundgröße während der i-ten Beobachtungsserie den Wert p_i, und ist

$$-\frac{m_\alpha}{s} + p_i = \varepsilon_{\alpha,1}^{(i)}$$

$$-p_i + p_0 = \varepsilon_2^{(i)}$$

so hat man

$$\lambda_\alpha = -\frac{m_\alpha}{s} + p_0 = \varepsilon_{\alpha,1}^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)},$$

und sind $\varepsilon_{\alpha,1}^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$ beide zufälliger Natur, so befolgt auch ihre Summe λ_α das Exponentialgesetz (Nr. 138). Nur wird die Dispersion der λ_α jetzt eine weitere sein als in dem Falle, wo in p_0 der empirische Wert einer konstanten Wahrscheinlichkeit zu erblicken ist, sie wird *übernormal* sein (vgl. Nr. 96).

Eine menschliche Massenerscheinung, welche diese Merkmale aufweist, gehört gleichfalls zu den *unverbundenen;* sie zeigt aber in den Ergebnissen einer Serie von Beobachtungsreihen eine geringere *Stabilität,* als eine Erscheinung der in der vorigen Nummer beschriebenen Art. Die ihr entsprechende, nunmehr zufällig veränderliche Größe p, von welcher p_0 einen für das räumliche Gebiet oder für die Periode, über welche sich die Beobachtungen erstrecken, geltenden Durchschnittswert vorstellt, wird von Lexis eine *typische* Wahrscheinlichkeitsgröße mit *übernormaler Dispersion* und *unternormaler Stabilität* genannt.

204. Fortsetzung. Nähere Untersuchung des Falles einer variablen Grundwahrscheinlichkeit. Wiewohl die Annahme einer *stetigen* Veränderlichkeit der Natur der Sache im allgemeinen besser entsprechen würde, möge doch angenommen werden, daß die Veränderung *serienweise,* also von Beobachtungsreihe zu Beobachtungsreihe erfolgt, so daß während einer solchen eine *konstante* Wahrscheinlichkeit herrscht[1]).

---

1) Diese Vorstellung rührt von W. Lexis her: Über die Theorie der Stabil. etc., p. 66. — Vgl. für das Folgende L. v. Bortkiewicz, Das Gesetz der kleinen Zahlen, p. 29ff. — Ein recht instruktives Beispiel, an dem das Entstehen übernormaler Dispersion leicht durchblickt werden kann, ist das folgende. Es werden z Ziehungsserien zu je s Kugeln gemacht; die Ziehungen erfolgen aus zwei Urnen, deren eine nur weiße, die andere nur schwarze Kugeln enthält, und durch Aufwerfen einer Münze wird jedesmal darüber entschieden, aus welcher Urne gezogen werden soll, und aus dieser werden dann *alle* Ziehungen der betreffenden Serie vollzogen. Die relative Häufigkeit einer Farbe wird auch jetzt nahe $\frac{1}{2}$ sein; aber die Einzelergebnisse der Serien sind nur 1 und 0, kleine Abweichungen vom allgemeinen Durchschnitt kommen nicht nur nicht am häufigsten, sondern überhaupt nicht vor, die Dispersion wird daher eine übernormale sein. Vgl. A. Tschuprow, Schmollers Jahrb. der Gesetzgebung etc. 29, (1905), p. 49.

Die Ergebnisse der Beobachtung von E in z verschiedenen Jahren (oder aus z getrennten Gebieten), ausgedrückt durch die Verhältnisse:

$$\frac{m_1}{s}, \quad \frac{m_2}{s}, \quad \cdots \quad \frac{m_z}{s}, \tag{1}$$

seien also empirische Bestimmungen von

$$p_1, p_2, \cdots p_z. \tag{2}$$

Ferner sei

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs} = p_0 \tag{3}$$

das arithmetische Mittel der Zahlen (1),

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_z}{z} = p \tag{4}$$

das unbekannte Mittel der Zahlen (2), also die auf sämtliche Beobachtungen bezügliche durchschnittliche Grundwahrscheinlichkeit, für welche p_0 eine empirische Bestimmung darstellt.

Einem konstant bleibenden p entspräche eine mittlere Abweichung der Resultate (1) vom Betrage

$$\mu' = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}; \tag{5}$$

dagegen wird, wenn man

$$-\frac{m_i}{s} + p = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

setzt, die wirklich stattfindende mittlere Abweichung

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{z}} \tag{6}$$

sein.

Um diese zu bestimmen, bilde man

$$\varepsilon_i^2 = \left(\frac{m_i}{s}\right)^2 - 2p\frac{m_i}{s} + p^2$$

und summiere für alle i; dadurch ergibt sich:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \left[\left(\frac{m_i}{s}\right)^2\right] - 2p\left[\frac{m_i}{s}\right] + zp^2.$$

Ferner folgt aus

$$\left(-\frac{m_i}{s} + p_i\right)^2 = \left(\frac{m_i}{s}\right)^2 - 2p_i\frac{m_i}{s} + p_i^2,$$

daß

$$\left[\left(\frac{m_i}{s}\right)^2\right] = \left[\left(-\frac{m_i}{s} + p_i\right)^2\right] + 2\left[p_i\frac{m_i}{s}\right] - [p_i^2];$$

setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, so wird

$$[\varepsilon\varepsilon] = \left[\left(-\frac{m_i}{s} + p_i\right)^2\right] + 2\left[p_i\frac{m_i}{s}\right] - [p_i^2] - 2p\left[\frac{m_i}{s}\right] + zp^2.$$

In dieser Gleichung möge jedes Glied durch seinen Mittelwert ersetzt werden; dabei ist zu beachten, daß der Mittelwert

von ε_i^2 gleich ist μ''^2,

„ $\left(-\frac{m_i}{s}+p_i\right)^2$ „ „ $\frac{p_i(1-p_i)}{s}$

„ $\frac{m_i}{s}$ „ „ p_i;

hiernach ergibt sich zur Bestimmung von μ'' der Ansatz:

$$z\mu''^2 = \left[\frac{p_i(1-p_i)}{s}\right] + 2[p_i^2] - [p_i^2] - 2p[p_i] + zp^2$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$z\mu''^2 = \left[\frac{p_i(1-p_i)}{s}\right] + [p_i^2] - zp^2. \tag{7}$$

Nun folgt aus der Identität:

$$p_i q_i = pq + (p-q)(p-p_i) - (p_i - p)^2,$$

in welcher $q_i = 1 - p_i$, $q = 1 - p$ ist, durch Summierung über alle i:

$$[p_i q_i] = zpq + (p-q)(zp - [p_i]) - [(p_i - p)^2],$$

und wieder mit Rücksicht auf (4):

$$[p_i q_i] = zpq - [(p_i - p)^2];$$

ferner aus der Identität

$$(p_i - p)^2 = p_i^2 - 2pp_i + p^2$$

durch den gleichen Vorgang:

$$[(p_i - p)^2] = [p_i^2] - zp^2.$$

Hiermit verwandelt sich die Gleichung (7) in:

$$z\mu''^2 = \frac{zpq}{s} - \frac{[(p_i-p)^2]}{s} + [(p_i-p)^2],$$

woraus schließlich gefunden wird:

$$\mu'' = \sqrt{\frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s}\,\frac{[(p_i-p)^2]}{z}}. \tag{8}$$

Diese Formel läßt die Zusammensetzung von μ'' aus zwei Komponenten deutlich erkennen: die eine Komponente

$$\sqrt{\frac{pq}{s}},$$

übereinstimmend mit dem unter (5) gerechneten μ', ist die mittlere, vom Zufall allein abhängige Schwankung, die *unwesentliche* Schwankungskomponente (der *Normalfehler*); die andere,

$$M = \sqrt{\frac{s-1}{s}\frac{[(p_i - p)^2]}{z}}, \tag{9}$$

stammt von den Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit her und soll als *physische* Schwankungskomponente[1]) (*absoluter Fehlerexzedent*) bezeichnet werden. Die Zusammensetzung beider zu μ'' geschieht nach dem Gesetze der Zusammensetzung der mittleren Fehler, die aus unabhängigen Fehlerursachen entspringen.

Die Komponente M ist die für das Wesen einer Massenerscheinung von der hier beschriebenen Art charakteristische. Aus der Struktur ihrer Formel ist zu erkennen, daß sie um so geringer ausfällt, je geringer die Schwankungen $p_i - p$ der Grundwahrscheinlichkeit sind, je *stabiler* also die betreffende Massenerscheinung ist, daß sie ferner von dem Umfange der Beobachtungsreihen nur in sehr geringem Grade abhängt, weil $\frac{s-1}{s}$ bei erheblichem s nur wenig von der Einheit verschieden ist.

Die Komponente μ' hingegen nimmt im Verhältnis der Qudratwurzel aus s ab. Dies hat zur Folge, daß bei sehr umfangreichen Beobachtungsreihen μ' gegen M zurücktritt und das aus den Abweichungen $\lambda_i = -\frac{m_i}{s} + p_0$ gerechnete μ'' vornehmlich die Komponente M zum Ausdruck bringt. Bei verhältnismäßig kleinem s kann die Komponente M durch jene μ' verdeckt werden.

Es bleibt noch das Verhalten des Divergenzkoeffizienten im Sinne dieser Theorie zu untersuchen. Der Ausdruck

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'} = \sqrt{1 + (s-1)\frac{[(p_i - p)^2]}{zpq}} \tag{10}$$

desselben zeigt vor allem die schon hervorgehobene Tatsache, daß

$$Q > 1$$

ist und daß unter sonst gleichbleibenden Umständen Q mit s wächst. Durch Verkleinerung des Umfanges der Beobachtungsreihen kann also der Divergenzkoeffizient der Einheit näher gerückt, die übernormale Dispersion der normalen genähert werden. Gerade dieses Verhalten von Q hat zur Aufklärung mancher Erscheinungen geführt, die sich bei der Untersuchung statistischer Zahlenreihen auf ihre Dispersion eingestellt haben[2]).

1) W. Lexis, Über die Theorie der Stabil. etc., p. 66. — Bezüglich der eingeklammerten Bezeichnungen vgl. L. v. Bortkiewicz, Das Gesetz etc., p. 30.

2) Vgl. hierzu die von L. v. Bortkiewicz unter der Bezeichnung „Gesetz der kleinen Zahlen" veröffentlichten Untersuchungen, deren Hauptergebnis darin liegt, daß Massenerscheinungen mit kleinen Ereigniszahlen, Erscheinungen also, die relativ sehr selten auftreten, sich dem Schema der normalen Dispersion besser anpassen, als Massenerscheinungen mit großen Ereigniszahlen. v. Bortkiewicz stützt dieses Verhalten auf die oben erwähnte Eigenschaft von Q.

Mit Hilfe von Q und μ' drückt sich die physische Komponente des mittleren Fehlers wie folgt aus:

$$M = \mu' \sqrt{Q^2 - 1}. \tag{11}$$

Nach dieser allein ist der wesentliche Anteil der Dispersion oder die physische Dispersion zu beurteilen. Je größer M, desto größer der Einfluß des Wechsels der maßgebenden Umstände auf die Schwankung der Resultate.

Für $Q = \sqrt{2} = 1{,}414 \cdots$ wird das Maß der physischen Schwankungen dem der zufälligen gerade gleich. Von da ab wächst mit Q der Einfluß der physischen Schwankungen über jenen der zufälligen hinaus.

205. Unternormale Dispersion. Stabilität statistischer Reihen. Symptomatische Reihen. Da eine Massenerscheinung, der eine *konstante* Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, zu Verhältniszahlreihen mit *normaler* Dispersion, eine Massenerscheinung mit *variabler* Wahrscheinlichkeit zu solchen Reihen mit *übernormaler* Dispersion führt; da ferner ein anderes Verhalten der Wahrscheinlichkeit außer diesen nicht denkbar ist, so kann es Massenerscheinungen, denen der Charakter des Zufälligen zukommt, mit anderer als normaler oder übernormaler Dispersion nicht geben.

Der Fall, daß eine Reihe von Relativzahlen *unternormale* Dispersion zeigte, was sich durch eine Ungleichung zwischen der auf kombinatorischem Wege abgeleiteten Präzision h' und der physikalisch bestimmten Präzision h'' des Sinnes

$$h' < h''$$

und somit durch einen Divergenzkoeffizienten

$$Q < 1$$

äußern müßte, beträfe also nicht mehr eine *unverbundene* Massenerscheinung, bei der die Abweichungen von einem mittleren Verlauf lediglich durch zufällige Einflüsse bewirkt werden. Vielmehr müßte angenommen werden, daß durch einen absichtlichen Eingriff, eine Norm, ein Gesetz, die Tendenz nach einem bestimmten Verlauf erzeugt werde; dadurch geht die Unabhängigkeit der Einzelfälle verloren, und die Größe, welche als Mittelwert aus der Reihe der Relativzahlen gewonnen wird, kann nicht mehr als empirische Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit oder der Funktion einer Wahrscheinlichkeit gelten; sie ist nichts mehr als eine quantitative Beschreibung des äußeren Verlaufes der Erscheinung während der Beobachtungsperiode[1]).

---

1) A. Tschuprow, l. c., veranschaulicht das Zustandekommen unternormaler Dispersion an analogen Ziehungen wie bei der übernormalen, s. Fußnote zu Nr. 204, mit dem Unterschiede, daß jetzt vor jeder Serie nur für den *ersten* Zug

Aus diesen Erwägungen geht hervor, daß das *höchste* Maß von *Stabilität*, das einer Reihe von Relativzahlen, die aus einer *unverbundenen*, oder wie man sagen könnte, *natürlichen* Massenerscheinung stammen, eigen sein kann, der *normalen* Dispersion entspricht. Eine über dieses Maß hinausgehende Stabilität können nur Reihen aufweisen, die sich auf unter einem normativen äußeren Zwange stehende Massenerscheinungen beziehen.

Es liegt in der Natur der Sache, daß der Fall normaler Dispersion, der gewissermaßen den Gipfelpunkt bildet, sich nie in voller Strenge wird erweisen lassen; ja es spricht vieles dafür, daß menschliche Massenerscheinungen ihn niemals vollkommen darbieten, ihm vielmehr als einem idealen Falle nur nahe kommen; mit andern Worten: daß die völlige Konstanz der eine menschliche Massenerscheinung bedingenden Umstände auf die Dauer niemals vorhanden ist.

Die Relation $h' = h''$ oder $Q = 1$ wird also im allgemeinen nur angenähert zu erwarten sein; selbst dort, wo die Bedingungen normaler Dispersion erfüllt sind (Ziehungen aus einer Urne mit konstantem Mengenverhältnis weißer und schwarzer Kugeln bei beständiger Mischung der letzteren), wird eine Abweichung nach der einen oder andern Seite die Regel bilden. Nur die Erfassung des Gesamtbildes, das eine Reihe von Beobachtungsserien über eine Massenerscheinung darbietet, ermöglicht einen Schluß auf deren Natur.

Reihen, welchen der typische Charakter, sei es mit normaler oder übernormaler Dispersion, abgeht, werden *symptomatische* Reihen genannt[1]). Sie bilden die quantitative Beschreibung eines mit der Zeit veränderlichen Zustandes einer Menschenmasse und müssen nach der Zeitfolge geordnet bleiben, um die Art der Änderung erkennen zu lassen. Verrät sich diese als eine in gleichem Sinne anhaltende, so mag die Reihe als eine *evolutorische* bezeichnet werden; wechselt sie, jedoch in unregelmäßiger Weise, ihren Sinn, so soll die Reihe eine *undulatorische* heißen, und verrät sich in dem Wechsel der Änderungstendenz eine regelmäßige Zeitfolge, so hat man es mit einer *periodischen* Reihe zu tun. Das Studium solcher Reihen ist der sicherste Anhaltspunkt für das Studium der Massenerscheinungen selbst.

---

die Urne durch Aufwerfen der Münze bestimmt wird; von da ab *alternieren* die Urnen regelmäßig. Die relative Häufigkeit einer Farbe wird wieder nahe $\frac{1}{2}$ sein, es kommen aber nur kleine Abweichungen vor, weil die Einzelwerte entweder genau $\frac{1}{2}$ sind (bei geradem s), oder nahe daran, nämlich $\frac{s-1}{2s}$ oder $\frac{s+1}{2s}$ (bei ungeradem s). In diesem wie in dem andern Beispiel besteht eine Abhängigkeit der Einzelfälle, bei der ersten Anordnung der Ziehungen auf serienweise Gleichartigkeit, bei der zweiten Anordnung auf Kompensation hinwirkend. Tschuprow sucht auch die übernormale Dispersion statistischer Reihen aus der Abhängigkeit der Einzelfälle, also aus einer Verbundenheit zu erklären.

1) W. Lexis, Zur Theorie etc., p. 33.

206. Untersuchungsergebnisse. Seit der Begründung der Dispersionstheorie sind durch ihren Urheber, W. Lexis selbst, sowie seitens anderer verschiedene menschliche Massenerscheinungen nach dieser Methode untersucht worden; insbesondere sind das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, das Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen und der Überlebenden, vornehmlich in den ersten Lebensjahren, die Sterblichkeit, aber auch einige Erscheinungen der Moralstatistik Gegenstand des Studiums gewesen. Untersuchungen dieser Art haben nicht allein ein hervorragendes wissenschaftliches Interesse, sondern auch eine praktische Bedeutung, indem sie der Lösung der Vorfrage dienen, ob auf gewisse gesellschaftliche Vorgange die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich anwenden lassen. Denn dies ist nur dann gerechtfertigt, wenn eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße mit normaler Dispersion oder, wenn es sich nicht um weit ausgedehnte Zeiträume handelt, eine solche mit mäßiger übernormaler Dispersion vorliegt.

Im folgenden sollen einige Beispiele und Resultate der Untersuchung mitgeteilt werden.

a) Über das *Geschlechtsverhältnis der Geborenen* hat Lexis[1]) an preußischen, englischen und französischen Beobachtungen umfangreiche Berechnungen angestellt, die zu dem Ergebnis führten, daß man es bei dieser Erscheinung mit einer typischen Wahrscheinlichkeitsgröße von normaler Dispersion in sehr deutlich ausgesprochener Weise zu tun habe, daß also eine jenes Verhältnis charakterisierende Zahl eine massenphysiologische Konstante darstelle, die mit der Zeit, wenn überhaupt, so doch nur eine sehr geringe Veränderung erleidet. Daraus folgt, daß die Geschlechtsbestimmung in der physiologischen Konstitution einer Menschenmasse tief begründet und von äußeren Umständen fast unabhängig ist.

Nachstehend ist das Resultat der ersten Lexisschen Beobachtungsreihe zusammengestellt. Es handelt sich dabei um die monatlichen Geburten in 34 Bezirken Preußens aus den Jahren 1868 und 1869, also um 34 Reihen von je 24 Beobachtungen. Als Relativzahl, auf welche sich die Untersuchung bezieht, ist

$$v = \frac{1000\,m}{n} = \frac{1000\,p}{1-p}$$

verwendet, also die Zahl der Knabengeburten, die auf 1000 Mädchengeburten entfallen (s. Nr. 201). Die kombinatorische Präzision wurde nach der Formel

$$h' = \frac{(1-p_0)^2}{1000\sqrt{2p_0(1-p_0)}}\sqrt{s}$$

gerechnet, wobei s die durchschnittliche monatliche Geburtenzahl des

1) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 216—245; Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 64—78.

betreffenden Bezirkes, p_0 dagegen die aus sämtlichen Geburten der zwei Jahre abgeleitete Verhältniszahl der männlichen Geburten zu allen Geburtsfällen bedeutet, die sich mit 0,515 ergab, so daß bei h' nur der Faktor $\sqrt{s}$ von Bezirk zu Bezirk wechselt, während der andere (= 0,0003328) konstant bleibt. Die physikalische Präzision ist für jeden Bezirk nach der Formel

$$h'' = \sqrt{\frac{23}{2[\lambda\lambda]}}$$

berechnet. Dadurch sind sämtliche Bezeichnungen der folgenden Tabelle erklärt.

Bezirk	s	h'	h''	Q
Königsberg	3426	0,0195	0,0208	0,94
Gumbinnen	2275	0159	0144	1,10
Danzig	1830	0142	0151	0,94
Marienwerder	2918	0180	0249	0,72
Berlin	2448	0165	0158	1,04
Potsdam	3028	0183	0176	1,04
Frankfurt	3211	0189	0185	1,02
Stettin	2167	0155	0166	0,93
Cöslin	1844	0143	0119	1,20
Stralsund	689	0086	0096	0,90
Posen	3738	0203	0205	0,99
Bromberg	2133	0154	0145	1,06
Breslau	4766	0230	0205	1,12
Liegnitz	2975	0182	0163	1,12
Oppeln	4855	0232	0214	1,08
Magdeburg	3650	0201	0174	1,15
Merseburg	2899	0179	0146	1,23
Erfurt	1235	0117	0142	0,82
Schleswig	2715	0173	0118	1,47
Hannover	1142	0112	0130	0,86
Hildesheim	1200	0115	0114	1,01
Lüneburg	975	0104	0094	1,11
Stade	879	0099	0093	1,06
Aurich-Osnabrück	1220	0116	0122	0,95
Münster	1118	0111	0092	1,21
Minden	1464	0127	0141	0,90
Arnsberg	2918	0180	0177	1,02
Cassel	2441	0164	0189	0,87
Wiesbaden	1837	0143	0108	1,32
Koblenz	1700	0137	0131	1,05
Trier	1901	0145	0148	0,98
Köln	1936	0146	0149	0,98
Düsseldorf	4305	0218	0247	0,88
Aachen	1485	0128	0151	0,85

Die Werte von Q schwanken zwischen 0,72 und 1,47, liegen in 19 Bezirken über, in 15 unter 1. Nichtsdestoweniger macht sich die Einheit oder eine ihr sehr nahe liegende Zahl als Zentralwert deutlich bemerkbar; in der Tat ist das arithmetische Mittel aller Q gleich

1,09, und man braucht keineswegs aus dem geringen Überschuß über 1 auf übernormale Dispersion zu schließen; vielmehr kann derselbe aus der Unsicherheit in der Bestimmung der h' erklärt werden.

Auch daraus geht die gute Übereinstimmung der wirklichen Dispersion mit der erwartungsmäßigen hervor, daß das Mittel der h' gleich 0,0156, jenes der h'' gleich 0,0154 ist. Aus der Prüfung der Verteilung der $34 \cdot 24 = 816$ Einzelwerte von v um den aus dem Gesamtmaterial berechneten $v_0 = 1063$ unter Zugrundelegung der Präzision 0,0156 ergab sich folgendes:

Abweichung	Beobachtet			Theoret.
	+	—	zus.	
0 bis $19\frac{1}{2}$	152	130	282	272
$19\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	96	118	214	231
$39\frac{1}{2}$ „ $59\frac{1}{2}$	74	61	135	159
$59\frac{1}{2}$ „ $79\frac{1}{2}$	46	48	94	90
$79\frac{1}{2}$ „ $99\frac{1}{2}$	25	22	47	42
über $99\frac{1}{2}$	29	15	44	23

Man kann auch hier von einer zureichenden Annäherung der wirklichen Verteilung an die erwartungsmäßige sprechen.

b) Die Bearbeitung der in *Österreich* (im Reichsrate vertretene Länder) in dem 40jährigen Zeitraume 1866—1905 registrierten Geburten in ihrer Scheidung nach Lebend- und Totgeburten einerseits und ehelichen und unehelichen Geburten andererseits ergab die nachstehend mitgeteilten Ergebnisse.[1])

Zunächst möge der Gesamtumfang des Materials und seine Gliederung nach den erwähnten Kategorien aus folgender Tabelle entnommen

Zeitraum: 1866—1905.

Kategorie	Ehelich			Unehelich		
	männl.	weibl.	zusammen	männl.	weibl.	zusammen
Lebend-geborne	15492625	14613525	30106150	2492765	2357227	4849992
	Jährl. Durchschn.		752654	Jährl. Durchschn.		121250
Tot-geborne	429829	319716	749545	104789	87636	192425
	Jährl. Durchschn.		18739	Jährl. Durchschn.		4811

1) Das Material für diese Untersuchung ist dem „Statistischen Jahrbuch" und (von 1882 ab) der „Österreichischen Statistik", beide herausgegeben von der Statist. Zentral-Komm., entnommen.

werden, welche auch den für die Rechnungen erforderlichen Jahresdurchschnitt angibt.

Die Untersuchung wurde an dem Verhältnis $\frac{m}{s}$ der Knabengeburten zur Gesamtzahl der Geburten, also an jenem Verhältnis vorgenommen, das eine empirische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt darstellt. Für jede der vier Kategorien ergab sich so eine Reihe von 40 Einzelwerten dieses Verhältnisses, deren Dispersion dann geprüft wurde. Die Einzelwerte selbst sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Relative Häufigkeit der Knabengeburten.

Jahr	Leb. ehel.	Leb. unehel.	Tot ehel.	Tot unehel.
1866	0,51637	0,51050	0,5759	0,5263
67	51662	51271	5736	5353
68	51501	50929	5783	5407
69	51575	51029	5805	5384
70	51514	51345	5720	5436
71	51565	51628	5781	5275
72	51594	51621	5825	5353
73	51554	51366	5723	5389
74	51611	51475	5708	5342
75	51397	51695	5719	5310
76	51503	51614	5751	5409
77	51488	51482	5716	5387
78	51398	51205	5803	5350
79	51445	51381	5682	5338
80	51479	51373	5758	5256
81	51469	51420	5756	5450
82	51523	51378	5730	5424
83	51450	51453	5734	5458
84	51378	51137	5675	5261
85	51439	51498	5769	5362
86	51575	51429	5706	5386
87	51323	51187	5779	5476
88	51461	51222	5711	5422
89	51405	51298	5761	5351
90	51495	51335	5757	5525
91	51473	51626	5780	5452
92	51572	51286	5771	5454
93	51562	51620	5814	5543
94	51455	51079	5789	5413
95	51409	51430	5721	5489
96	51358	51805	5721	5558
97	51373	51524	5653	5573
98	51357	51556	5682	5672
99	51351	51647	5663	5516
1900	51484	51403	5720	5517
1	51351	51305	5646	5574
2	51379	51682	5679	5521
3	51311	51412	5701	5719
4	51437	51332	5759	5623
5	51272	51317	5728	5606

Die Zahlen jeder Reihe sind verglichen worden mit jenem Werte p_0 des Verhältnisses $\frac{m}{s}$, der sich aus der Gesamtmenge der betreffenden Geburten ergibt; aus den Abweichungen $\lambda_i = -\frac{m_i}{s_i} + p_0$ ist dann der mittlere Fehler

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{39}},$$

aus p_0 und dem Jahresdurchschnitt s_0 der Geburten der mittlere Fehler

$$\mu' = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s_0}}$$

berechnet worden[1]); aus diesen beiden ergab sich der Dispersionskoeffizient

$$Q = \frac{\mu''}{\mu'}.$$

Die betreffenden Werte sind aus der folgenden Tabelle zu ersehen.

	Leb. ehel.	Leb. unehel.	Tot ehel.	Tot unehel.
p_0	0,51460	0,51397	0,5735	0,5446
μ''	0,000951	0,00198	0,00448	0,01131
μ'	0,000577	0,00144	0,00361	0,00718
Q	1,65	1,37	1,24	1,57

Um eine generelle Probe daraufhin zu erhalten, in welchem Grade sich die Abweichungen dem Bernoullischen Theorem anpassen, ist jedesmal auch der durchschnittliche Fehler ϑ berechnet und das Verhältnis $\frac{\mu''}{\vartheta}$ gebildet worden, dessen theoretischer Wert $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,253$ ist; es ergab sich für die vier Kategorien:

ϑ	0,000784	0,00156	0,00372	0,00923
$\frac{\mu''}{\vartheta}$	1,213	1,269	1,204	1,225

worin eine hinreichende Übereinstimmung mit der Theorie erblickt werden kann.

Was die Verteilung der λ_i, also die eigentliche Dispersion, anlangt, so zeigen die nachstehenden Daten, wie sie nach dem jeweiligen Werte von h'' (physikalische Präzision) sich hätte ergeben sollen (Theor.) und wie sie tatsächlich sich ergeben hat (Beob.).

[1]) Gelegentlich der ersten Auflage des Buches ist eine Proberechnung bei den ehelichen Lebendgeburten mit Berücksichtigung der ungleichen Geburtenmengen von Jahr zu Jahr, also mit Berücksichtigung der Gewichte ausgeführt worden; sie ergab zwar andere Werte für μ'' und μ', ließ aber den Divergenzkoeffizienten fast unverändert.

Lebend ehelich $h'' = 743{,}5$			Lebend unehelich $h'' = 307{,}1$			Tot ehelich $h'' = 157{,}8$			Tot unehelich $h'' = 62{,}7$		
λ von 0 bis	Anzahl Theor.	Anzahl Beob.	λ von 0 bis	Anzahl Theor.	Anzahl Beob.	λ von 0 bis	Anzahl Theor.	Anzahl Beob.	λ von 0 bis	Anzahl Theor.	Anzahl Beob.
± 0,0002	7	7	± 0,001	13	18	± 0,002	18	12	± 0,001	3	3
0,0004	13	12	0,002	25	25	0,004	25	24	0,005	14	12
0,0006	19	17	0,003	32	35	0,006	33	32	0,010	25	26
0,0008	24	20	0,004	37	38	0,008	37	37	0,015	33	32
0,0010	28	24									
0,0014	34	35									
0,0018	35	38									

Man kann wohl, namentlich in den weniger zahlreichen Kategorien, von einem vollkommenen Anschlusse der Erfahrung an die Theorie sprechen.

Die durchwegs übernormale Dispersion veranlaßte mich zu einer eingehenderen Prüfung des Zahlenmaterials daraufhin, ob nicht neben den zufälligen Schwankungen auch Spuren systematischer Schwankungen zu erkennen seien, die dann auf zeitliche Änderungen des Bedingungskomplexes der Geschlechtsdetermination hinweisen würden. In der Tat scheinen mir solche Spuren deutlich vorhanden zu sein. Wenn man nämlich die λ in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge auf ihr Vorzeichen hin betrachtet, so treten bei allen Kategorien erhebliche Zeitstrecken mit einem stark überwiegenden Vorzeichen ein, während in anderen Strecken ein bunter Wechsel des Vorzeichens herrscht. Die Auszählung ergab folgendes Resultat:

		+	−			+	−
Lebend ehel.	1866—1874	0	9	Lebend unehel.	1866—1870	5	0
	1875—1893	8	11		1871—1894	12	12
	1894—1905	11	1		1895—1905	3	8
Tot ehel.	1866—1888	11	12	Tot unehel.	1866—1880	15	0
	1889—1894	0	6		1881—1894	7	7
	1895—1905	10	1		1895—1905	0	11

Der Anblick der Tabelle auf S. 55 zeigt auch, wie z. B bei den ehelichen Lebendgeburten die relative Häufigkeit der Knaben bis 1874 beträchtlich groß bleibt, um dann vielfach zu schwanken und von 1894 ab beständig verhältnismäßig klein zu bleiben; ein fast umgekehrtes Verhalten zeigen die unehelichen Totgeburten.

Eine weitere Stütze für die Vermutung, daß die Häufigkeit der Knabengeburten außer unwesentlichen auch wesentlichen zeitlichen Schwankungen unterworfen ist, ergibt sich durch Einteilung des ganzen

Zeitraumes in mehrere Perioden und deren gesonderte Untersuchung; die Einteilung, die in der nachstehenden Tabelle gemacht worden ist, schließt sich in der Hauptsache den über die Vorzeichen gemachten Wahrnehmungen an.

	Relative Häufigkeit der Knabengeburten			
	1866—1877	1878—1894	1895—1905	1866—1905
Lebendgeborne, ehelich	0,51545	0,51465	0,51372	0,51460
Lebendgeborne, unehelich	0,51368	0,51349	0,51498	0,51397
Totgeborne, ehelich	0,5753	0,5653	0,5697	0,5735
Totgeborne, unehelich	0,5359	0,5410	0,5576	0,5446
Geborne überhaupt	0,51642	0,51596	0,51535	0,51590

Man sehe auch das Beispiel am Schlusse von No. 195 nach.

Zu einer weiteren Untersuchung gibt die Gliederung der Gesamtgeburtenmasse nach ehelichen und unehelichen Geburten einerseits und nach Lebend- und Totgeburten andererseits. Es handelt sich da um zwei Momente verschiedener Natur; auf die erste Gliederung nehmen die wirtschaftlichen Verhältnisse unzweifelhaft einen erheblichen Einfluß, während die zweite Gliederung mehr von physiologischen Momenten beeinflußt sein dürfte.

Die Untersuchung ist derart geführt, daß für alle Jahre des 28jährigen Zeitraumes 1878—1905 der Anteil der unehelichen Geburten und ebenso der Anteil der Totgeburten an der Gesamtgeburtenmasse in Promille bestimmt worden ist. Diese Promille sind in der linken Hälfte der nachfolgenden Tabelle in ihrer zeitlichen Folge, in der rechten Hälfte ihrer Größe nach geordnet aufgeführt. Die erste Anordnung dient dazu, um zu prüfen, ob eine wesentliche zeitliche Schwankung in den für die betrachteten Gliederungen maßgebenden Momenten zu vermuten sei; an der zweiten soll untersucht werden, welcher Art die Verteilung der Einzelwerte ohne Rücksicht auf das Jahr, aus dem sie stammen, sein möge.

Was den ersten Fragepunkt betrifft, so spricht der Bau der Reihen in entschiedener Weise *für* die angedeutete Vermutung; das Promille der unehelichen Geburten bleibt während des ganzen Zeitraumes 1879—1898 über dem allgemeinen Durchschnitt 143,2 und hält sich außerhalb dieses Zeitraumes ständig unter demselben; bei dem Promille der Totgeburten ist das gleiche Verhalten in bezug auf den Zeitraum 1885—1901 und den allgemeinen Durchschnitt 27,5 zu beobachten.

Mit diesen Erscheinungen harmoniert denn auch die Tatsache, daß die nach der Größe geordneten Zahlen nicht den typischen Charakter zufällig gestörter Werte, vielmehr eine ausgesprochene Asymmetrie zeigen. In der die unehelichen Geburten betreffenden Reihe liegen 8 Glieder unter, 20 Glieder über dem Mittel, und die durch-

schnittliche Abweichung vom Mittel beträgt in diesen beiden Gruppen beziehungsweise 9,96, 4,27 Promille; die Streuung der Reihe beträgt 7,42, der Unterschied ihrer extremen Glieder 24,5. Die auf die Totgeburten bezügliche Reihe weist 11 Glieder unter und 17 über dem Mittel und die durchschnittlichen Abweichungen betragen 1,25, bzw. 0,92; die Streuung berechnet sich mit 1,22, der Abstand der extremen Glieder ist bloß 4,3. All dies weist darauf hin, daß der Bedingungskomplex für das Zustandekommen unehelicher Geburten viel stärkeren Störungen ausgesetzt ist als jener, von dem die Totgeburten stammen.

Jahr	Uneh. Geburten	Totgeburten	Uneh. Geburten	Totgeburten
	in ‰ der gesamten Geburtenmenge			
	nach der Zeitfolge		nach der Größenfolge	
1878	142,2	25,1	126,0	25,1
1879	145,2	25,6	126,5	25,6
1880	148,0	25,9	128,2	25,6
1881	145,2	26,2	132,7	25,9
1882	145,8	26,7	134,3	26,2
1883	146,4	27,0	136,5	26,3
1884	148,0	27,1	139,5	26,4
1885	149,8	27,7	142,2	26,7
1886	148,3	27,7	144,0	26,8
1887	148,8	28,5	144,8	27,0
1888	148,3	28,2	145,2	27,1
1889	148,8	28,5	145,2	27,7
1890	150,0	28,4	145,4	27,7
1891	147,3	29,1	145,8	27,7
1892	150,5	29,0	146,2	27,8
1893	145,4	29,0	146,4	28,1
1894	149,4	29,4	147,3	28,2
1895	146,2	28,4	148,0	28,4
1896	149,1	28,4	148,0	28,4
1897	144,8	28,7	148,3	28,4
1898	144,0	28,1	148,3	28,5
1899	139,5	28,6	148,8	28,5
1900	136,5	27,7	148,8	28,6
1901	134,3	27,8	149,1	28,7
1902	132,7	26,3	149,4	29,0
1903	126,5	26,8	149,8	29,0
1904	128,2	26,4	150,0	29,1
1905	126,0	25,6	150,5	29,4
	Allgemeiner Durchschnitt		143,2	27,5

c) Das *Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen* in den verschiedenen Altersklassen ist von Lexis[1]) an Beobachtungen über die Bevölkerung Belgiens in dem Zeitraume 1841—1860 untersucht worden. Es ergab sich, daß diesem Verhältnis in den ersten Altersjahren eine typische Wahrscheinlichkeit mit fast normaler Dispersion zugrunde liegt und daß diese Wahrscheinlichkeit, der Verstorbene sei männlichen Ge-

[1]) Über die Theorie der Stabil. d. statist. Reihen, p. 84—92.

schlechtes, mit dem Alter abnimmt. Später, und namentlich in den höheren Altersklassen (30 bis 75), wird die Dispersion ausgesprochen übernormal, ein Zeichen dafür, daß hier energisch wirkende und stark wechselnde *äußere* Ursachen vorhanden sind, die spezifisch auf die Sterblichkeit des einen und des andern Geschlechtes Einfluß nehmen. In den höchsten Altern findet wieder ein Ausgleich statt und eine fast gleichmäßige Stellung beider Geschlechter zu den Todesursachen; der organische Unterschied in der Lebensfähigkeit der beiden Geschlechter, der vordem so erheblich war, tritt fast völlig zurück.

In jüngster Zeit sind diese Untersuchungen an vollkommenerem und ausgedehnterem statistischem Material von W. Kammann[1]) von neuem ausgeführt und auch auf das *Geschlechtsverhältnis der Überlebenden* in den Kinderjahren erstreckt worden. Dadurch ist auch ein Einblick gewonnen worden in die Art und Weise, wie das ursprüngliche Übergewicht des männlichen Geschlechtes über das weibliche nach und nach aufgehoben wird, so daß schon sehr früh nahezu völliges Gleichgewicht der Geschlechter sich einstellt.

Die Beobachtungen, welche Kammann verwendet, beziehen sich auf Holland (1870—1873, 1880—1894) und auf Preußen (1867—1894); durch Zerlegung des preußischen Materials nach Provinzen sind Beobachtungsreihen verschiedenen Umfanges hergestellt worden, um auch den Einfluß dieses Faktors auf die Ergebnisse zu prüfen.

Zunächst konnte, in Übereinstimmung mit den vorerwähnten Resultaten von Lexis, festgestellt werden, daß die Gestorbenen der ersten Lebensjahre in bezug auf das Geschlechtsverhältnis in guter Annäherung maximale Stabilität aufweisen, wenn auch nicht in dem hohen Grade wie die Geborenen. Die Quotienten $\frac{m}{s}$, welche das Verhältnis der Sterbefälle von Knaben zur Anzahl aller Sterbefälle der betreffenden Altersstufe ausdrücken, können also als empirische Bestimmungen einer nur mäßig schwankenden Wahrscheinlichkeit p für einen männlichen Todesfall angesehen werden. Die folgende Tabelle gibt eine Probe, wie sich das Geschlechtsverhältnis der zwischen 0 und 2 Jahren Gestorbenen gestaltet. Dabei bedeutet z die Anzahl der Beobachtungsreihen, die für das betreffende Gebiet zu Gebote standen, p_0 den aus ihrer Gesamtheit abgeleiteten Wert von p, s_0 die mittlere Anzahl der beobachteten Sterbefälle, Q den Divergenzkoeffizienten.

Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen zwischen 0 und 2 Jahren.

Gebiet	z	p_0	s_0	Q
Holland	24	0,550	41 289	1,50
Königreich Preußen	21	0,546	315 359	2,08

[1]) Das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden in den Kinderjahren als selbständige massenphysiologische Konstante etc. Göttingen 1900.

Gebiet	z	p_0	s_0	Q
Provinz Preußen	21	0,542	43 699	1,46
„ Brandenburg	21	0,543	45 882	1,10
„ Schlesien	21	0,547	57 384	1,41
„ Rheinland	21	0,547	44 652	1,49
„ Pommern	21	0,543	11 872	1,20
„ Posen	21	0,546	22 862	1,06
„ Sachsen	21	0,547	28 286	1,14
„ Hannover	21	0,551	16 415	0,95
„ Westfalen	21	0,447	20 074	1,34

Die Reihe der Q bestätigt das Ergebnis der Theorie, daß bei dem Vorhandensein einer auch noch so geringen physischen Schwankung der Divergenzkoeffizient mit der Grundzahl wächst; denn die sechs größten Gebiete geben 1,51, die fünf übrigen Gebiete 1,14 als Mittelwert der Q.

Die selbständige Untersuchung des Geschlechtsverhältnisses der Überlebenden, nachdem das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und jenes der Gestorbenen bereits untersucht ist, erweist sich aus folgenden Gründen als ein neues, für sich bestehendes Problem.

Es sei

m die Anzahl der geborenen Knaben,
s die Anzahl der Geborenen überhaupt;

ferner für die Altersstufe $(0, x)$:

m_1 die Anzahl der gestorbenen Knaben,
s_1 die Anzahl des Gestorbenen überhaupt;

endlich, im Alter x:

m_2 die Anzahl der überlebenden Knaben,
s_2 die Anzahl der Überlebenden überhaupt;

dann bestehen die Relationen

$$m_2 = m - m_1$$
$$s_2 = s - s_1,$$

und es drückt sich das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden durch den Bruch

$$\frac{m_2}{s_2} = \frac{m - m_1}{s - s_1} = \frac{\frac{m}{s} - \frac{s_1}{s}\frac{m_1}{s_1}}{1 - \frac{s_1}{s}}$$

aus, hängt also ab von dem Geschlechtsverhältnis $\frac{m}{s}$ der Geborenen das maximale Stabilität besitzt, von dem Geschlechtsverhältnis $\frac{m_1}{s_1}$

der Gestorbenen, welchem nach den eben angeführten Daten nur angenähert maximale Stabilität zukommt, schließlich aber auch noch von dem allgemeinen Sterblichkeitsverhältnis $\frac{s_1}{s}$ auf der Altersstufe $(0, x)$, das, wie später gezeigt werden wird, von der normalen Dispersion sich weit entfernt; es kann daher aus der obigen Beziehung ein Schluß auf die Stabilität von $\frac{m_2}{s_2}$ nicht gezogen werden.

Die direkte Untersuchung dieses Verhältnisses hat nun gezeigt, daß ihm in den ersten und mittleren Kinderjahren und bei den der Beobachtung unterzogenen Bevölkerungen nahezu vollkommene Stabilität zukommt, daß es also neben dem Geschlechtsverhältnis der Geborenen eine massenphysiologische Konstante deutlich ausgesprochener Art bildet. Die Größe des Verhältnisses läßt erkennen, daß die erhebliche Übersterblichkeit der Knaben gegenüber den Mädchen in den ersten Lebensperioden, wie sie aus der vorangegangenen Tabelle zu ersehen ist, sehr rasch das Gleichgewicht beider Geschlechter herbeiführt.

In der nachstehenden Tabelle bedeutet x das Alter der Überlebenden, z die Anzahl der für das nebenstehende Alter gebildeten Beobachtungsreihen, p_0 den aus allen abgeleiteten Wert des Geschlechtsverhältnisses, s_0 die mittlere Grundzahl, Q den Divergenzkoeffizienten.

Geschlechtsverhältnis der Überlebenden.

Königreich Preußen					Königreich Holland				
x	z	p_0	s_0	Q	x	z	p_0	s_0	Q
1	21	0,503	846 342	0,99	1	25	0,503	117 457	1,11
2	21	0,503	785 978	1,04	2	24	0,503	110 271	1,06
3	21	0,503	753 158	1,07	3	23	0,503	106 884	1,09
4	20	0,503	733 928	0,97	4	22	0,502	104 795	1,12
5	19	0,503	717 830	1,28	5	21	0,503	102 967	1,12
6	18	0,503	706 283	1,03	6	20	0,502	101 660	1,16
					7	19	0,502	100 475	1,13
					8	18	0,502	99 479	1,10
					9	17	0,501	98 412	1,03
					10	16	0,501	97 347	1,06

d) Die Untersuchung der *Sterblichkeitsverhältnisse* auf den verschiedenen Altersstufen ist ein Problem, dem neben einem hervorragenden biologischen Interesse auch eine große praktische Bedeutung für das Versicherungswesen zukommt. Durch solche Untersuchungen soll entschieden werden, wie weit die Quotienten, die man unter dem Namen der Sterbenswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Altersjahren anführt und gebraucht, den Charakter von Wahrscheinlichkeiten besitzen und demgemäß nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt werden dürfen.

Über diesen Gegenstand liegen gegenwärtig erst wenige Arbeiten vor.

Auf Grund *bevölkerungsstatistischer* Erhebungen wurde die Sterblichkeit der allgemeinen männlichen Bevölkerung der Niederlande auf ihre Stabilität durch J. H. Peek[1]) untersucht. Unter Leitung van Peschs ist hier für jedes der zehn Beobachtungsjahre 1880—1889 für jede einjährige Altersklasse der Sterblichkeitsquotient (Anzahl der in der Altersklasse Gestorbenen durch die Anzahl derjenigen, welche ihre untere Grenze lebend überschritten haben) berechnet worden; dadurch war die Möglichkeit geboten, die Dispersion der zehn für jede Altersklasse gewonnenen Quotienten zu prüfen; zu ihrer Charakterisierung wurde aus den auf die beiden Arten bestimmten mittleren Fehlern

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \qquad \mu' = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{s_0}}$$

der Divergenzkoeffizient $Q = \frac{\mu''}{\mu'}$ gebildet. Dabei bedeutet p_0 das Mittel aus den zehn Einzelwerten, s_0 die durchschnittliche Zahl der Lebenden am Beginne der Altersklasse, $\lambda_i = -\frac{m_i}{s_i} + p_0$ die Abweichung des Einzelwertes vom Mittel.

Das Ergebnis, in allemeinen Zügen dargestellt, war folgendes. In den ersten neun Lebensjahren ist die Dispersion übernormal mit von Jahr zu Jahr abnehmender Amplitude, die Sterblichkeit also mit den äußeren Umständen schwankend. Vom 10. Lebensjahre an oszilliert Q in nicht weiten Grenzen um die Einheit, ist 55 mal *über*, 26 mal *unter* 1; das Mittel der Einzelwerte von Q ist

für	die	Alter	10—47 . . .	1,163
„	„	„	48—90 . . .	1,127
„	„	„	10—90 . . .	1,144.

Man kann also sagen, daß mit Ausschluß der ersten und mittleren Kinderjahre die Sterblichkeitsquotienten eine nur wenig von der normalen abweichende (schwach übernormale) Dispersion aufweisen und daher, wenn es sich nicht um lange Zeiträume handelt, ganz wohl als Wahrscheinlichkeiten angesehen und behandelt werden dürfen. Auch die Verteilung der Einzelwerte um den jeweiligen Mittelwert spricht dafür; bezeichnet r die wahrscheinliche Abweichung, so zeigte sich bezüglich der $10 \cdot 91 = 910$ Einzelwerte von λ das folgende:

1) Das Problem des Risiko in der Lebensversicherung. Zeitschr. f. Versicherungsrecht und -Wissensch. V, 1899, p. 169—197.

Abweichung λ	Theoretische Anzahl	Beobachtete Anzahl
von 0 bis $\frac{r}{2}$	241	224
„ $\frac{r}{2}$ „ r	215	208
„ r „ $\frac{3r}{2}$	172	189
„ $\frac{3r}{2}$ „ $2r$	121	137
„ $2r$ „ $\frac{5r}{2}$	80	93
über $\frac{5r}{2}$	81	59
	910	910

Normale Dispersion in sehr guter Annäherung wurde von demselben Autor auch an den Sterblichkeitsquotienten nachgewiesen, die aus der Statistik der niederländischen Beamten (1878—1894) zur Konstruktion der ersten Beamtensterbetafel für die Niederlande abgeleitet worden sind. Hier handelt es sich also um eine Gesellschaft, die vermöge der Homogenität, die sie in manchen Beziehungen aufweist, dem Bestande einer Versicherungsanstalt nahe kommt. Bei Trennung der Beobachtungsjahre und Bildung von Altersgruppen ergaben sich 192 Einzelwerte und der Mittelwert der berechneten Divergenzkoeffizienten betrug 0,99.

Aus Beobachtungen an *Versicherten* wurde die normale Dispersion, also die maximale Stabilität der Sterblichkeitsquotienten, an zwei speziellen Fällen (Gotha 1869—1880, Leipzig 1880—1894) von G. Bohlmann[1]) dargetan. Für die fünfjährigen Altersklassen von 26 bis 90 ergaben sich die Divergenzkoeffizienten

0,8, 0,8, 1,3, 0,9, 0,9 0,8, 1,2, 1,0, 1,0, 1,1, 1,2, 1,1, 1,1

aus den Gothaer Beobachtungen, und für die fünfjährigen Altersklassen von $21\frac{1}{2}$ bis $80\frac{1}{2}$ die Divergenzkoeffizienten

0,9, 1,0, 1,8, 1,5, 1,1, 0,8, 1,2, 1,1, 0,9, 0,9, 1,0, 1,1

aus den Leipziger Beobachtungen.

e) Zu einer Untersuchung der *Sterblichkeit unter Versicherten* auf ihre Stabilität ergibt sich in anderer Weise Gelegenheit dort, wo außer dem Alter auch die abgelaufene Versicherungsdauer in Betracht gezogen wird. Man erhält dann für eine und dieselbe Altersstufe so viele Sterblichkeitsquotienten, als man Versicherungsdauern unterschieden hat. Dabei darf als durch die Erfahrung erwiesen hingestellt

1) Über angewandte Mathematik usw., Leipzig 1900, p. 142.

werden, daß hier außer zufälligen Schwankungen auch systematische auftreten, und zwar in dem bestimmten Sinne, daß in den ersten Versicherungsjahren der Sterblichkeitsquotient beträchtlich unter dem allgemeinen Durchschnitt liegt, während er sich nach Ablauf einer gewissen Versicherungsdauer t unter zufälligen Schwankungen im allgemeinen in gleicher Höhe über dem allgemeinen Durchschnitt hält. Darauf wird bei der folgenden Untersuchung Rücksicht zu nehmen sein; die beiden vorgeführten Fälle sind nach verschiedenen Methoden rechnerisch behandelt, um auch nach dieser Richtung eine Richtschnur zu bieten.

Die folgenden Erfahrungen sind der österreichischen Sterblichkeitsmessung entnommen und beziehen sich auf 50jährige Männer, die auf den Todesfall versichert waren. In der Kolonne E stehen die Anzahlen derjenigen, welche nach Ablauf der in der ersten Kolonne verzeichneten Versicherungsdauer das Alter 50 durchschritten haben, in der Kolonne θ die Anzahlen derjenigen von ihnen, die vor Erreichung des Alters 51 mit Tod abgegangen sind. Daraus sind die Sterblichkeitsquotienten p gebildet, dann ihre Abweichungen λ von dem allgemeinen Durchschnitt $p_0 = \frac{697}{34665} = 0{,}02011$, ferner die Produkte $E\lambda\lambda$; auf dieses Material gründet sich die Auswertung der Formeln (6*), (7*) von Nr. 202, indem

$$\mu'' = \sqrt{\frac{[E\lambda\lambda]}{z-1}} = \sqrt{\frac{0{,}181154051}{16}} = 0{,}10641$$

$$\mu' = \sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{0{,}02011 \cdot 0{,}97989} = 0{,}14037,$$

woraus sich der Divergenzkoeffizient

$$Q = 0{,}758$$

berechnet. Ausdrücklich sei hervorgehoben, daß erst die Erfahrungen nach Ablauf von 10 Versicherungsjahren, also vom 11. angefangen, verwertet worden sind.

z	E	θ	p	λ	$E\lambda\lambda$
10	3433	71	0,02067	— 0,00056	0,001 077 962
11	3273	65	1986	+ 25	206 199
12	3268	74	2263	— 252	20 851 800
13	3087	66	2137	— 126	4 902 156
14	3076	52	1690	+ 321	41 695 104
15	2982	66	2213	— 202	12 166 560
16	2558	58	2267	— 256	16 765 132
17	2482	48	1934	+ 77	1 471 826
18	2228	43	1929	+ 82	1 497 216
19	1923	39	2028	— 17	55 767
20	1739	37	2128	— 117	2 651 753

z	E	θ	p	λ	Eλλ
21	1448	23	1588	+ 423	25909064
22	1049	14	1334	+ 677	48078817
23	848	17	2004	+ 7	4240
24	626	12	1916	+ 95	565278
25	402	8	1990	+ 21	17688
26	243	4	1646	+ 365	3237489
	34665	697			0,181154051

Gleichfalls der österreichischen Sterblichkeitsmessung sind die nachstehenden Erfahrungen über männliche Personen des Alters 47 entnommen, die eine gemischte Versicherung abgeschlossen haben. Die ersten vier Kolonnen sind ebenso angeordnet wie vorhin, die Bestimmung von $[E\lambda\lambda]$ erfolgte aber nach der am Schlusse von Nr. 150 angeführten Formel, die hier lautet:

$$[E\lambda\lambda] = [\theta p] - \frac{[\theta]^2}{[E]};$$

darum sind in der letzten Kolonne die Produkte θp angefügt. Man berechnet auf Grund der Tabelle:

$$p_0 = \frac{247}{19041} = 0{,}01297, \quad [E\lambda\lambda] = 3{,}47225 - 3{,}20408 = 0{,}26817,$$

$$\mu'' = \sqrt{\frac{0{,}26817}{14}} = 0{,}1384, \quad \mu' = \sqrt{0{,}01297 \cdot 0{,}98703} = 0{,}1131,$$

$$Q = 1{,}224.$$

z	E	θ	p	θp
6	2027	25	0,01234	0,30850
7	1941	25	1288	32200
8	1994	28	1404	39312
9	1904	38	1996	75848
10	1837	12	653	7836
11	1761	21	1193	25053
12	1645	17	1033	17561
13	1435	20	1394	27880
14	1252	22	1757	38654
15	976	7	717	5019
16	801	12	1498	17976
17	647	11	1701	18711
18	411	5	1217	6085
19	263	2	760	1520
20	147	2	1360	2720
	19041	247		3,47225

Bei dieser Rechnung sind die Erfahrungen vom 7. Versicherungsjahr aufwärts benutzt; fügt man die Ergebnisse der ersten 6 Versicherungsjahre hinzu, welche lauten:

z	E	θ	p	θp
0	1832	12	0,00655	0,07860
1	1725	19	1101	20919
2	1960	30	1531	45930
3	1784	21	1177	24717
4	1932	23	1190	27370
5	1957	33	1686	55738
	11190	138		1,82534

so ist aus den oben angeführten Gründen auf eine Vergrößerung des Divergenzkoeffizienten zu schließen; in der Tat ergibt die Rechnung jetzt:

$$p_0 = 0{,}01273, \qquad \mu'' = 0{,}1406, \qquad \mu' = 0{,}1121,$$
$$Q = 1{,}254.$$

f) In den Beilagen zum Gesetzentwurfe für die Sozialversicherung in Österreich sind die Hauptergebnisse der Unfallstatistik enthalten, denen die nachstehende Zahlenreihe, betreffend die auf 100000 Vollarbeiter entfallenden *tötlichen Unfälle* in den aufeinanderfolgenden Verwaltungsjahren, entnommen ist. Dieselben Zahlen sind dann nochmals der Größe nach geordnet angeführt und es sind zu der ersten Anordnung die Abweichungen vom allgemeinen Durchschnitt, d. i. 67, und deren Quadrate angegeben. Man hat hier

$$p_0 = 0{,}00067$$
$$\mu'' = \sqrt{\frac{0{,}00000002}{16}} = 0{,}0000353, \quad \mu'' = \sqrt{\frac{0{,}00067 \cdot 0{,}99933}{100000}} = 0{,}0000818,$$
$$Q = 0{,}431.$$

Die ausgesprochen unternormale Dispersion dürfte aus dem Umstande zu erklären sein, daß die tötlichen Unfälle häufig kummulativ sich ereignen.

Jahr	pro 100000	n. d. Größe geordnet	λ	$\lambda\lambda$
1890	67	60	0	0
91	66	61	+ 1	1
92	64	64	+ 3	9
93	69	64	— 2	4
94	68	64	— 1	1
95	68	66	— 1	1
96	72	67	— 5	25
97	70	67	— 3	9
98	70	68	— 3	9
99	73	68	— 6	36
1900	68	68	— 1	1
01	67	68	0	0
02	61	69	+ 6	36

Jahr	pro 100000	n. d. Größe geordnet	λ	$\lambda\lambda$
1903	60	70	+ 7	49
04	64	70	+ 3	9
05	68	72	— 1	1
06	64	73	+ 3	9
	1139			200

Der aus μ'' gerechnete wahrscheinliche Fehler $r = 0{,}000023$ führt dazu, daß die wahrscheinlichen Grenzen 64,7 und 69,3 sind: zwischen ihnen liegen 8 von den 17 Gliedern, was zu dem typischen Charakter der Reihe gut stimmt.[1])

207. Extensive statistische Größen. Zur Beschreibung von Massenerscheinungen werden außer den bisher betrachteten Relativzahlen, die als *intensive* statistische Größen bezeichnet werden können, weil sie die Intensität des Auftretens, die Häufigkeit eines Zustandes oder einer Zustandsänderung kennzeichnen, auch *extensive* Größen herangezogen, die durch benannte Zahlen zum Ausdruck kommen.

Eine solche Größe tritt nun an den Elementen der Masse, insbesondere also an den Individuen einer Menschenmasse, mit verschiedenen Werten auf, und es können bezüglich der Verteilung dieser Werte, bezüglich der Häufigkeit ihres Auftretens alle die Fragen gestellt werden, die im dritten Teil, in der Kollektivmaßlehre, erörtert worden sind, wo der Gegenstand in seiner vollen Allgemeinheit sowohl was die Natur der Objekte, die die Masse bilden, als auch was die Art der Verteilung betrifft, zur Behandlung kam. Hier wendet sich unser Interesse hauptsächlich menschlichen Massenerscheinungen und einer speziellen Frage zu.

Es ist nämlich üblich, eine Masse in bezug auf eine extensive Eigenschaft ihrer Individuen durch einen einzigen Wert zu kennzeichnen, nämlich durch einen *Mittelwert*. Trotz der Mängel, die einem solchen Verfahren im allgemeinen anhaften und auf die bereits in Nr. 196 hingewiesen worden ist, hat sich diese Art der Kennzeichnung in der Statistik doch eingebürgert; es gibt indes Fälle, wo sie in der Tat Berechtigung hat. Dazu kommt die vielfach vorhandene praktische Bedeutung.

1) Weitere Beispiele der Untersuchung statistischer Verhältniszahlen auf ihre Stabilität findet man in E. Blaschkes Vorles. über mathem. Statistik, Leipzig 1906, § 35d) und e). — Als Beispiele erheblicher übernormaler Dispersion, die wohl die Regel bilden wird, führt A. Tschuprow in Schmollers Jahrb. d. Gesetzgeb. 26 (1905), p. 11—70, die Geschlechtsgliederung der Gestorbenen in den höheren Altern an, bei der sich nach seiner Angabe der Divergenzkoeffizient in der Altersstrecke 50—75 beständig über 4 hält, was also auf ein sehr verschiedenes Verhalten der beiden Geschlechter gegenüber den Todesursachen schließen läßt; dann die relative Selbstmordhäufigkeit, bei der Q gegen 5 betragen soll.

Von den Mittelwerten kommen fast ausschließlich die drei in Nr. 196 besprochenen: das arithmetische Mittel, der Zentralwert, der dichteste Wert, und unter ihnen der erste am häufigsten zur Anwendung. Ist die Verteilung der Einzelwerte durch eine analytische Funktion nach den Methoden der Kollektivmaßlehre oder auf eine der in Nr. 197—199 entwickelten Arten dargestellt, so ist die Bestimmung der Mittelwerte eine rein analytische Aufgabe. Von diesem Fall wird hier abgesehen.

Unter den Mittelwerten hat sich das wissenschaftliche Interesse insbesondere einem solchen zugewandt, der zu den Einzelwerten dieselbe Stellung einnimmt wie das arithmetische Mittel einer Reihe gleich genauer Beobachtungen einer Größe zu diesen, mit anderen Worten: einem Mittelwert von solcher Art, daß die auf ihn bezogenen Abweichungen der Einzelwerte das Gaußsche Gesetz befolgen. Mit demselben Recht, mit dem man Verhältniszahlen, die eine solche Verteilung aufweisen, als *zufällig* gestörte Werte einer *Grundwahrscheinlichkeit* ansieht, kann man die Einzelwerte einer extensiven Größe, denen ein derartiger Mittelwert zukommt, als *zufällig* gestörte Spezialisierungen eines *Grundwertes* der betreffenden Größe auffassen; zur Kennzeichnung ihrer Verteilung genügt dann ein einziger Parameter, das *Präzisionsmaß.*

Wegen der Symmetrie der Verteilung kommen einem Mittelwert der betrachteten Art die Eigenschaften des arithmetischen Mittels, des Zentralwerts und des dichtesten Werts zugleich zu; Lexis[1]) hat ihm den Namen eines *typischen Mittels* gegeben.

Quetelet, der die Existenz typischer Mittel auf dem Gebiete der Statistik a priori annahm, ist es gelungen, sie wenigstens in stark angenähertem Maße auf anthropometrischem Gebiete nachzuweisen (s. Nr. 178, 187).

Für uns haben solche Fälle besondere Bedeutung, wo die extensive Größe einen Zeitraum bedeutet, der die Dauer eines Zustandes oder den Zeitabstand zweier Zustandsänderungen mißt; dem Mittelwert kommt dann biologische, soziologische, häufig selbst wirtschaftliche Bedeutung zu. Die Vergleichung gleichartiger Mittelwerte kann auch zum Substrat der Kausalforschung werden, insofern nämlich erheblich verschiedene Mittelwerte einer und derselben Größe auf Unterschiede in der Verursachung hinweisen.

Als Beispiele extensiver Größen der letztbesprochenen Art seien angeführt: die menschliche Lebensdauer; die Alter der Individuen einer in einem bestimmten Zeitpunkte erfaßten Masse; das Alter der in den Ehestand tretenden männlichen und weiblichen Individuen einer bestimmten Herkunft; die Ehedauer beider Geschlechter; der Zeitraum

---

1) Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 28.

zwischen Verwitwung und Wiederverheiratung; der Zeitraum zwischen Verheiratung und erster Entbindung, zwischen erster und zweiter, zweiter und dritter, ··· Entbindung bei Frauen eines bestimmten Heiratsalters; die Alter der Kinder bei bestimmten Alterskombinationen der Eltern; die Dauer der Aktivität bei Personen einer bestimmten Be rufskategorie; die Dauer der Invalidität bei Personen eines bestimmten Invalidisierungsalters; die jährliche Krankheitsdauer auf den verschiedenen Altersstufen usw.

Das Auftreten eines typischen Mittels in Fällen der aufgezählten und ähnlichen Arten wird zu den größten Seltenheiten gehören und dann den Gegenstand besonderen Interesses bilden.

Die Beschaffung des Materials für derartige Untersuchungen bietet große Schwierigkeiten dar und die Art seiner Gewinnung hat auf die Bedeutung des abgeleiteten Mittelwertes maßgebenden Einfluß; sie kann mitunter einen klaren Sinn desselben ganz in Frage stellen.

Betrachten wir, um diese Bemerkung näher zu beleuchten, die menschliche Lebensdauer. Hat man von einer selbst sehr großen Anzahl von Personen beliebiger Geburtszeit und Herkunft die Lebensdauer aufgezeichnet und aus den Einzelwerten das arithmetische Mittel gezogen, so stellt dieses die durchschnittliche oder mittlere Lebensdauer eben dieses Personenkreises dar und entbehrt einer klar zu umschreibenden Bedeutung. Registriert man die Lebensdauern der in einer geschlossenen Bevölkerung während eines bestimmten Kalenderjahres verstorbenen Personen und bildet daraus das arithmetische Mittel, so hat man das mittlere Sterbealter der betreffenden Personengemeinschaft bestimmt, bei dessen Beurteilung man nicht übersehen darf, daß sich die Geburtszeiten der Personen rund über ein Jahrhundert erstrecken. Stellte man sich die Aufgabe, die mittlere Lebensdauer der Personen zu bestimmen, die der Geburt nach aus einem bestimmten Kalenderjahre stammen, so würde dies die Beobachtung dieser Generation bis zu ihrem völligen Aussterben, also rund durch ein Jahrhundert, erfordern; erst dann könnte der Mittelwert gebildet werden und es käme ihm nur mehr historische Bedeutung zu. Man sieht indes, daß die Aufgabe in dieser Form undurchführbar ist. Ein anderer Weg, der sich eröffnet, besteht darin, durch gleichzeitige Beobachtung aller Altersklassen, einer Bevölkerung etwa, für jedes Altersjahr den Sterblichkeitsquotienten zu bestimmen und aus der so ermittelten relativen Verteilung der Sterbefälle nach dem Alter das mittlere Sterbealter zu bestimmen; die Bedeutung der mittleren Lebensdauer zur Zeit der Beobachtung kommt der gefundenen Zahl aber nur unter der Voraussetzung zu, daß die ermittelten Sterblichkeitsquotienten auch dem *künftigen* Verlauf entsprechen.

Aus dieser Auseinandersetzung mag ersehen werden, mit welcher Vorsicht Angaben über die mittlere Lebensdauer aufzunehmen sind;

ohne Kennzeichnung des Weges ihrer Gewinnung lassen sie eine Beurteilung nicht zu.

Noch komplizierter gestalten sich die Verhältnisse bei vielen der andern oben angeführten Beispiele.

208. Feststellung eines typischen Mittels. Bei der Entscheidung der Frage, ob man anzunehmen berechtigt sei, daß einer extensiven Größe, die an den Individuen einer großen menschlichen Masse beobachtet worden ist, ein typischer Wert zugrunde liege, von welchem die Einzelwerte nur infolge zufälliger Störungen abweichen, kommt es darauf an, in welcher Form das Beobachtungsmaterial gegeben ist.

Die eine Form besteht darin, daß man die Reihe der Einzelwerte selbst kennt, die andere, daß man eine Verteilungstafel (Nr. 177) derselben besitzt, wobei der normale Fall gleicher Intervalle vorausgesetzt werden soll.

Wir beginnen mit dem detaillierteren Modus und nehmen an, $a_1, a_2, \cdots a_n$ seien die n Einzelwerte der unbekannten Größe X. Da ein typisches Mittel arithmetisches Mittel Zentralwert und dichtester Wert zugleich ist, so wird man von diesen drei Hauptwerten jenen wählen, der die einfachste Bestimmung zuläßt; dies ist das arithmetische Mittel

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{1}$$

Die Frage, ob x mit zureichender Sicherheit als ein typisches Mittel betrachtet werden dürfe, kommt darauf zurück, ob sich $a_1, a_2, \cdots a_n$ als gleich genaue, nur von zufälligen Fehlern beeinflußte Beobachtungen einer festen Größe auffassen lassen. Um dies zu entscheiden, bilde man die Reihe der Abweichungen

$$\lambda_i = -a_i + x \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

und wenn diese die Forderung der symmetrischen Anordnung um Null in zureichendem Maße erfüllen, dann kommt es zur Prüfung des Umstandes, ob sie sich dem Gaußschen Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \lambda^2}$$

genügend anschmiegen; die *Präzision* h wäre dabei aus der Formel

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\lambda\lambda]}} \tag{3}$$

zu berechnen.[1]) Man hat nun für verschiedene Intervalle $(-\theta, \theta)$ zu

1) Diese Präzision mit Bezug auf den wahren Wert X wäre $h_1 = \sqrt{\frac{n-1}{2[\lambda\lambda]}}$; in Ermangelung der Kenntnis desselben und der wahren Abweichungen $\varepsilon_i = -a_i + X$ wird die Untersuchung an der Reihe der λ vorgenommen und dieser kommt nach Nr. 148 die Präzision $h = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, h_1 = \sqrt{\frac{n}{2[\lambda\lambda]}}$ zu.

untersuchen, ob die Anzahl der darin enthaltenen λ mit der wahrscheinlichsten Zahl

$$n\Phi(\gamma) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt \tag{4}$$

übereinstimmt; darin ist $\gamma = h\theta$. Auf volle Übereinstimmung ist dabei nicht zu rechnen; das Gesamtbild, das die für eine Anzahl von Intervallen abgeleiteten Resultate darbieten, muß darüber Aufschluß geben, ob man von einer zureichenden Anpassung an das Gesetz sprechen kann.

Eine Probe kann auch darin bestehen, daß man aus der Reihe der a_i neben dem arithmetischen Mittel auch den Zentralwert ableitet. Zu diesem Zwecke sind die a_i in steigender Folge zu ordnen, wobei gleiche a_i so oft gesetzt werden müssen, als ihrem wiederholten Auftreten entspricht; das mittelste a_i (bei ungerader Anzahl) oder ein Zwischenwert, etwa das Mittel, der beiden mittelsten (bei gerader Anzahl) gibt eine Bestimmung des Zentralwertes. Dieser darf sich nun über gewisse, durch die Natur der Sache bedingte Grenzen von dem arithmetischen Mittel nicht unterscheiden, soll von der Existenz eines typischen Mittels die Rede sein dürfen.

Anders gestaltet sich die Untersuchung, wenn bloß eine nach Intervallen geordnete Tabelle von Zahlen gegeben ist, die angeben, wie vielmal der beobachtete Wert von X in jedes einzelne Intervall zu liegen kam. Es sei

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1} \tag{5}$$

diese Reihe von Zahlen, wobei α_0 die Einzelwerte zählt, die zwischen a_0 und $a_0 + \delta = a_1$; α_1 die Einzelwerte, die zwischen a_1 und $a_1 + \delta = a_2$, $\cdots$; α_{n-1} die Einzelwerte, die zwischen a_{n-1} und $a_{n-1} + \delta = a_n$ gefallen sind. Das Intervall (a_0, a_1) enthält somit den kleinsten, jenes (a_{n-1}, a_n) den größten zur Wahrnehmung gelangten Wert von X; δ ist die Intervallgröße.

In dem Intervall, welchem das größte α entspricht, und wir nehmen an, daß nur *ein* solches existiere, ist der dichteste Wert zu suchen, der zugleich eine Bestimmung von X liefert. Seine Lage in dem Intervall näher zu bestimmen, ist Aufgabe einer Interpolation, auf die hier nicht eingegangen werden soll.[1] Es sei also α_g die größte der Zahlen (5) und $a_g + \vartheta\delta$ der dichteste Wert $(0 < \vartheta < 1)$; auch sei α_g bereits in die beiden Teile α_g', α_g'' aufgeteilt, von denen der erste dem Intervallteil $(a_g, a_g + \vartheta\delta)$, der zweite dem Intervallteil $(a_g + \vartheta\delta, a_{g+1})$ angehört.

Bildet man nun (für ein $i < g$) die Summen

1) Nr. 209.

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{g-1} + \alpha_g' = \sigma,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \quad + \cdots + \alpha_{g-1} + \alpha_g' = \Sigma,$$

so ist $\frac{\sigma}{\Sigma} = P$ ein empirischer Wert für die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung λ zwischen $-(a_g + \vartheta\delta - a_i) = -\theta$ und $+\theta$ falle; dem zugrunde gelegten Gesetze zufolge ist diese Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\theta} e^{-t^2} dt; \tag{6}$$

aus dieser Gleichung, in der P und θ bekannt sind, bestimmt man mit Hilfe der Tafel I, Bd. I, die Präzision h.

Eine Probe auf die Gültigkeit jenes Gesetzes würde darin bestehen, daß man die Präzision auf mehrfache Art, diesseits und jenseits des dichtesten Wertes bestimmt; genügende Übereinstimmung der erhaltenen Werte spricht für die Gültigkeit. Eine andere Prüfungsmethode besteht darin, daß man mit Benutzung des aus (6) gefundenen h die wirkliche Verteilung der λ mit der erwartungsmäßigen vergleicht, wie dies vorhin geschah; nur muß man sich jetzt an die Intervallgrenzen halten.

209. Beispiel LXX. Lexis[1]) ist durch nähere Betrachtung der Sterblichkeitsverhältnisse und durch die Wahrnehmung, daß die Sterbetafeln allgemein in der Nähe des 70. Lebensjahres eine relative Häufung der Sterbefälle ausweisen, zu der Frage geführt worden, ob der so auftretende *dichteste Wert der Lebensdauer* wenigstens mit gewissen Einschränkungen die Merkmale eines typischen Mittels aufweise. Zur strengen Beantwortung dieser Frage wäre eine kontinuierliche Beobachtung der Individuen einer zahlreichen Generation (etwa der Geborenen eines Landes aus einem Kalenderjahre) bis zu ihrem Aussterben erforderlich; so weit Sterbetafeln eine angenäherte Lösung zulassen, hat Lexis gefunden, daß tatsächlich zu beiden Seiten des dichtesten Wertes, und zwar nach der Seite der niedrigeren Sterbealter nur bis zu einer gewissen Grenze, nach der Seite der höheren Alter aber bis zu dem höchsten Alter hin die Merkmale des typischen Mittels in ziemlieh dentlicher Weise vorhanden sind. Dies führte ihn zu den Begriffen der „normalen Lebensdauer“ und des „normalen oder typischen Sterbens“, welch letzteres nach der Seite der niedrigen Alter allerdings recht bald durch ein „vorzeitiges Sterben“ verwischt wird.

Nachstehend sollen diese Verhältnisse an drei verschiedenen Materialien geprüft werden, und zwar an der Darstellung der Sterblichkeit unter der Bevölkerung des Deutschen Reichs durch die „Deutsche

1) Zur Theorie der Massenerscheinungen, p. 42—64; Abhandlungen zur Theorie der Bevölk.- u. Moralstatistik, p. 111—119.

Sterbetafel"[1]), dann an der neuen Bankliste der Gothaer Bank[2]), endlich an einem der Ergebnisse der jüngsten englischen Sterblichkeitsmessung unter Versicherten.[3]) Damit ist zugleich ein Beispiel der Untersuchung auf einen typischen Mittelwert auf Grund einer Verteilungstafel gegeben.

a) Die Zahlen der Gestorbenen, hervorgegangen aus 100000 Geborenen, wie sie die deutsche Sterbetafel bei den hier maßgebenden Altern anführt, sind die folgenden:

Alter	Anzahl der Sterbefälle	
	Männlich	Weiblich
66	1396	1581
67	1417	1568
68	1431	1597
69	1439	1620
70	1440	1636
71	1430	1648
72	1412	1657
73	1383	1653
74	1342	1630
75	1289	1587

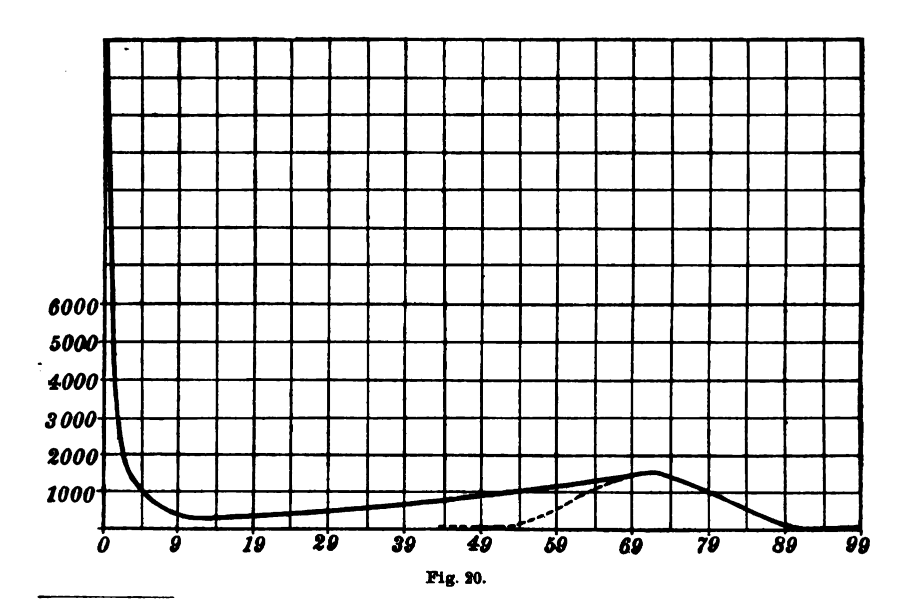


Fig. 20.

1) Monatshefte zur Statistik d. Deutschen Reiches. 1887. — Man vergleiche Nr. 225 und Tafel IV am Ende des Buches.

2) J. Karup, Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank. Jena 1903, II. Bd., p. 66.

3) Combined experience of assured lives (1863—1893). 4 Bde., London.

Die Fig. 20 stellt den Verlauf der Sterbefälle unter der männlichen Bevölkerung dar — mit Ausschluß des Säuglingsalters — und enthält auch eine Andeutung der Normalkurve, die nach der Auffassung von Lexis einen Teil der Häufigkeitskurve bildet.

Hieraus folgt, daß ein dichtester Wert der Lebensdauer bei dem männlichen Geschlecht zwischen 70 und 71, bei dem weiblichen zwischen 72 und 73 Jahre fällt. Um ihn näher zu bestimmen, stellen wir uns vor, das Sterben sei ein kontinuierlicher Vorgang, geregelt nach der Funktion $f(x)$ des Alters x in dem Sinne, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

die Menge der Sterbefälle zwischen den Altern x_0 und x_1 bedeutet. Nimmt man für den engen Umkreis von drei aufeinander folgenden Jahren

$$f(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

an, so ergibt sich, nachdem man die Koeffizienten bestimmt hat, der dichteste Wert von x aus der Gleichung

$$f'(x_0) = 6\alpha x_0 + 2\beta = 0.$$

Behufs Durchführung der Rechnung bezeichne man die größte Zahl aus der Reihe mit d_0, die ihr nachfolgende mit d_1, die vorangehende mit d_{-1} und benutze das neben der letzteren stehende Alter als Nullpunkt der Zählung; dann ergeben sich zur Bestimmung von α, β, γ die Gleichungen:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha + \beta + \gamma = d_{-1}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 7\alpha + 3\beta + \gamma = d_0$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 19\alpha + 5\beta + \gamma = d_1;$$

wird weiter

$$d_0 - d_{-1} = \Delta_{-1}, \quad d_0 - d_1 = \Delta_1$$

gesetzt, so findet man:

$$\alpha = -\frac{\Delta_{-1} + \Delta_1}{6}, \quad \beta = \frac{2\Delta_{-1} + \Delta_1}{2}, \quad \gamma = d_{-1} - \frac{5\Delta_{-1} + 2\Delta_1}{6},$$

$$x_0 = 1 + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta_{-1} + \Delta_1}.$$

Hiernach ist für das männliche Geschlecht, wo $d_{-1} = 1439$, $\Delta_{-1} = 1$, $\Delta_1 = 10$ ist, $x_0 = 1 + \frac{1}{11}$, somit 70,1 Jahre die dichteste Lebensdauer, ferner $\alpha = -1{,}833$, $\beta = 6$, $\gamma = 1435$; für das weibliche Geschlecht, wo $d_{-1} = 1648$, $\Delta_{-1} = 9$, $\Delta_1 = 4$ ist, $x_0 = 1 + \frac{9}{13}$, also 72,7 Jahre die dichteste Lebensdauer, ferner $\alpha = -2{,}17$, $\beta = 11$, $\gamma = 1639$.

Die größte Zahl teilt sich hiernach bei dem männlichen Geschlechte in

$$\int_1^{1,1} f(x)\,dx = 144 \text{ Sterbefälle vor } x_0 \text{ und } 1296 \text{ nach } x_0,$$

bei dem weiblichen Geschlechte in

$$\int_1^{1,7} f(x)\,dx = 1121 \text{ Sterbefälle vor } x_0 \text{ und } 536 \text{ nach } x_0.$$

Nun kann an die Ermittelung der Präzision geschritten werden; bei dieser ist nur der über dem dichtesten Sterbealter liegende Teil der Tafel zu verwenden, wie dies aus den eingangs gemachten Bemerkungen hervorgeht.

Bei dem männlichen Geschlechte weist die Tafel zwischen dem Alter 70,1 und dem vollendeten 79. Lebensjahre, bei einer Altersdifferenz von 8,9 Jahren,

$$1296 + 1430 + 1412 + \cdots + 1067 = 11596 \text{ Sterbefälle}$$

auf, während die Zahl aller Sterbefälle über 70,1

$$1296 + 1430 + \cdots + 1{,}0 = 17\,605$$

beträgt; hieraus ergibt sich für die Grenzen $-8{,}9$ bis $+8{,}9$ der Abweichung vom dichtesten Werte die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{11\,596}{17\,605} = 0{,}65867 = \Phi(g),$$

zu der sich aus Tafel I, Bd. I, das zugehörige g findet:

$$g = 0{,}67287;$$

demnach ist

$$h = \frac{0{,}67287}{8{,}9} = 0{,}0756.$$

Eine mit dem Altersintervall von 72,7 bis zum vollendeten 83. durchgeführte Rechnung gibt für das weibliche Geschlecht

$$h = 0{,}0866.$$

Die Prüfung der Verteilung der Sterbefälle an der dem Gaußschen Gesetze entsprechenden ergibt nun das folgende Resultat:

Männliches Geschlecht			Weibliches Geschlecht		
Alters-intervall	Gestorbene		Alters-intervall	Gestorbene	
	nach der Theorie	nach der Sterbetafel		nach der Theorie	nach der Sterbetafel
56—59	1810	3248	62—67	5155	7157
59—62	2667	3566	67—70	4471	4785
62—65	3507	3906	70—72,7	4507	4405
65—68	4172	4182	72,7—78	8444	8335
68—70,1	3131	3014	78 - 83	5396	5517
70,1—73	4284	4138	83—88	2552	2679
73—76	4021	4014	88—93	839	793
76—79	3292	3444	93—98	191	131
79—82	2432	2632	über 98	34	10
82—85	1615	1743			
85—88	980	969			
88—91	533	441			
91—94	260	164			
94—97	116	48			
97—101	54	12			

Der Anschluß der Tafelwerte an die theoretischen ist oberhalb des dichtesten Sterbealters ein unverkennbarer und er hält auch auf eine kurze Strecke in den niedrigeren Altern an, so daß mit dieser Einschränkung von den Merkmalen eines typischen Mittels gesprochen werden kann.[1])

b) Die neue Gothaer Bankliste weist unter den Versicherten, welche 7 und mehr Versicherungsjahre zurückgelegt haben, vom Alter 60 aufwärts die folgenden Sterbefälle aus, wobei von 100000 Personen des Alters 25 ausgegangen ist:

x	d_x	x	d_x	x	d_x	x	d_x
60	2138	71	2887	82	1713	93	100
61	2226	72	2882	83	1493	94	61
62	2308	73	2861	84	1282	95	34
63	2387	74	2825	85	1082	96	19
64	2466	75	2775	86	899	97	8
65	2547	76	2705	87	729	98	4
66	2629	77	2611	88	577	99	1
67	2708	78	2487	89	442	100	1
68	2779	79	2329	90	327		
69	2835	80	2142	91	230		
70	2872	81	1938	92	156		

1) Nur scheinbar ist die Übereinstimmung in der obigen Tabelle geringer als in den vielen von Lexis a. a. O. gerechneten Beispielen. Diesen liegen nämlich Sterbetafeln mit kleiner Grundzahl (1000) zugrunde.

Die normale Lebensdauer fällt hier in das 72. Lebensjahr. Unter Beibehaltung der vorhin eingeführten Bezeichnungen ist

$$d_{-1} = 2872 \qquad \Delta_{-1} = 15$$
$$d_0 = 2887$$
$$d_1 = 2882 \qquad \Delta_1 = 5$$

$$x_0 = 1 + \frac{15}{20} = 1{,}75, \text{ Normalalter } 71{,}75;$$

$$\alpha = -\frac{20}{6} = -3{,}33, \quad \beta = \frac{35}{2} = 17{,}5, \quad \gamma = 2872 - \frac{85}{6} = 2857{,}83$$

$$\int_1^{1,75} (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\,dx = 2165$$

$$\int_{1,75}^{2} (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\,dx = 722,$$

womit zugleich eine Probe für den Anschluß der Parabel gegeben ist, da die Summe der beiden Teilintegrale tatsächlich d_0 liefert.

Aus der Gesamtzahl 35 430 der Toten *über* dem Normalalter und ihrer Anzahl 24 339 in dem Intervall 71,75 bis Ende 80 ergibt sich der Ansatz

$$\frac{24\,339}{35\,430} = 0{,}68696 = \Phi(g),$$

woraus

$$g = 0{,}71339, \quad h = \frac{0{,}71339}{9{,}25} = 0{,}07712, \quad r = \frac{\varrho_0}{h} = 6{,}18.$$

Um den Grad der Übereinstimmung mit dem Gaußschen Gesetz über und unter dem Normalalter kennen zu lernen, kann man auch so vorgehen, daß man die Zahl der beobachteten Todesfälle zwischen den Grenzen: Normalalter $\pm r$, Normalalter $\pm 2r, \ldots$ mit der Zahl 35 430 ins Verhältnis setzt und dies mit dem rechnungsmäßigen Verhältnis vergleicht; so ergibt sich folgendes:

Anzahl der Toten zwischen 71,75 und $71{,}75 + r = 77{,}93 \ldots 17\,198$, d. i 48,5%, statt des theoretischen 50%.

Anzahl der Toten zwischen 71,75 und $71{,}75 + 2r = 84{,}12 \ldots 29\,632$, d. i. 83,6% statt des theoretischen 82,3%.

Anzahl der Toten zwischen 71,75 und $71{,}75 - r = 65{,}57 \ldots 17\,083$, d. i. 48,2% statt des theoretischen 50%.

Anzahl der Toten zwischen 71,75 und $71{,}75 - 2r = 59{,}38 \ldots 31\,328$, d. i. 88,4% statt des theoretischen 82,3%.

Während also die Übereinstimmung oberhalb des Normalalters auch im Abstande $2r$ eine befriedigende ist, findet unterhalb in dem

gleichen Abstande schon ein beträchtlicher Unterschied, und zwar ein Übergewicht der wirklichen Todesfälle über die rechnungsmäßigen statt.

Bemerkt sei, daß innerhalb eines Jahresintervalls lineare Interpolation angewendet wurde.

c) Während die ersten zwei Beispiele sich auf *ausgeglichene* Tafeln stützten, hat das folgende den Vorzug, daß ihm unausgeglichene Ergebnisse zugrunde liegen. Nach den englischen Beobachtungen an männlichen Personen, die auf den Todesfall gegen lebenslängliche Prämienzahlung versichert waren, betrugen die Sterbefälle vom Alter 58 aufwärts, bezogen auf 100 000 Personen im Alter von 10 Jahren, wie folgt:

x	d_x	x	d_x	x	d_x	x	d_x
58	1550	70	2562	82	1826	94	141
59	1696	71	2521	83	1635	95	101
60	1799	72	2630	84	1562	96	35
61	1798	73	2568	85	1254	97	44
62	1899	74	2602	86	1021	98	31
63	1958	75	2571	87	918	99	7
64	2152	76	2517	88	773	100	7
65	2147	77	2444	89	584	101	—
66	2273	78	2354	90	434	102	—
67	2315	79	2266	91	339	103	4
68	2496	80	2180	92	285		
69	2415	81	2003	93	222		

Das Normalalter fällt ins 73. Lebensjahr. Man hat hier

$$d_{-1} = 2521 \qquad \Delta_{-1} = 109$$
$$d_0 = 2630$$
$$d_1 = 2568 \qquad \Delta_1 = 62$$

$$x_0 = 1 + \frac{109}{171} = 1{,}64, \text{ Normalalter } 72{,}64$$

$$\alpha = -\frac{171}{6} = -28{,}5, \quad \beta = \frac{280}{2} = 140, \quad \gamma = 2409{,}5$$

$$\left.\begin{aligned}\int_1^{1,64}(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\,dx &= 1682\\ \int_{1,64}^{2}(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\,dx &= 948\end{aligned}\right\} 1682 + 948 = 2630;$$

Anzahl der Toten über dem Normalalter 33 676,

Anzahl der Toten bis zum vollendeten 82. Jahre 22 453.

Daraus

$$\frac{22\,453}{33\,676} = 0{,}6667 = \Phi(g),\ g = 0{,}6838,$$

$$h = \frac{0{,}6838}{9{,}36} = 0{,}0731$$

$$r = \frac{\varrho_0}{h} = 6{,}524;$$

Anteil der Toten	nach der Beobachtung:	nach der Rechnung:
zwischen 72,64 und 72,64 + r . . .	55,3% . . .	50%
„ 72,64 „ 72,64 + $2r$ . . .	87,4 „ . . .	82,3%
„ 72,64 „ 72,64 − r . . .	53,9 „ . . .	50%
„ 72,64 „ 72,64 − $2r$ . . .	90,1 „ . . .	82,3%.

Der Anschluß an die Formel ist minder gut als in den zwei andern Fällen, ja das Verhalten bis zur Entfernung r nach links und rechts widerspricht der Lexisschen Anschauung.[1])

1) K. Pearson hat seine Methode der analytischen Darstellung statistischer Reihen (s. Nr. 197—199) in der Richtung ausgebildet, daß er Reihen, die sich keiner der Formeltypen anpassen lassen, in Komponenten zu zerlegen sucht, die eine solche Anpassung gestatten. Es leitet ihn dabei der Gedanke, daß eine Reihe sich auf ein heterogenes Material beziehen kann, dessen Teile sich in bezug auf den beobachteten Zustand oder Vorgang verschieden verhalten, oder daß im Ablaufe eines statistischen Vorgangs abschnittweise verschiedene Ursachen wirken, die das Aufkommen einer einheitlichen Häufigkeitskurve verhindern. Er unternahm es nun, auch die Kurve der Häufigkeit der Todesfälle durch Komponentenzerlegung herzustellen, wobei er sich auf ein nicht näher bezeichnetes Material aus englischen und aus französischen Sterblichkeitsbeobachtungen stützte. In beiden Fällen glaubt er die totale Kurve aus fünf Komponenten zusammensetzen zu können, denen Sterblichkeitsursachen zugrunde liegen, die in gewissen Lebensabschnitten besonders hervortreten, ohne etwa in andern immer ganz unwirksam zu sein. Er unterscheidet demgemäß A. Sterblichkeit des Alters, B. des mittleren Altersabschnitts, C. der Jugend, D. der Kindheit, E. des Säuglingsalters. Die Abschnitte A und D vermochte er durch Kurven des Typus III darzustellen, für die Abschnitte B und C erwiesen sich Normalkurven als zureichend; der Abschnitt E aber bot der Anpassung an eine der verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitskurven solange Schwierigkeiten, als der Beginn der Häufigkeitskurve in den Zeitpunkt der Geburt verlegt wurde; seine Verlegung in den Abstand von 0,75 Jahren vor diesen Zeitpunkt machte die Anpassung an eine Kurve möglich, die horizontal und vertikal asymptotisch verläuft. Aus der Superposition der Komponenten ergab sich die Kurve der Gesamthäufigkeit. Nach Pearsons Rechnung entfielen folgende Promille an Sterbefällen auf die fünf Komponenten:

	Englisches Material.	Französisches Material
A.	484,1	411
B.	173,2	180
C.	50,8	78
D.	46,4	47
E.	245,7	284
	1000,2	1000

Die letzte Komponente würde hiernach auch die „vorgeburtlichen“ Todes-

210. Ausdehnung des Dispersionsbegriffes auf extensive Größen.[1]) Wenn über eine und dieselbe extensive Größe mehrere, zeitlich oder örtlich verschiedene Beobachtungsreihen und die aus diesen für jene Größe abgeleiteten Hauptwerte vorliegen, so stellt sich die wichtige Frage ein, ob diese Hauptwerte ihrerseits als zufällig gestörte Modifikationen eines einzigen Grundwertes angesehen werden können oder nicht; sollte die Antwort entschieden in letzterem Sinne ausfallen, so wäre dies ein Anhalt für die Annahme, daß die in Rede stehende Größe zeitlichen, respektive örtlichen wesentlichen Schwankungen unterworfen sei.

Angenommen, es lägen z Reihen von je n Einzelwerten einer extensiven Größe X vor:

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \cdots & a_n \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)z+1}, & a_{(n-1)z+2}, & \cdots & a_{zn}; \end{array} \tag{1}$$

stellen wir uns auf den Standpunkt, X habe für alle Reihen denselben typischen Wert, für welchen die erste Reihe in ihrem arithmetischen Mittel die Bestimmung x_1, die zweite Reihe die Bestimmung $x_2, \cdots$, die letzte Reihe die Bestimmung x_z ergab, so folgt aus dem ganzen Beobachtungsmaterial die Bestimmung:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_z}{z}, \tag{2}$$

zugleich das arithmetische Mittel aller als gleich genau erachteten a.

Die Präzision von x läßt nun zwei Berechnungsweisen zu, die in ihren Resultaten bis auf die Unsicherheit, die in der Natur der Sache liegt, übereinstimmen müßten, wenn die gemachten Voraussetzungen zutreffend wären. Einmal ergibt sich für x, wenn man es als Mittel der a auffaßt und

$$\lambda_i = -a_i + x \qquad (i = 1, 2, \cdots zn)$$

setzt, die Präzision

$$h' = \sqrt{\frac{zn(zn-1)}{2[\lambda\lambda]}}; \tag{3}$$

fälle umfassen, die sich nur zum Teile beobachten lassen als Todesfälle, die nach Frühgeburten vor dem normalen Fälligkeitstermin eintreten; über diesen Teil konnte Pearson an der Hand von Gebäranstaltsstatistiken eine kleine Probe machen, die nicht ungünstig ausfiel. — So interessant diese Darstellung ist, so läßt sich nicht leugnen, daß ihre rechnerische Durchführung neben Schwierigkeiten auch Willkürlichkeiten einschließt. Phil. Trans. London 186 (1895) I A, p. 406—410.

1) Vgl. L. v. Bortkiewicz, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik. Jahrb. f. Nationalök. u. Statist. (3), X (1895), p. 342 ff.

auf der anderen Seite, wenn man x als Mittel der x_i ansieht und

$$\varDelta_i = -x_i + x \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

setzt, hat man dafür die Präzision

$$h'' = \sqrt{\frac{z(z-1)}{2[\varDelta\varDelta]}}. \tag{4}$$

Das Merkmal für *normale Dispersion* der Werte x_i und somit für das Vorhandensein eines gemeinsamen Grundwertes, von dem die Einzelwerte nur zufällig abweichen, wäre das wenigstens sehr angenäherte Bestehen der Relation

$$h' = h'' \quad \text{oder} \quad Q = \frac{h'}{h''} = 1.$$

Wenn dagegen der Grundwert von Reihe zu Reihe ein anderer ist, so kommen in den x_i nicht allein die zufälligen Schwankungen der a_i um den jeweiligen Grundwert, sondern auch die wesentlichen Schwankungen des Grundwertes selbst zum Ausdruck; dies hat eine Vergrößerung von $[\varDelta\varDelta]$, daher eine Verkleinerung von h'' zur Folge; dieser Fall, der der *übernormalen Dispersion* der x_i entspricht, ist also durch

$$h' > h'' \quad \text{oder} \quad Q = \frac{h'}{h''} > 1$$

gekennzeichnet.

Dieser Gedankengang entspricht völlig demjenigen, der bei Untersuchung von Relativgrößen befolgt worden ist, und es läßt sich auch zeigen, daß h' der dort auf kombinatorischem Wege bestimmten Präzision adäquat ist. Stellt man sich nämlich vor, an die Stelle von X träte die unbekannte konstante Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E, für die aus zn Versuchen der Wert p_0 ermittelt worden wäre; so heißt dies, daß E im ganzen znp_0-mal eingetroffen, $zn(1-p_0)$-mal ausgeblieben ist; so oft E eintraf, hat man für p den Wert 1 beobachtet, war also $\lambda = 1 - p_0$; so oft es ausblieb, hat man für p den Wert 0 beobachtet und betrug die Abweichung $-p_0$; infolgedessen ist also

$$[\lambda\lambda] = znp_0(1-p_0)^2 + zn(1-p_0)p_0^2 = znp_0(1-p_0).$$

Setzt man diesen Wert in (3) ein, so wird

$$h' = \sqrt{\frac{zn-1}{2p_0(1-p_0)}},$$

und dies entspricht [vgl. Nr. 202, Gl. (5) u. (4)] der „kombinatorischen" Präzision aus zn Beobachtungen.

II. Abschnitt. Sterblichkeitsmessung.

§ 1. Sterblichkeitsmaße.

211. Aufgabe der Sterblichkeitsmessung. Die Sterblichkeitsmessung hat den Zweck, die abschließende Massenwirkung aller jener Ursachen und Umstände mathematisch zu beschreiben, die auf die allmähliche Aufzehrung und schließliche Vernichtung der Lebensenergie Einfluß üben.

Da die abschließende Wirkung in dem Sterben der einzelnen Individuen der Masse sich äußert, so pflegt man die erwähnten Ursachen und Umstände als *Todesursachen* im *weiteren* Sinne zu bezeichnen, während man unter der Todesursache im *engeren* Sinne die *letzte* Veranlassung versteht, mit der man das Sterben einer bestimmten Person in einen Kausalnexus bringt.

Man braucht nur den Versuch zu machen, Ursachen und Umstände der bezeichneten Art, soweit sie offen zutage liegen, aufzuzählen, um sich eine Vorstellung von der Komplikation des Problems zu bilden.

Zunächst wird man *allgemeine* Ursachen wahrnehmen, die auf alle Individuen der Masse, wenn auch nicht in gleichem Grade, einwirken. Einige Beispiele werden dies erläutern.

Ist die Masse der Bevölkerung eines Landes entnommen, so ist wohl an erster Stelle der durch fortschreitende Vererbung entwickelte *Schlag* zu nennen; es zählen hierher ferner die *klimatischen Verhältnisse*, weiter die *allgemeine wirtschaftliche Lage*, dann die *hygienischen Einrichtungen*, u. a. m.

An die allgemeinen Ursachen wären solche zu reihen, die auf bestimmte *Teile der Masse* verschiedene Wirkung ausüben. Hierher gehört beispielsweise das *Geschlecht*, das neben physiologischen Verschiedenheiten solche in der Lebensführung bedingt; dann das *Alter*, von dem der Stand der Lebensenergie und damit das Verhalten gegen die aufzehrenden Ursachen abhängt; ferner der *Beruf*, der seine spezifischen Schädigungen mit sich führt, u. a. m.

Schließlich gibt es *individuelle Ursachen*, die von einem Individuum zum andern wechseln; man denke an die *angeborene physische Anlage*, die bei dem einen eine kräftige Reaktion gegen die verzehrenden Ursachen auslöst, während sie den anderen widerstandslos ihnen ausliefert; an das *Temperament*, von dem die Stellungnahme zu den Hindernissen des Lebens abhängt, u. v. a.[1])

---

1) Es sind mehrfach weitgehende Aufzählungen und Einteilungen der Todesursachen im weiteren Sinne versucht worden. A. Quetelet (Physique sociale, 1869) teilte sie in „natürliche" und „zufällige" (vom Menschen selbst ausgehende)

Dieser Aufzählung können zwei wichtige Gesichtspunkte für die Auffassung des Problems entnommen werden.

1. Manche der Ursachen unterliegen zeitlichen Schwankungen, so das Klima, die allgemeine wirtschaftliche Lage; andere weisen eine fortschreitende Entwicklung auf, wie etwa die hygienischen Einrichtungen in den meisten Kulturländern, Städten, Ortschaften. Es ist anzunehmen, daß auch ihre Wirkungen im ganzen einem *zeitlichen Wechsel* unterliegen werden.

2. Mit Rücksicht auf die gruppenweise und auf die inviduell wirkenden Ursachen wird die schließliche Massenwirkung durch die Art der *Zusammensetzung der Masse* bedingt sein, an der die Beobachtung und Messung vorgenommen wird.

Das *Zeitmoment* wird bei der Behandlung des Problems in mehrfacher Weise in Betracht kommen.

Die *absolute* Zeit im Sinne der bürgerlichen Zeitrechnung kommt zur Verwendung, wenn es sich darum handelt, den Eintritt eines einzelnen Individuums ins Dasein oder die Epoche zu bezeichnen, in welcher dieser Eintritt bei einer Masse von Individuen erfolgt ist. Man gibt die *Geburtszeit* eines Individuums durch das Datum, einer Generation etwa durch das Kalenderjahr ihrer Geburt an.

Die absolute Zeit kommt weiter zur Anwendung bei Angabe der *Epoche*, in welcher die Beobachtung, die Messung, oder ein einzelner Akt derselben vorgenommen worden ist. So wird von einer Volkszählung das Datum, von einer Sterblichkeitsmessung der Zeitraum angegeben, innerhalb dessen die Wirkungen der Todesursachen, also die Todesfälle, beobachtet worden sind.

Zu den *relativen Zeitangaben* gehört vor allem das *Alter*, gemessen durch die seit der Geburt jeweilen verstrichene Zeit; seine Angabe erfolgt zunächst in Jahren und Bruchteilen eines Jahres. Es gehört dazu weiter die *Beobachtungsdauer* als die seit dem Eintritt in die Beobachtung verstrichene Zeit; auch sie wird gewöhnlich in Jahren und Bruchteilen eines Jahres gegeben.

So kann denn ein Individuum in einem bestimmten Augenblicke durch mehrere Zeitangaben gekennzeichnet sein: Durch die Geburtszeit, durch das Alter und durch die Beobachtungsdauer; der Unterschied bei diesen Angaben liegt nur in dem Anfangspunkt der Zählung: bei der Geburtszeit ist es der Anfangspunkt unserer Zeitrechnung,

---

ein. N. Colajanni (Manuale di statistica teorica e di demografia, Napoli, 1904) bringt sie in drei Gruppen: 1. Physische Todesursachen (Klima, Bodenbeschaffenheit, Feuchtigkeitsgrad usw.); 2. anthropologische (Geschlecht, Alter, physische und psychische Konstitution, Vererbung, Rasse); 3. soziale (Bevölkerungsdichtigkeit, Agglomerationsverhältnisse, Verteilung des Besitzes, politische Verfassung, Gesetze, Kulturstufe, Religion, Familienstand, Beruf).

bei dem Alter der Zeitpunkt der Geburt, bei der Beobachtungsdauer der Zeitpunkt des Eintrittes in die Beobachtung.

Damit wäre die materielle Seite des Problems der Sterblichkeitsmessung in knappen Zügen gekennzeichnet. Nun handelt es sich um die *Form*, in der die verlangte mathematische Beschreibung gegeben werden soll. Es ist begreiflich, daß bei einem so vielgestaltigen Problem verschiedene Mittel ersonnen und in Anwendung gebracht worden sind, um dies zu leisten; sie werden im Laufe der weiteren Betrachtungen allmählich zur Sprache kommen. Vor allem aber handelt es sich darum, unter möglichst einfachen Voraussetzungen, ohne Rücksicht darauf, ob sie sich irgendwo verwirklicht finden oder verwirklichen lassen, die Grundlagen der Beschreibung, die sogenannten *Sterblichkeitsmaße*, zu besprechen. Erst dann kann daran gegangen werden, die praktisch ausführbaren Methoden zu erörtern und ihre Resultate an dem Vergleich zwischen den ideellen Voraussetzungen und den wirklichen Verhältnissen zu würdigen.

212. Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit. Wir stellen uns zunächst auf den ideellen Standpunkt, es sei möglich, eine große Anzahl l_0 *gleichzeitig* Geborener in Evidenz zu halten und zu beobachten bis zu ihrem völligen Absterben. Da eine *kontinuierliche* Beobachtung, die sich auf die jeweilige *Menge* der Personen zu beziehen hätte, praktisch unausführbar ist, so beschränke man sich darauf, festzustellen, wie viele von den l_0 das Alter von $1, 2, \cdots x, x+1, \cdots \omega - 1$ Jahren vollendet haben, wobei vorausgesetzt wird, daß keine der Personen das Alter ω erreicht habe. Dieses Ziel kann dadurch erreicht werden, daß man in den Zeitpunkten

$$\tau_1 = t + 1, \quad \tau_2 = t + 2, \quad \cdots \quad \tau_x = t + x,$$
$$\tau_{x+1} = t + x + 1, \quad \cdots \quad \tau_{\omega-1} = t + \omega - 1,$$

sämtlich in Jahren ausgedrückt, wobei t den Zeitpunkt der Geburt bedeutet, zählt, wie viele der Personen am Leben sind; die so erhaltenen Zahlen, mit der ursprünglichen l_0 zusammengestellt, bilden die (niemals steigende) Reihe der sukzessive *Überlebenden:*

$$l_0, \quad l_1, \quad \cdots \quad l_x, \quad l_{x+1}, \quad \cdots \quad l_{\omega-1}. \tag{1}$$

Es steht nichts im Wege, auch die Anzahl der Überlebenden in einem Zwischenalter $x + \Delta x$, wo $\Delta x < 1$, festzustellen; sie heiße $l_{x+\Delta x}$.

Man kann zu der Reihe (1) auch durch Zählung der Sterbefälle gelangen, die sich im Laufe der Jahre

$$(t, \tau_1), \quad (\tau_1, \tau_2), \quad \cdots \quad (\tau_x, \tau_{x+1}), \quad \cdots \quad (\tau_{\omega-1}, \tau_\omega)$$

zugetragen haben; ihre Anzahlen, die Zahlen der *Toten*, seien:

$$d_0, \quad d_1, \quad \cdots \quad d_x, \quad \cdots \quad d_{\omega-1}. \tag{2}$$

Es bestehen nämlich die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
l_1 &= l_0 - d_0 \\
l_2 &= l_1 - d_1 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
l_{x+1} &= l_x - d_x \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
l_{\omega-1} &= l_{\omega-2} - d_{\omega-2} \\
0 &= l_{\omega-1} - d_{\omega-1}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Durch Summierung der Gleichungen von l_{x+1} abwärts ergibt sich $0 = l_x - \sum d_x$, woraus

$$l_x = \sum d_x, \tag{4}$$

wobei sich die Summenbildung auf alle Zahlen von d_x an bis zum Schluß der Reihe bezieht.

Die allgemeine Relation zwischen den Überlebenden und den Gestorbenen lautet:

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \tag{5}$$

Der Verlauf der Reihen (1) und (2) muß als von der *Geburtszeit* t abhängig erachtet werden, weil ja die zu verschiedenen Zeiten (an demselben Orte, in derselben Bevölkerung) Geborenen unter verschiedenen äußeren Verhältnissen existierend in verschiedener Weise absterben werden. Er wird auch davon abhängen, ob man die beiden Geschlechter vereint oder getrennt beobachtet und somit besondere Reihen (1), (2) für jedes *Geschlecht* feststellt.

Hätte eine vorausgehende Untersuchung gezeigt, daß die für Personen aus verschiedenen Geburtszeiten bestimmten Verhältniszahlen $\frac{d_x}{l_x}$ normale Dispersion aufweisen (vgl. Nr. 206, d) so wäre

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{6}$$

als eine empirische, und zwar als die der wahrscheinlichsten Hypothese (Nr. 104) entspringende Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit anzusehen, nämlich der Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, welche das Alter x erreicht hat, vor Erreichung des Alters $x + 1$ sterben werde. Man nennt sie die *Sterbenswahrscheinlichkeit* zum Alter x.

Ihr Komplement:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{7}$$

hätte dann in demselben Sinne die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit, nämlich der, daß eine Person, welche das Alter x erreicht hat, auch das Alter $x + 1$ vollenden werde; man nennt sie die *Lebenswahrscheinlichkeit* zum Alter x.

Jede der Reihen:

$$q_0, \quad q_1, \quad \cdots \quad q_x, \quad \cdots \quad q_{\omega-1} \; (=1) \tag{8}$$

$$p_0, \quad p_1, \quad \cdots \quad p_x, \quad \cdots \quad p_{\omega-1} \; (=0) \tag{9}$$

ist ebenso wie die Reihen (1), (2) geeignet, den *Verlauf des Sterbens* darzustellen; es lassen sich in der Tat die Reihen (1), (2) aus jenen (8), (9) mittels der Relationen (6), (7) und des bekannten l_0 ableiten.

213. Sterblichkeitsintensität, Sterblichkeitskoeffizient und zentrales Sterblichkeitsverhältnis. Um die Raschheit des Sterbens oder die *Sterblichkeitskraft* in irgend einem Alter zu messen, hat man drei Größen 'gleichzeitig in Betracht zu ziehen: 1. die Menge l_x der Personen des betreffenden Alters, die am Leben sind; 2. die Menge der Todesfälle bis zu einem höheren Alter $x + \Delta x$, d. i. $l_x - l_{x+\Delta x} = -\Delta l_x$; 3. die Größe der Altersdifferenz Δx. Und man wird berechtigt sein, die Sterblichkeitskraft für um so größer zu erklären, je größer $-\Delta l_x$ bei demselben l_x und Δx, und je kleiner l_x und Δx bei demselben $-\Delta l_x$ sind; hiernach bildet der Ausdruck

$$-\frac{\Delta l_x}{l_x \Delta x} \tag{10}$$

ein Maß der Sterblichkeitskraft bei dem Alter x, und zwar ein um so zutreffenderes, je kleiner das als *konstant* festzusetzende Δx angenommen wird.

Der Verkleinerung des Δx ist aber durch die Menge der beobachteten Personen eine Grenze gesetzt. Denn würde Δx so klein genommen, daß auf manchen Altersstufen $(x, x + \Delta x)$ kein Todesfall einträte, so ergäbe sich bei solchen Altern die Sterblichkeitskraft Null, was der Vorstellung von dieser Größe widerspricht.

Wiewohl die Verminderung der ursprüglichen l_0 Personen durch den Tod unstetig, in diskreten Zeitpunkten vor sich geht, kann man sich doch unter l_x eine *stetige* (und differentiierbare) Funktion des Alters x vorstellen, die das Gesetz der Abnahme der Überlebenden mit zunehmendem Alter darstellt und von der verlangt werden muß, daß sie bei den ganzzahligen x die Werte (1) annehme. Dadurch erlangt man den Vorteil, daß auf den Vorgang des Absterbens die Hilfsmittel der Analysis anwendbar werden.

An dieser Vorstellung festhaltend, bezeichnet man den Grenzwert des Quotienten (10) für $\lim \Delta x = 0$ als die *Sterblichkeitsintensität* bei dem Alter x; wird sie mit μ_x bezeichnet, so ist[1])

1) Der Sterblichkeitsintensität kommt sachlich die Bedeutung einer fiktiven Sterbenswahrscheinlichkeit zu; es bedeutet nämlich $-dl_x$ die Anzahl der Sterbefälle in dem Zeitintervall $(x, x + dx)$, $-\frac{dl_x}{dx}$ somit die Anzahl der Sterbefälle in einem Jahre, *wenn die in jenem Zeitintervall herrschende Sterblichkeit durch das ganze*

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{d \operatorname{Log} l_x}{dx}. \tag{11}$$

Ist l_x wirklich als Funktion von x analytisch dargestellt, so kann nach dieser Formel μ_x für *jedes* Alter bestimmt werden.

Aus (11) ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen x und $x+1$:

$$\operatorname{Log}\frac{l_{x+1}}{l_x} = -\int_x^{x+1}\mu_x dx,$$

woraus

$$p_x = e^{-\int_x^{x+1}\mu_x dx}. \tag{12}$$

Diese Formel würde bei bekannter analytisch dargestellter Sterblichkeitsintensität die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes Alter zu bestimmen gestatten.

Denkt man sich die Funktion l_x durch die zu den Abszissen x gehörigen Ordinaten einer Kurve, der *Kurve der Überlebenden*, dargestellt, so bedeutet $\frac{dl_x}{dx}$ den Richtungskoeffizienten der Tangente im Punkte $x \mid l_x$[1]; die Sehne, welche die Punkte $x-1 \mid l_{x-1}$, $x+1 \mid l_{x+1}$ verbindet, wird dort, wo l_x keine große Bewegung ausführt, sich in der Richtung nicht wesentlich von jener Tangente unterscheiden; daher kann näherungsweise $\frac{l_{x+1}-l_{x-1}}{2} = \frac{dl_x}{dx}$ und

$$\mu_x = \frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2 l_x} = \frac{d_{x-1}+d_{x+1}}{2 l_x} \tag{11*}$$

gesetzt werden; eine Formel, die man zur Bestimmung der Sterblichkeitsintensität bei den ganzjährigen Altern verwenden kann, wenn die Reihen (1), (2) gegeben sind.

Aus der Formel (11) folgt $-dl_x = \mu_x l_x dx$ und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $x' < x''$

$$l_{x'} - l_{x''} = \int_{x'}^{x''}\mu_x l_x dx;$$

Jahr unverändert anhielte, mithin $-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$ die unter dieser Fiktion geltende Sterbenswahrscheinlichkeit zum Alter x. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß in solchen Lebensperioden, in denen sich die Sterbenswahrscheinlichkeit nahezu gleichförmig (d. h. nahezu linear) ändert, zwischen Sterbenswahrscheinlichkeit und Sterblichkeitsintensität nur ein geringer Unterschied bestehen werde.

1) μ_x ist dabei durch den reziproken Wert der Subtangente dargestellt.

es existiert daher ein mittlerer Wert $m(x', x'')$ der Sterblichkeitsintensität während des Altersintervalls (x', x''), für den

$$l_{x'} - l_{x''} = m(x', x'') \int_{x'}^{x''} l_x dx,$$

woraus eben dieser mittlere Wert, den man als den *Sterblichkeitskoeffizienten* dieser Altersstrecke bezeichnet, folgt:

$$m(x', x'') = \frac{l_{x'} - l_{x''}}{\int_{x'}^{x''} l_x dx}. \tag{13}$$

Insbesondere nennt man den zu einem Altersjahr $(x, x+1)$ gehörigen Sterblichkeitskoeffizienten auch das *zentrale Sterblichkeitsverhältnis* dieses Altersjahrs; benutzt man dafür das Zeichen m_x, so ist

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{\int_x^{x+1} l_x dx} \tag{14}$$

Der Nenner von (13) hat die Bedeutung einer Zeit; da nämlich angenommen werden kann, daß *alle* l_x Personen, die das Alter x erreicht haben, auch noch die Altersstrecke $(x, x+dx)$ durchleben, so ist $\int_{x'}^{x''} l_x dx$ die von den l_x unter Beobachtung stehenden Personen auf der Altersstrecke (x', x'') durchlebte Zeit; insbesondere ist demnach

$$\int_x^{\omega} l_x dx = \mathcal{T}_x$$

die von diesen Personen *überhaupt* noch durchlebte Zeit, also

$$\int_{x'}^{x''} l_x dx = \mathcal{T}_{x'} - \mathcal{T}_{x''}.$$

Die Ermittlung von $\mathcal{T}_x$ würde die Aufzeichnung des Sterbealters jeder der l_x Personen erfordern.

Bei Beschränkung auf ein Jahr kann man, wofern sich l_x nahezu gleichmäßig ändert, näherungsweise

$$\int_x^{x+1} l_x dx = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = \mathcal{T}_x - \mathcal{T}_{x+1}$$

nehmen, indem man statt des variablen l_x das arithmetische Mittel seiner Endwerte setzt.

Hiermit schreiben sich dann die Formeln (13) und (14):

$$m(x', x'') = \frac{l_{x'} - l_{x''}}{\mathfrak{T}_{x'} - \mathfrak{T}_{x''}} \tag{13*}$$

$$m_x = \frac{2 d_x}{l_x + l_{x+1}} = \frac{2 d_x}{2 l_x - d_x}. \tag{14*}$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (6) und (7) kann auch geschrieben werden:

$$m_x = \frac{2(1 - p_x)}{1 + p_x},$$

woraus sich die (ebenfalls angenäherte) Relation

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}$$

zwischen p_x und m_x ergibt.

214. Lebenserwartung. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, die das Alter x' erreicht hat, in dem (späteren) Altersintervall $(x, x + dx)$ sterben werde, ist

$$-\frac{dl_x}{l_{x'}};$$

da sie bis dahin die Zeit $x - x'$ durchlebt hat, so ist die gesamte *Lebenserwartung* einer Person des Alters x':

$$\overset{0}{e}_{x'} = \int_{x'}^{\omega} -\frac{dl_x}{l_{x'}}(x - x') = \frac{1}{l_{x'}} \int_{x'}^{\omega} -\frac{dl_x}{dx}(x - x')\, dx;$$

wendet man, $x - x' = u$ und $-\frac{dl_x}{dx} dx = dv$ setzend, partielle Integration an, so wird

$$\int_{x'}^{\omega} -\frac{dl_x}{dx}(x - x')\, dx = \int_{x'}^{\omega} l_x dx = \mathfrak{T}_{x'},$$

folglich

$$\overset{0}{e}_{x'} = \frac{\mathfrak{T}_{x'}}{l_{x'}}. \tag{16}$$

In dieser Form stellt sich die Lebenserwartung in ihrer zweiten, übrigens schon aus dem Begriffe der mathematischen Erwartung hervorgehenden Bedeutung der *mittleren* oder *durchschnittlichen Lebensdauer* dar.

Unter der Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Sterbefälle einer einjährigen Altersstufe über diese läßt sich die Lebenserwartung durch die Zahlen der Reihen (1) und (2), Nr. 210, ausdrücken. Geht

man vom Alter x aus, so durchleben die d_x Gestorbenen des ersten Jahres unter dieser Annahme $\frac{d_x}{2}$, die d_{x+1} Gestorbenen des zweiten Jahres $\frac{3d_{x+1}}{2}$, die d_{x+2} Gestorbenen des nächsten Jahres $\frac{5d_{x+2}}{2}$ Jahre usw.; folglich ist

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x &= \frac{1}{2}(d_x + 3d_{x+1} + 5d_{x+2} + \cdots) \\ &= \frac{1}{2}(d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots) \\ &\qquad + (d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots) \\ &\qquad\qquad + (d_{x+2} + \cdots) \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\end{aligned}$$

d. i. nach (4):

$$\mathcal{T}_x = \frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots. \tag{17}$$

Daraus ergibt sich der aus obiger Annahme entspringende Näherungswert der Lebenserwartung der x-jährigen

$$\overset{0}{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}. \tag{18}$$

Neben dieser *vollen* unterscheidet man die *abgekürzte* Lebenserwartung

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} = \overset{0}{e}_x - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Hält man neben diese Formel die Gleichung

$$1 + e_{x+1} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_{x+1}} = \frac{l_x}{l_{x+1}} e_x = \frac{e_x}{p_x},$$

so erhält man eine approximative Beziehung zwischen Lebenswahrscheinlichkeit und Lebenserwartung, indem

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}} \tag{20}$$

ist.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Lebenserwartung zu einem bestimmten Alter x keine Größe ist, die man mit einer allgemein angebbaren Wahrscheinlichkeit zu erwarten hätte; vielmehr hängt die relative Größe dieser unendlich kleinen Wahrscheinlichkeit von dem ganzen ferneren Sterblichkeitsverlauf ab.

215. Wahrscheinlichste und wahrscheinliche Lebensdauer. Unter der *wahrscheinlichsten Lebensdauer* der x'-jährigen wäre diejenige Dauer zu verstehen, bei deren Ablauf der Eintritt des Todes relativ am wahrscheinlichsten ist. Nun ist die Wahrscheinlichkeit für einen x'-jährigen, in dem Altersintervall $(x, x + dx)$ zu sterben, gleich

$$-\frac{dl_x}{l_{x'}} = -\frac{\frac{dl_x}{dx}}{l_{x'}}\,dx;$$

sie wird am größten, wenn $-\frac{dl_x}{dx}$ ein Maximum, also wenn $\frac{d^2 l_x}{dx^2} = 0$[1] $\left(\text{und } -\frac{d^3 l_x}{dx^3} < 0\right)$ wird; angenommen, diese Bedingung würde nur durch den *einen* Wert $x = \xi$ erfüllt, so wäre $\xi - x'$ die wahrscheinlichste weitere Lebensdauer der x'-jährigen.

Ist in der Reihe der Zahlen (2), Nr. 210, unter jenen, die auf $d_{x'}$ folgen, $d_{x'+\xi}$ die größte, so fällt die wahrscheinlichste Lebensdauer zwischen ξ und $\xi + 1$ (vgl. Nr. 207).

Als *wahrscheinliche Lebensdauer* der x-jährigen wird jene Dauer $\mathfrak{x}$ bezeichnet, nach deren Ablauf die Anzahl l_x dieser Personen sich durch das Absterben auf die Hälfte vermindert hat, so daß $l_{x+\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}\,l_x$; es ist dann bezüglich einer beliebigen Person des Alters x ebenso wahrscheinlich, das Alter $x + \mathfrak{x}$ nicht zu erreichen, wie es zu überschreiten.

Man hat, um $\mathfrak{x}$ zu finden, in der Reihe (1) der Überlebenden von l_x ausgehend bis zu jenen Zahlen l_{x+n} und l_{x+n+1} fortzuschreiten, welche $\frac{1}{2}\,l_x$ einschließen; dann liegt $\mathfrak{x}$ zwischen n und $n + 1$.

216. Das Problem der Sterblichkeitsmessung. Im vorstehenden ist eine Reihe von Größen definiert, die, als Funktionen des Alters aufgefaßt, geeignet sind, die Massenwirkungen der Todesursachen zu beschreiben. Man belegt sie mit dem gemeinsamen Namen Sterblichkeitsmaße oder *biometrische Funktionen.* Es befinden sich darunter absolute Zahlen, wie die Zahlen der Lebenden und der Toten, die Lebenserwartung, die wahrscheinliche Lebensdauer, und Relativzahlen, wie die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit, die Sterblichkeitsintensität, der Sterblichkeitskoeffizient und das zentrale Sterblichkeitsverhältnis. Die biometrischen Funktionen sind nicht unabhängig von einander; vielmehr ist es vermöge der im Laufe der Betrachtung zwischen ihnen nachgewiesenen Relationen möglich, aus einer von ihnen alle andern abzuleiten, eventuell bis auf einen willkürlich zu wählenden Faktor.

Das Problem der Sterblichkeitsmessung wird nun praktisch dahin aufgefaßt, daß man verlangt, es seien die Werte einer der biometrischen Funktionen, gehörig zu einer nach arithmetischer Progression fortschreitenden Wertreihe des Alters x, anzugeben. Die Beschreibung erscheint dann in der Form einer zweispaltigen Tabelle, deren eine Spalte die steigend geordneten Alter enthält, während die andere die zugeordneten Werte der gewählten biometrischen Funktion angibt.

---

1) Wendepunkt in der Kurve der Überlebenden.

Jede so aufgebaute Tafel kann als *Sterbetafel*, Sterblichkeits- oder Mortalitätstafel im weiteren Sinne bezeichnet werden, gleichgültig also, ob sie Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeiten, Sterblichkeitsintensitäten, Lebenserwartungen o. dgl. anführt.

Seit dem ersten wissenschaftlichen Versuche, die menschliche Sterblichkeit zahlenmäßig zu beschreiben, den der englische Astronom E. Halley[1]) unternommen, hat sich vorzugsweise die Reihe der Zahlen l_x der Überlebenden unter dem obigen Namen eingebürgert, die man insbesondere auch mit dem Namen einer *Absterbeordnung* oder einer *Dekremententafel* belegt. Aus praktischen Rücksichten, also nicht, weil es notwendig ist, wird eine solche Tafel zumeist noch durch Angabe anderer biometrischer Funktionen, so insbesondere der Zahlen der Toten d_x, der Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeiten q_x, p_x, mitunter auch der Lebenserwartungen u. a. m. erweitert.

Die bisherigen Entwicklungen sind unter Voraussetzungen geführt worden, welche sich in Wirklichkeit nicht erfüllen lassen; sie hatten daher lediglich den Zweck, die grundlegenden Begriffe festzustellen, nicht aber die Bestimmung, einen praktisch verwendbaren Weg zur Gewinnung einer Sterbetafel anzugeben.

Es ist zunächst angenommen worden, daß die Beobachtungen an einer großen Zahl *gleichzeitig Geborener* ausgeführt werden. Die nächste, der praktischen Ausführbarkeit näher kommende Modalität wäre die, daß man eine *Generation*, d. i. die Geborenen eines ausgedehnten Zeitraumes, etwa eines Kalenderjahres, beobachtet. Aber auch dieser Vorgang erweist sich wegen der dazu erforderlichen langen Beobachtungsdauer und wegen der Schwierigkeit, ja Unmöglichkeit der Evidenzhaltung einer Generation durch die ganze Dauer ihres Bestandes als zur Erreichung eines praktischen Resultates ungeeignet. Man wird genötigt sein, die Beobachtung auf verschiedene Generationen, auf Personen verschiedener örtlicher und zeitlicher Abkunft zu erstrecken je nach dem Zwecke, den man verfolgt.

Es wird nun den Gegenstand der folgenden Erörterungen bilden, nach welchen Methoden es praktisch möglich ist, den Verlauf einer der biometrischen Funktionen zu erforschen, und welche Modifikationen die entwickelten Begriffe unter den Voraussetzungen einer solchen Methode erfahren.

---

1) Der vollständige Titel dieser für die Geschichte der Sterblichkeitsmessung hochbedeutsamen Arbeit lautet: An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. Sie erschien im XVII. Bande der London Philos. Trans. (für das Jahr 1693) und umfaßt 14 Seiten.

§ 2. Formale Bevölkerungstheorie.

217. Geometrische und analytische Hilfsmittel der Darstellung. Die praktische Erledigung von Fragen über Sterblichkeit, Lebensdauer, Dauer eines bestimmten Zustandes etc. setzt die genaue Erfassung jener Vorgänge voraus, durch welche der äußere Umfang und die innere Zusammensetzung einer Menschenmasse bedingt wird, sei dieselbe auf natürlichem Wege (Bevölkerung) oder durch eine auf ein bestimmtes Ziel gerichtete Absicht zusammengeführt worden. Es handelt sich dabei um abstrakte oder formale Beziehungen, die unabhängig sind von der Lage des einzelnen Falles, vielmehr die gemeinsame Grundlage bilden für alle.

Für die Klarstellung dieser Beziehungen haben sich die Hilfsmittel der Geometrie in einer eigenartigen, der Sache angepaßten Anwendung als sehr wertvoll erwiesen; an die geometrische Verbildlichung läßt sich dann eine analytische Formulierung der Ergebnisse anschließen. So hat sich als eine wichtige Grundlage für Untersuchungen des Bevölkerungswechsels eine *formale Bevölkerungstheorie* entwickelt, die wieder, je nach den Mitteln, deren sie sich bedient, in eine *graphische* und eine *analytische Statistik* geschieden werden könnte.

Was die geometrischen Darstellungen betrifft, die schon vermöge ihrer Anschaulichkeit den Ausgangspunkt zu bilden haben, so können sie in zwei Gruppen geschieden werden. Die einen sind individualisierend, insofern sie jedes Individuum der Masse gesondert verfolgen und zur Anschauung bringen; die andern fassen die Masse als Ganzes auf und betrachten die Vorgänge als stetige Funktionen der Zeit. Im schließlichen Erfolg treffen beide zusammen; ihr Resultat sind allgemeine Größenbeziehungen. Vom methodischen Standpunkte möchte wohl den Darstellungen der zweiten Art der Vorzug gegeben werden, weil sie zu einer einfacheren analytischen Formulierung führen; dagegen läßt sich nicht leugnen, daß die Darstellungen der ersten Art eine treuere Wiedergabe der tatsächlichen Vorgänge vermitteln.

Bevor an die Mitteilung der Prinzipien einiger Darstellungen geschritten wird, mögen einige Bemerkungen allgemeiner Natur Platz finden.

Bei bevölkerungsstatistischen (und diesen analogen) Untersuchungen kommt es im Wesen darauf an, die Individuen einer Masse auf das *Bestehen eines Zustandes* oder auf den *Eintritt einer Zustandsänderung* zu beobachten; so sind: leben; ledig, verheiratet, verwitwet sein; aktiv, invalid sein; gesund, krank sein — verschiedene Zustände, um deren Wahrnehmung es sich nicht bloß aus wissenschaftlichem Interesse, sondern auch aus praktischen Gründen handeln kann; ebenso verhält es sich mit Zustandsänderungen wie: Eintritt (aus dem vorgeburt-

lichen Leben) ins Dasein, sterben; heiraten; Witwer (Witwe) werden; invalid werden; erkranken, genesen u. a.

Bei der Beobachtung spielen nun Zeit*punkte* (Zeiten) und Zeit*strecken* (Zeiträume) eine maßgebende Rolle.

Man kann ein statistisch zu erfassendes Moment (Zustand oder Zustandsänderung) im Leben eines Individuums vergleichen mit einem Punkt in einer Strecke, die auf einem Strahle liegt: Der Ursprung O des Strahls ist der Anfangspunkt der bürgerlichen Zeitrechnung, die Strecke stellt den zeitlichen Lebenslauf des Individuums dar; den Punkt wollen wir einen Ereignispunkt nennen und allgemein mit E bezeichnen. Die Lage des Punktes E gegen O bestimmt die Zeit τ der Beobachtung. Es kann aber notwendig sein, auch die relative Lage des Ereignispunktes gegen andere Ereignispunkte desselben Lebenslaufs anzugeben; der Ereignispunkt ist dann durch mehrere Zeitangaben gekennzeichnet, die wir seine *Zeitkoordinaten* nennen wollen.

Einige Beispiele werden dies erläutern.

Ist der Ereignispunkt der Geburtspunkt E_g, so kann nur von *einer* Zeitkoordinate gesprochen werden, von der Geburtszeit z (OE_g).

Bedeutet E_{p_1} den Zeitpunkt der Eheschließung, so erfordert seine Beschreibung die Angabe *zweier* Koordinaten: seinen Abstand von O, das Heiratsdatum, und den Abstand von E_g, das Heiratsalter.

Stellt E_v ein Ereignis im Verlauf der ersten Ehe vor, so sind zu seiner vollständigen Kennzeichnung *drei* Koordinaten notwendig: sein Abstand von O; sein Abstand von E_g, der das momentane Alter, und sein Abstand von E_{p_1}, der die bis zum Ereignis E_v verflossene Ehedauer angibt.

Bildet der Punkt E_{p_2} eine zweite Eheschließung ab, so bedarf es zu seiner Beschreibung der Angabe von *vier* Koordinaten: des Abstandes von O; des Abstandes von E_g, der das zweite Heiratsalter mißt; des Abstandes von E_{p_1}, der den Zeitraum zwischen beiden Eheschließungen bestimmt; endlich des Abstandes von jenem Punkte, der die Lösung der ersten Ehe abbildet, wodurch die Dauer des zwischenehelichen Standes gegeben ist; damit ist implizite auch die Dauer der ersten Ehe bestimmt.

Die Beispiele ließen sich leicht vermehren und komplizierter gestalten.

Die Statistik verzichtet mitunter auf die Berücksichtigung einzelner Zeitkoordinaten; so wird z. B. häufig von dem Datum des Ereignispunktes abgesehen; werden Eheschließungsalter schlechtweg in Betracht gezogen, so heißt dies, daß bei wiederholten Heiraten die zu ihrer Kennzeichnung eigentlich notwendigen Zeitangaben außer acht gelassen werden u. ä. m.

Nach dieser Vorbereitung kann an die Definition eines für die

Statistik überhaupt und für die Sterblichkeitsmessung insbesondere grundlegenden Begriffes geschritten werden.

Eine Masse, deren Individuen durch ein gemeinsames, statistisch zu erfassendes Moment zusammengehalten werden mit der Maßgabe, daß zwischen den Zeitkoordinaten dieses Moments bei den einzelnen Individuen eine vorgeschriebene Relation besteht, wird als eine ***statistische Gesamtheit*** *bezeichnet.*

Von der Zahl der Koordinaten hängt, wenn man die mathematische Ausdrucksweise weiter beibehält, die Ausdehnung oder die *Mächtigkeit* der Gesamtheit ab.

Wenden wir uns jetzt der Beobachtung einer Masse lediglich in bezug auf Leben und Sterben zu, so kommen drei Zeitangaben in Betracht, zwischen denen aber eine Gleichung besteht, so daß nur zwei als unabhängig voneinander gelten können, nämlich:

Die *Geburtszeit* t;

die *Beobachtungs-* (oder Erfüllungs-)Zeit τ für einen bestimmten Ereignispunkt (sei es der Zustand des Lebens oder die Zustandsänderung des Sterbens);

das *Alter* x bei diesem Ereignispunkt;

die Gleichung zwischen diesen Größen lautet:

$$t + x = \tau.$$

Jede geometrische Darstellung muß diese drei Zeiten entnehmen lassen.

Bei den individualisierenden Methoden entspricht jeder Person eine *Lebenslinie*, deren Anfangspunkt die Geburt, deren Endpunkt das Sterben bedeutet[1]). Die Ebene, in welcher die Darstellung erfolgt, wird dadurch zur Trägerin eines Systemes (paralleler) Lebenslinien, einer Reihe von Geburtspunkten und eines Systemes von Sterbepunkten. Für die Zusammenfassung der Individuen nach gewissen Merkmalen zu *Gesamtheiten* ist eine dreifache Zerlegung der Masse von Wichtigkeit: nach der Geburtszeit, nach dem Alter und nach der Beobachtungszeit. Diese Zerlegung erfolgt bei der Darstellung in der Ebene durch drei Arten von Scheidungslinien: solche nach der Geburtszeit (t); solche nach dem Alter (x); solche nach der Beobachtungs- oder Erfüllungszeit (τ). Eine Linie (t) trennt also die Masse in einen Teil, dessen Geburt vor der Zeit t, und einen Teil, dessen Geburt nach der Zeit t erfolgt ist; eine Linie (x) trennt alle Ereignisse, welche bei den Individuen der Masse eingetreten sind, bevor sie das Alter x erreicht hatten, von Ereignissen, die nach dem Alter x

1) Bei Individuen, welche erst nach der Geburt in die Masse eintreten und eventuell vor dem Tode aus ihr scheiden, tritt an die Stelle der Lebenslinie eine *Beobachtungslinie*.

eintrafen, und in gleicher Weise scheidet eine Linie (τ) Ereignisse vor der Zeit τ von solchen nach dieser Zeit.

Bei der Darstellung von K. Becker[1]) (Fig. 21) werden Geburtszeit t und Erfüllungszeit τ auf zwei zueinander senkrechten Achsen OT und $O\mathcal{T}$ vom gemeinsamen Nullpunkte O aus aufgetragen. Die Lebenslinien GS sind parallel zu $O\mathcal{T}$, die Geburtspunkte G liegen in der Halbierungslinie Og des Winkels $TO\mathcal{T}$; die Alter x werden auf der zu Og senkrechten Geraden OX gemessen. Es ist also, wenn S den Sterbepunkt bedeutet, $OA = t$ die Geburtszeit, $OB = x$ das Sterbealter und $OC = \tau$ die Sterbezeit der betreffenden Person[2]). Die Scheidelinien (t), (x), (τ) sind der Reihe nach parallel zu $O\mathcal{T}$, Og, OT; sie lassen in dem durch die Figur dargestellten Falle erkennen, daß die Person, deren Lebenslinie GS ist, geboren wurde vor der Zeit OA', gestorben ist vor Erreichung des Alters OB' und vor der Zeit OC'.

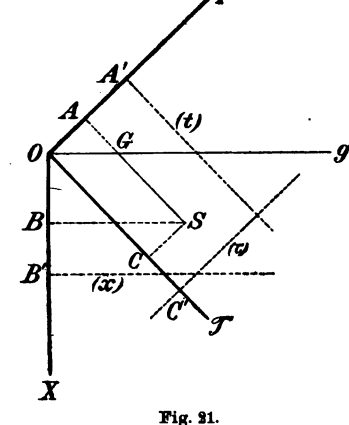


Fig. 21.

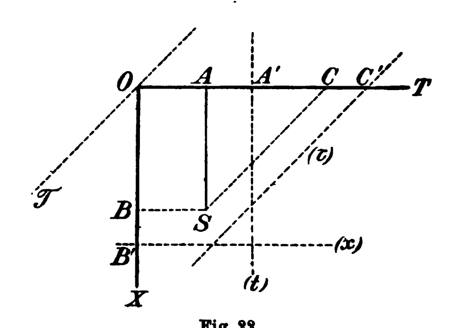


Fig. 22.

Die Darstellung, welche W. Lexis[3]) gewählt hat, bedient sich einer Zeitachse OT und einer Altersachse OX, die aufeinander senkrecht stehen (Fig. 22). Die Lebenslinien AS sind parallel OX, die Geburtspunkte A liegen auf OT. Um die Erfüllungszeit des Ereignisses S auf OT abzuschneiden, wird SC parallel zu der Geraden $O\mathcal{T}$ gezogen, die auf der Halbierungslinie von TOX senkrecht steht. Bedeutet also S den Sterbepunkt, so ist $OA = t$ die Geburtszeit, $OB = x$ das Sterbealter und OC die Sterbezeit der verbildlichten Person. Die Scheidungslinien (t), (τ), (x) sind der Reihe nach zu OX, OT, $O\mathcal{T}$ parallel.

---

1) Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Berlin 1874.

2) Da die Alter x hier nach einem andern ($\sqrt{2}$ mal kleineren) Maßstabe aufgetragen sind als t und τ, so besteht in der geometrischen Darstellung die Beziehung $t + x = \tau$ nicht; es ist vielmehr $OA + OB\sqrt{2} = OC$.

3) Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Straßburg 1875, p. 5.

Lexis hat an demselben Orte[1]) eine Modifikation seiner Darstellung angegeben, die sich von der früheren dadurch unterscheidet, daß die drei Linien OT, OX, $O\mathcal{T}$ der Reihe nach Winkel von 60° einschließen (Fig. 23). Die Scheidelinien begrenzen dann gleichseitige Dreiecke, während sie früher gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke gebildet haben. Dies ist zugleich das Prinzip jener Methode, welche Lewin 1876 in einer Denkschrift dem statistischen Kongresse in Budapest vorgelegt hat.

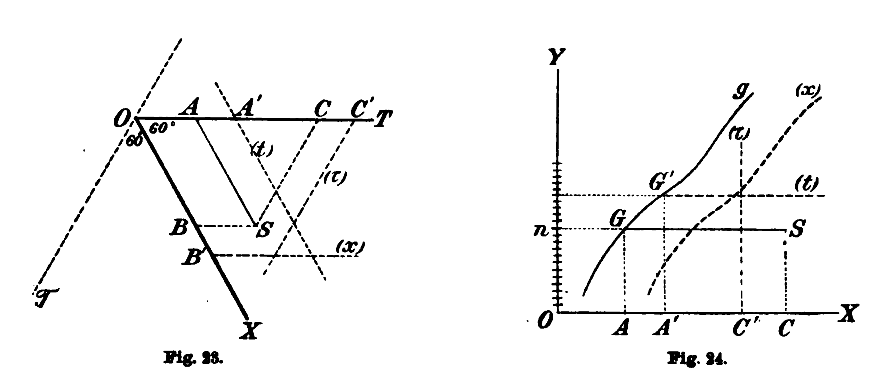


Fig. 23. Fig. 24.

Verschieden von den bisherigen ist die zweite Darstellung, die G. F. Knapp[2]) gegeben hat. Bei ihr werden alle Zeiten auf *einer* Achse, OX (Fig. 24), ersichtlich gemacht, während auf der andern, dazu senkrechten Achse OY den Individuen der Masse in der Reihenfolge ihrer Geburt äquidistante Punkte zugewiesen sind. Durch die Ordnungszahl n und die Geburtszeit $OA = t$ eines Individuums ist dessen Geburtspunkt G bestimmt, die Lebenslinie GS, parallel zu OX, zeigt durch ihre Länge $AC = x$ das Sterbealter an, und $OC = \tau$ ist die Sterbezeit. Die Ortslinie g der Geburtspunkte läßt die (wechselnde) Raschheit in der Aufeinanderfolge der Geburten erkennen. Die Scheidungslinien (t), (x), (τ) sind der Reihe nach den Linien OX, g, OY parallel; (x) ist die um x in der Richtung OX verschobene g[3]).

218. Fortsetzung. Indem wir nun dazu übergehen, die Ver-

1) Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Straßburg 1875, p. 13.

2) Die Sterblichkeit in Sachsen. Leipzig 1869, p. 113 ff., und: Theorie des Bevölkerungswechsels. Braunschweig 1874, p. 26 ff. — Knapps erste und zugleich die älteste Darstellung gehört nicht zu den individualisierenden; wir gehen auf sie nicht näher ein, weil die in der nächsten Nummer behandelte Darstellung dasselbe in viel vollkommenerer Form leistet, und erwähnen nur, daß Knapp sie in der Schrift: Über die Ermittelung der Sterblichkeit, Leipzig 1866, veröffentlicht hat.

3) Vgl. zu diesem Artikel: L. Perozzo, Della rappresentazione di una collectività etc., Annali di Statistica (2), XII (1880), deutsch von W. Lexis, Jahrb. f. Nationalök. u. Statist. 35 (1880).

änderungen einer menschlichen Masse, soweit es sich um Geburten und Sterbefälle handelt, als stetig in bezug auf den Verlauf zu betrachten und die aus dieser Vorstellung entsprungene geometrische Darstellung G. Zeuners[1]) zu entwickeln, beginnen wir mit einer analytischen Betrachtung, deren Ausgangspunkt eine Funktion von unmittelbar verständlicher Bedeutung ist.

Nach Knapps[2]) Vorgang wollen wir unter $F(t, x)$ die Menge derjenigen verstehen, die von einem festen Zeitpunkte an bis zur Zeit t geboren das Alter x erreicht haben. Indem wir $F(t, x)$ als stetige und nach beiden Argumenten differentiierbare Funktion auffassen, wird

$$F(t + dt, x) - F(t, x) = f(t, x)dt \tag{1}$$

die Menge jener im Zeitintervall $(t, t + dt)$ Geborenen sein, die das Alter x erreicht haben; dabei bedeutet

$$z = f(t, x), \tag{2}$$

nämlich der partielle Differentialquotient von $F(t, x)$ nach t, die *Überlebensdichtigkeit* der zur Zeit t Geborenen im Alter x.

Weiter ist

$$-[f(t, x + dx) - f(t, x)]dt = \varphi(t, x)dtdx \tag{3}$$

oder der negativ genommene zweite Differentialquotient von $F(t, x)$ die Menge derjenigen aus dem Intervall $(t, t + dt)$ Geborenen, welche in dem Altersinterall $(x, x + dx)$ sterben; es bedeutet also

$$\zeta = \varphi(t, x), \tag{4}$$

nach t und x, die *Sterbensdichtigkeit* der zur Zeit t Geborenen im Alter x.

Die Fläche, die sich durch Interpretation der Gleichung (2) in einem rechtwinkligen Raumkoordinatensystem mit den Achsen OT, OX, OZ ergibt, bildet die Grundlage der Zeunerschen Darstellung. Die Fig. 25 soll ein ideelles Bild jenes Teiles der Fläche geben, der von den Kurven

$$z = f(t, 0), \quad z = f(t_1, x), \quad z = f(t_2, x), \quad 0 = f(t, x)$$

begrenzt wird.

Die erste dieser Kurven: $(x = 0)$, $z = f(t, 0)$, veranschaulicht den Verlauf der *Geburtendichtigkeit* und soll *Geburtenkurve* heißen; der Bogen $G_1 G_2$ entspricht dem Zeitraume von $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$.

Die zweite Kurve: $(t = t_1)$, $z = f(t_1, x)$ zeigt die Abnahme der zur Zeit $OA_1 = t_1$ Geborenen mit dem zunehmenden Alter; daher soll

1) Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik. Leipzig 1869.

2) Die Sterblichkeit in Sachsen, p. 112, und: Theorie des Bevölkerungswechsels, p. 32.

$G_1 S_1$ die *Absterbekurve* für die Geburtszeit t_1 heißen. Eine ähnliche Bedeutung hat die dritte Kurve: $(t = t_2)$, $z = f(t_2, x)$, nämlich $G_2 S_2$, für die Geburtszeit $OA_2 = t_2$. Diese Kurven fallen im allgemeinen verschieden aus nicht bloß deshalb, weil die relativen Mengen der Geburten zu den Zeiten t_1, t_2, dargestellt durch $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, verschieden sind, sondern weil auch anzunehmen ist, daß die zu verschiedenen Zeiten Geborenen in ungleicher Weise absterben.

Die vierte Kurve endlich: $(z = 0)$, $0 = f(t, x)$, in der Figur durch $S_1 S_2$ dargestellt, versinnlicht den Zusammenhang zwischen der Geburtszeit und dem *höchsten Alter*, das die aus ihr Stammenden erreichen. Hiernach wäre $OB_1 = x_1$ das Alter der zuletzt Gestorbenen aus der Geburtszeit $OA_1 = t_1$ und $OC_1 = t_1 + x_1 = \tau_1$ die Erfüllungs-

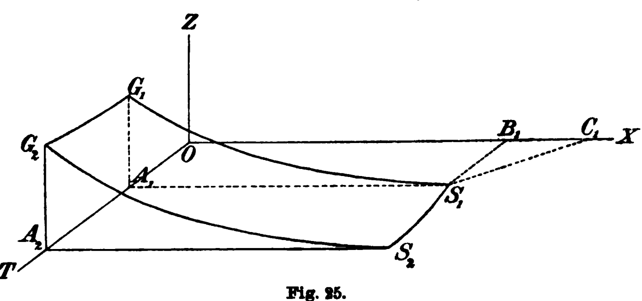


Fig. 25.

zeit dieses Alters, wenn $S_1 C_1$ so gezogen wird, daß der Winkel $S_1 C_1 B_1$ gleich 45^0 ist. Die letzte Bemerkung zeigt zugleich, wie auf der Achse OX außer dem Alter x auch die Erfüllungszeit τ zum Ausdruck zu bringen ist.

Man kann indessen für viele Zwecke von der räumlichen Darstellung absehen und lediglich mit der Ebene OTX (Fig. 26) operieren, die man sich auf zweierlei Art mit Funktionswerten belegt denkt: einmal mit den Werten der Überlebensdichtigkeit $f(t, x)$, ein zweites Mal mit den Werten der Sterbensdichtigkeit $\varphi(t, x)$; beide Werte gehören zu dem Punkte $M(t, x)$, und die Beobachtungszeit des Ereignisses, das diesem Punkte entspricht, ist $OC = \tau$.

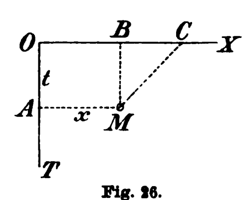


Fig. 26.

219. Allgemeine Sätze über Gesamtheiten von Lebenden und Gestorbenen. *Erster Satz:* „Ist $\chi(t)$ eine eindeutige Funktion und $x = \chi(t)$ die Gleichung einer Kurve in der Ebene OTX, so ist das über den Bogen $M_1 M_2$ (Fig. 27) dieser Kurve erstreckte Integral der Funktion $f(t, x)$ der Ausdruck für die Menge der aus der Zeit (t_1, t_2) Geborenen, welche das durch $M_1 M_2$ gesetzte Alter erreicht haben."

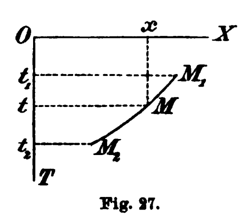


Fig. 27.

Denn es ist tatsächlich

$$\int\limits_{\widehat{M_1 M_2}} f(t, x)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[t, \chi(t)]\,dt$$

vermöge der Bedeutung von $f(t, x)$ die Menge derjenigen, zwischen deren Geburtszeit und Alter die Beziehung $x = \chi(t)$ besteht.

Mit Bezugnahme auf die Zeunersche Fläche interpretiert besagt dieser Satz folgendes: Der Durchschnitt $M_1 M_2 P_2 P_1$ der Fläche Fig. 28 mit einem zur z-Achse parallelen Zylinder gibt in seiner Projektion $A_1 A_2 Q_2 Q_1$ auf der TZ-Ebene die Menge derjenigen, die in der Zeit (t_1, t_2) geboren, die durch die Kurve $M_1 M_2$ begrenzten Alter erreicht haben.

Bei den Darstellungen der Nr. 215 würde diese allgemeine *Gesamtheit von Lebenden* durch die Zahl der Schnittpunkte bestimmt, welche die Kurve $M_1 M_2$ mit den Lebenslinien ergibt.

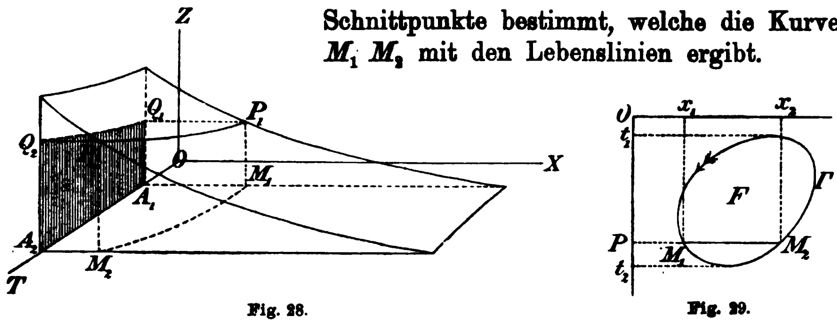


Fig. 28. Fig. 29.

Zweiter Satz: „Das über eine Figur F (Fig. 29) ausgedehnte Integral der Funktion $\varphi(t, x)$, das auch gleichkommt dem im Sinne des Pfeiles über den Umriß Γ der Figur erstreckten Integral der Funktion $f(t, x)$, bedeutet die Menge der in dem Zeitraume (t_1, t_2) Geborenen, welche zwischen den durch Γ bezeichneten Altersgrenzen gestorben sind.“

Der eine Teil der Aussage folgt unmittelbar aus der Bedeutung von $\varphi(t, x)$ als Dichtigkeit der Sterbefälle an der Stelle $t \mid x$. Weil ferner

$$\varphi(t, x) = -\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial f(t, x)}{\partial x},$$

so ist

$$\iint\limits_F \varphi(t, x)\,dt\,dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\,dx$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\,dt + \int\limits_{t_2}^{t_1} f(t, x_2)\,dt = \int\limits_{\Gamma} f(t, x)\,dt.$$

Bei geometrischer Interpretation an der Zeunerschen Fläche ist diese allgemeine *Gesamtheit der Gestorbenen* durch die TZ-Projektion jenes Teiles der Fläche dargestellt, der sich auf der TX-Ebene in die Figur F projiziert (siehe Fig. 30). Bei den Diagrammen der Nr. 215 wäre sie durch die Anzahl der Sterbepunkte bestimmt, welche in die Figur F zu liegen kommen.

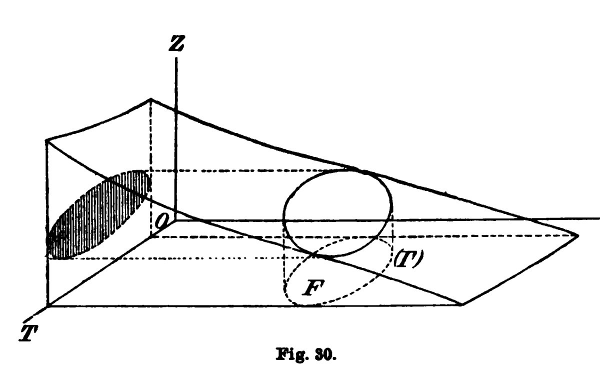


Fig. 30.

220. Hauptgesamtheiten der Lebenden. Unter den denkbaren Gesamtheiten Lebender und Gestorbener gibt es nur eine relativ kleine Anzahl solcher, die bei der Sterblichkeitsmessung Verwendung finden; auch sind es nur wenige, die sich, zumal in ganzen Bevölkerungen, statistisch leicht erheben lassen. Bezüglich der Lebenden sind folgende Gesamtheiten von Wichtigkeit.

Die *erste Hauptgesamtheit der Lebenden* ist die Gesamtheit der *Gleichaltrigen*. Sie ist im geometrischen Bilde (Fig. 31) durch eine zu OT parallele Strecke $B_1 B_2$ dargestellt und zählt die Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren ein bestimmtes Alter x erreicht haben. Die Erfüllung dieses Alters erfolgt aber nicht gleichzeitig; von der ersten Person der Gesamtheit wird es zur Zeit

Fig. 31.

$$\tau_1 = t_1 + x,$$

von der letzten zur Zeit

$$\tau_2 = t_2 + x$$

vollendet; ist also die Geburtsstrecke einjährig, so ist auch die Dauer der Erfüllung eines bestimmten Alters einjährig.

Analytisch ist diese Gesamtheit durch

$$V_x = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dt$$

ausgedrückt; ein besonderer Fall derselben ist die *Geburtenmenge* aus der Zeitstrecke (t_1, t_2), im Bilde durch die Strecke $A_1 A_2$ vertreten, analytisch durch

$$V_0 = \int_{t_1}^{t_2} f(t, 0)\, dt$$

bestimmt.

Für die Bevölkerungsstatistik hat diese Hauptgesamtheit nur theoretische Bedeutung; ihre direkte Erhebung ist nur dort möglich, wo Individualbeobachtung gepflogen wird, also in geschlossenen Gesellschaften. In der Bevölkerungsstatik wird sie auf andere, zählbare Gesamtheiten zurückgeführt.

Die *zweite Hauptgesamtheit der Lebenden* ist die Gesamtheit der *Gleichzeitiglebenden* oder der *Gezählten*. Im Bilde (Fig. 32) entspricht ihr eine gegen OT und OX gleich geneigte Strecke $C_1 C_2$. Sie umfaßt Personen, welche in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren zur Zeit τ am Leben sind, *gezählt* werden; dieselben stehen in verschiedenen Altern, und zwar haben die jüngsten das Alter

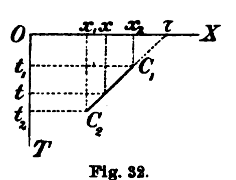


Fig. 32.

$$x_1 = \tau - t_2,$$

die ältesten das Alter

$$x_2 = \tau - t_1,$$

so daß sie einer einjährigen Altersklasse angehören, wenn die Generation einjährig war.

Der analytische Ausdruck für diese Gesamtheit ist[1])

$$V_\tau = \int\limits_{\overline{C_1 C_2}} f(t, x)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t, \tau - t)\,dt.$$

Diese Gesamtheit wird bei Volkszählungen unmittelbar erhoben, wenn die Gezählten nach Kalenderjahren der Geburt geschieden werden. So stehen bei einer am 31. Dezember 1900 vorgenommenen Volkszählung die Personen aus dem Geburtsjahre 1850 (d. i. vom 1. Januar bis 31. Dezember 1850) auf der Altersstufe von 50 bis 51.

221. Hauptgesamtheiten von Gestorbenen. Der *ersten Hauptgesamtheit von Gestorbenen* entspricht im geometrischen Bilde (Fig. 33) ein Rechteck $B_1 B_2 B_2' B_1'$ mit zu den Achsen parallelen Seiten. Die Gesamtheit besteht aus Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren, nach Vollendung des Alters x_1 und vor Vollendung des Alters x_2 gestorben sind. Das Sterben erfolgte zu verschiedenen Zeiten, bei den ersten zur Zeit

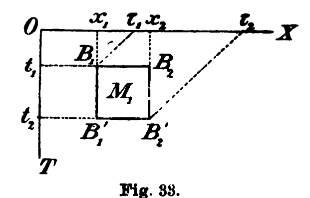


Fig. 33.

$$\tau_1 = t_1 + x_1,$$

1) Man kann in dem Zeichen der vorstehenden Gesamtheiten auch die andern sie bestimmenden Momente zum Ausdruck bringen und für V_x vollständiger schreiben $V_x^{t_1/t_2}$ oder $V_x^{\tau_1/\tau_2}$ usw., ebenso für V_τ schreiben $V_\tau^{x_1/x_2}$ oder $V_\tau^{t_2/t_1}$ usw. Vgl. E. Blaschke, Vorlesungen über Math. Statistik, Leipzig 1906, p. 28 ff.

bei den letzten zur Zeit

$$\tau_2 = t_2 + x_2.$$

Im ganzen ist also zur Erhebung dieser Gesamtheit der Zeitraum

$$\tau_2 - \tau_1 = t_2 - t_1 + x_2 - x_1,$$

speziell ein Zeitraum von *zwei* Jahren erforderlich, wenn einjährige Generationen und einjährige Altersstufen beobachtet werden. Beispielsweise sterben die im Kalenderjahre 1890 Geborenen auf der Altersstufe von 20 bis 21 Jahren in den beiden Kalenderjahren 1909 und 1910.

Der analytische Ausdruck dieser Gesamtheit ist

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t, x)\,dt\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_2)\,dt;$$

in der letzten Form erscheint M_1 als Differenz von zwei ersten Hauptgesamtheiten Lebender, nämlich

$$M_1 = V_{x_1} - V_{x_2},$$

eine Relation, die aus der Zeunerschen Darstellung unmittelbar zu entnehmen ist.

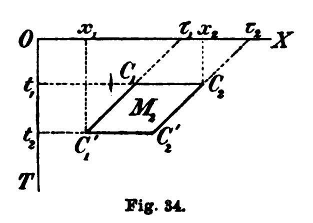


Fig. 34.

Die *zweite Hauptgesamtheit der Gestorbenen* ist im Bilde (Fig. 34) durch ein Parallelogramm $C_1 C_2 C_2' C_1'$ vertreten, von dem zwei Seiten parallel zu OX, die zwei andern unter 45° geneigt sind. Sie besteht aus den Personen, die in der Zeitstrecke (t_1, t_2) geboren, nach der Zeit τ_1 und vor der Zeit τ_2 gestorben sind. Das Sterben geschah in verschiedenen Altern, bei den jüngsten im Alter

$$x_1 = \tau_1 - t_2,$$

bei den ältesten im Alter

$$x_2 = \tau_2 - t_1,$$

so daß sich die Alter in einem Intervall von

$$x_2 - x_1 = \tau_2 - \tau_1 + t_2 - t_1,$$

also speziell von *zwei* Jahren bewegen, wenn die Gestorbenen aus einem Kalenderjahre stammen und in einem Kalenderjahre beobachtet wurden. So stehen beispielsweise die im Kalenderjahre 1900 verzeichneten Verstorbenen aus dem Geburtsjahre 1850 im Alter von 49 bis 51 Jahren.

Analytisch drückt sich diese Gesamtheit durch

$$M_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\tau_1 - t}^{\tau_2 - t} \varphi(t, x)\,dt\,dx$$

aus, kann aber auch durch Hauptgesamtheiten zweiter Art von Lebenden dargestellt werden, indem

$$M_2 = V_{\tau_1} - V_{\tau_2}$$

ist.

Die *dritte Hauptgesamtheit von Gestorbenen* ist im Bilde (Fig. 35) durch ein Parallelogramm dargestellt, von dem zwei Seiten parallel zu OT, zwei unter 45° geneigt sind. Sie umfaßt Personen, welche nach der Zeit τ_1 und nach Vollendung des Alters x_1, jedoch vor der Zeit τ_2 und vor Vollendung des Alters x_2 gestorben sind. Sie stammen aus verschiedenen Geburtszeiten, und zwar die ersten und ältesten aus der Zeit

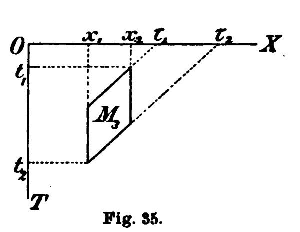


Fig. 35.

$$t_1 = \tau_1 - x_2,$$

die letzten und jüngsten aus der Zeit

$$t_2 = \tau_2 - x_1;$$

die Zeitstrecke der Geburten hat also die Länge

$$t_2 - t_1 = \tau_2 - \tau_1 + x_2 - x_1.$$

Hiernach gehören die während eines Kalenderjahres beobachteten Sterbefälle einer einjährigen Altersklasse *zwei* Geburtsjahren an; beispielsweise die im Jahre 1910 beobachteten Gestorbenen von 30 bis 31 Jahren den Kalenderjahren 1879 und 1880.

Der analytische Ausdruck dieser Gesamtheit ist[1])

$$M_3 = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\tau_1 - x}^{\tau_2 - x} \varphi(t, x) dt dx.$$

Sie kann übrigens auch durch Hauptgesamtheiten erster und zweiter Art von Lebenden ausgedrückt werden, und zwar ist

$$M_3 = V_{\tau_1} + V_{x_1} - V_{\tau_2} - V_{x_2};$$

jedoch beziehen sich die rechts stehenden Gesamtheiten auf verschiedene Geburtsstrecken, die man aus der Figur unmittelbar abliest, nämlich

1) Will man die vorstehenden Gesamtheiten vollständiger symbolisieren, so sind die sie kennzeichnenden Zeitbestimmungen hinzuzufügen; man kann so für M_1 schreiben $M_{x_1/x_2}^{t_1/t_2}$, für M_2 das Zeichen $M_{\tau_1/\tau_2}^{t_1/t_2}$ und für M_3 das Zeichen $M_{x_1/x_2}^{\tau_1/\tau}$ verwenden. Vgl. E. Blaschke, Vorlesungen über Math. Statistik, Leipzig 1906, p. 30 ff.

V_{τ_1} auf $\tau_1 - x_2$ bis $\tau_1 - x_1$

V_{x_1} „ $\tau_1 - x_1$ „ $\tau_2 - x_1$

V_{τ_2} „ $\tau_2 - x_2$ „ $\tau_2 - x_1$

V_{x_2} „ $\tau_1 - x_2$ „ $\tau_2 - x_2$.

222. Elementargesamtheiten von Gestorbenen. Die vorhin betrachteten Hauptgesamtheiten von Gestorbenen kennzeichnen sich dadurch, daß im geometrischen Bilde zweierlei Scheidelinien an ihrer Begrenzung teilnehmen; bei M_1 sind es Linien (t) und (x); bei M_2 Linien (t) und (τ); bei M_3 Linien (x) und (τ). Wenn man bei zweien der maßgebenden Größen ein einjähriges Intervall annimmt, stellt sich jedesmal für die dritte ein zweijähriges Intervall heraus.

Für das Problem der Sterblichkeitsmessung von Bevölkerungen haben sich Gesamtheiten als wichtig und notwendig erwiesen, die im Bilde durch Linien aller drei Arten begrenzt die Form von Dreiecken haben; man bezeichnet sie nach Lexis[1]) als *Elementargesamtheiten.* Es gibt deren zwei Arten.

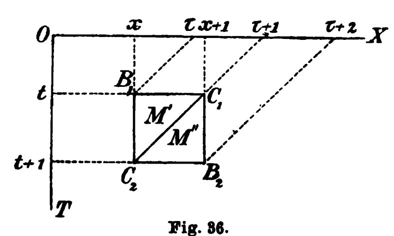


Fig. 36.

Die Gesamtheit M', dargestellt durch das Dreieck $B_1 C_1 C_2$ (Fig. 36), umfaßt Personen aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$, die im Kalenderjahre $(\tau, \tau+1)$ auf der Altersstufe $(x, x+1)$ gestorben sind, wobei zwischen t, τ und x die Beziehung $\tau = t + x$ besteht.

Die Gesamtheit M'', dargestellt durch das Dreieck $C_1 C_2 B_2$, vereinigt Personen desselben Geburtsjahres und derselben Altersstufe, die aber in dem Kalenderjahre $(\tau+1, \tau+2)$ gestorben sind.[2])

Elementargesamtheiten von Gestorbenen erstrecken sich also auf ein Geburtsjahr, ein Beobachtungsjahr und eine einjährige Altersklasse. Ihre große Bedeutung liegt in dem Zusammenhange, den sie mit den Hauptgesamtheiten der Lebenden aufweisen. Man entnimmt der Figur sofort, daß die durch $B_1 C_2$ repräsentierte Gesamtheit von Lebenden durch den Abgang von M' sich verwandelt in die Lebendengesamtheit $C_1 C_2$, und diese wieder durch den weiteren Abgang von M'' in die Lebendengesamtheit $C_1 B_2$; in Zeichen heißt dies:

---

1) Einleitung in die Theor. d. Bevölk.-Statist., p. 13. Ihre Bedeutung für den angeführten Zweck ist schon von G. Meyer, Jahrb. f. Nat.-Ök. u. Statist. VIII (1867), p. 19, hervorgehoben und dann von Knapp, Becker u. a. begründet worden.

2) Will man bei den Elementargesamtheiten auch die Zeitbestimmungen ersichtlich machen, so kann man sich für M', M'' der Symbole ${}_xM^t_{\tau+1}$ ${}_{\tau+1}M^{t+1}_{x+1}$ oder ähnlicher bedienen. Vgl. E. Blaschke, l. c., p. 34ff.

$$V_x - M' = V_{\tau+1}$$
$$V_{\tau+1} - M'' = V_{x+1}.$$

Erwägt man nun, daß die Gesamtheit $V_{\tau+1}$ der Beobachtung zugänglich ist (Volkszählung), und daß auch die Gesamtheiten M', M'' erhoben werden können — man hat nur die Gestorbenen nach Geburtsjahren *und* Altersklassen zu sondern —, so bieten diese Relationen das Mittel zur Feststellung der Hauptgesamtheiten erster Art, V_x, V_{x+1}, von welchen in Nr. 220 bemerkt wurde, daß sie der direkten Beobachtung unzugänglich sind.

Übrigens erkennt man aus den Diagrammen, daß jede Hauptgesamtheit von Gestorbenen, die sich auf einjährigen Intervallen aufbaut, durch eine Diagonale in Elementargesamtheiten zerlegt wird.

§ 3. Sterbetafeln.

223. Sterbetafeln aus bevölkerungsstatistischem Material. Das wissenschaftliche oder biologische Interesse an der Sterblichkeitsuntersuchung wäre in erster Linie auf die Feststellung des Verlaufes im Absterben einer *Generation*, d. h. der Geborenen eines oder mehrerer Kalenderjahre aus einer großen Gemeinschaft, der Bevölkerung eines Landes oder einer Stadt, gerichtet. Diese Aufgabe könnte durch Beobachtung der aus der Generation hervorgehenden Elementargesamtheiten von Gestorbenen voraussetzungslos nur dann gelöst werden, wenn weder Ein- noch Auswanderung stattfände. Ein solches Material wäre geeignet, den Verlauf des Absterbens sowohl *nach der Zeit* wie *nach dem Alter* darzustellen, d. h. die Hauptgesamtheiten der Lebenden in jahrweisen Absätzen zu bestimmen. Wie nämlich aus Fig. 37 ersichtlich, wären

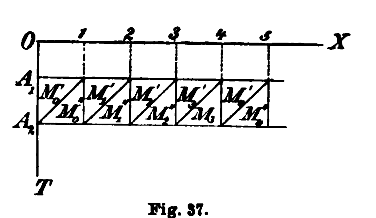


Fig. 37.

die *Überlebenden nach 1, 2, 3, ⋯ Jahren*, vom Beginne des Geburtsjahres der Generation gerechnet, durch folgende Zahlenreihe dargestellt:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V_0 - M_0' \\ V^{(2)} &= V^{(1)} - M_0'' - M_1' \\ V^{(3)} &= V^{(2)} - M_1'' - M_2', \end{aligned} \qquad (1)$$

wo V_0 die Geburtenmenge, also die Stärke der Generation bedeutet, die sich übrigens aus den beobachteten Sterbefällen von selbst ergibt, indem nach (1)

$$V_0 = M_0' + M_0'' + M_1' + M_1'' + \cdots$$

ist. Dagegen hätte man für die *Überlebenden bei den Altern von 1, 2, 3, ⋯ Jahren* die Werte

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - M_0' - M_0'' \\ V_2 &= V_1 - M_1' - M_1'' \\ V_3 &= V_2 - M_2' - M_2'' \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Reihe, am Anfange durch V_0 ergänzt, wäre es, die unter der Bezeichnung

$$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots$$

den Ausgangspunkt zur Bestimmung der übrigen biometrischen Funktionen gebildet hat (s. Nr. 212).

Die lange Beobachtungsdauer ist jedoch eines der Haupthindernisse der praktischen Durchführung dieses Vorganges.

Man könnte nun daran denken, durch Verzeichnung der Sterbefälle *eines* Beobachtungsjahres nach Hauptgesamtheiten dritter Art das Material zu gewinnen, um das Absterben einer Generation darzustellen. Das setzte aber das Vorhandensein von Bedingungen voraus, die sich längst als unzutreffend erwiesen haben. Es müßte nämlich das Absterben aller Generationen, welche jener des Beobachtungsjahres bis zur längsten Lebensdauer vorangehen, in gleicher Weise vor sich gegangen sein und alle in Betracht gezogenen Generationen müßten von gleicher Stärke und gleichartiger Verteilung über das Jahr sein. Unter diesen Voraussetzungen wären nämlich die beobachteten parallelogrammatischen Hauptgesamtheiten $M_0, M_1, M_2, \cdots$ von Verstorbenen gleich den korrespondierenden quadratischen der Fig. 38, und man hätte in den Zahlen

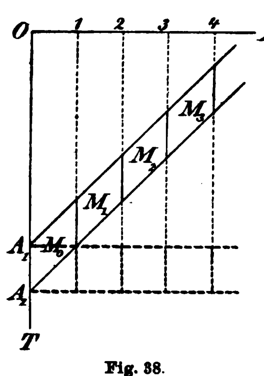


Fig. 38.

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - M_0 \\ V_2 &= V_1 - M_1 \\ V_3 &= V_2 - M_2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

die Reihe der Überlebenden nach dem Alter, auf eine Generation bezogen. Dabei wäre auf Grund der obigen Gleichungen $V_0 = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots$ die ursprüngliche Geburtenmenge und $V_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots$ die Zahl der Überlebenden des Alters x, so daß die Reihe der Überlebenden durch Aufsummierung der während eines Kalenderjahres beobachteten, nach Altersjahrgängen steigend geordneten Toten von unten nach aufwärts erhalten würde. Dieser Gedanke lag

der von Halley[1]) benutzten Methode zur Herstellung der *ersten* Sterbetafel zugrunde.

Aus dritten Hauptgesamtheiten von Gestorbenen und zweiten Hauptgesamtheiten von Lebenden in bestimmter Anordnung und bei Kenntnis der Geburtenmengen aller in Betracht kommenden Generationen ließe sich das Absterben einer Generation *angenähert*, aber nicht voraussetzungslos, ermitteln[2]). Angenommen, man hätte während der Kalenderjahre $(\tau - 1, \tau)$ und $(\tau, \tau + 1)$ dritte Hauptgesamtheiten von Gestorbenen erhoben und an der Grenze zwischen den zwei Jahren eine Zählung nach Altersklassen vorgenommen; M, M_1, V_τ seien die auf die Altersklasse $(x, x + 1)$ bezüglichen Zahlen. Fig. 39 zeigt, daß die Gestorbenen aus drei Jahrgängen stammen, deren Geburtenmengen V_0, V_0', V_0'' als bekannt vorausgesetzt werden. Nimmt man nun an, daß die Gestorbenen eines Geburtsjahres *und* einer Altersklasse sich nach Geburtszeit und Alter gleichförmig verteilen, so sind die beiden Elementargesamtheiten m'' und m_1', welche die quadratische Gesamtheit aus dem mittleren Geburtsjahre zusammensetzen, einander gleich; wenn ferner das Absterben aller Generationen als gleichartig vorausgesetzt wird, so unterscheiden sich die Elementargesamtheiten m' und m_1', m'' und m_1'' *nur* insofern voneinander, als sie aus verschiedenen Geburten-

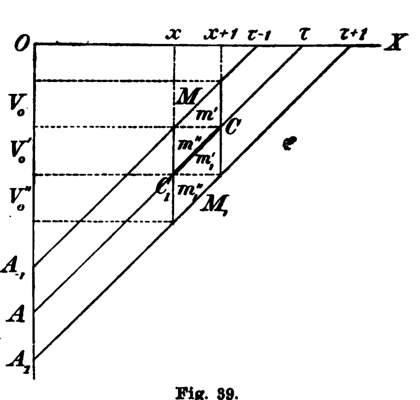


Fig. 39.

1) Vgl. hierzu die Fußnote zu Nr. 216. — Halley war sich indessen der Unzulänglichkeit und des hypothetischen Charakters seines Verfahrens wohl bewußt; aus dem Beobachtungsmaterial, das ihm vorlag, konnte er aber einen besseren Schluß nicht ziehen. Seine Methode ist, mit mehr oder weniger belangreichen Modifikationen, zur Konstruktion einer Reihe von Tafeln benutzt worden; es wurde auch der Versuch gemacht, sie *nach einer Richtung*, was nämlich die Stärke der Generationen betrifft, durch Rückverfolgung der Geburtenmengen sowie auf Grund der „Vermehrungshypothese", die L. Euler in der Abhandlung: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain (Mém. de l'Acad. de Berlin, XVI (1767) p. 144ff) aufgestellt hat und die dahin lautet, daß *das jährliche Wachstum der Geburtenmenge und der Bevölkerung nach einer geometrischen Progression vor sich gehe,* zu verbessern. Die letzterwähnte Hypothese hat heute nicht bloß historischen Wert, sie wird auch als eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse praktisch verwendet und mag dazu für nicht allzulange Zeiträume auch geeignet sein. Ihren numerischen Ausdruck findet die Hypothese in dem *Vermehrungsfaktor*, der eine dem Aufzinsungsfaktor analoge Bedeutung hat. — Über die Tafeln, die nach der Halleyschen Methode hergestellt worden sind, und über die versuchten Verbesserungen der Methode vergleiche man E. Blaschke, Vorles., p. 88ff.

2) W. Lexis, Einleit. in d. Theor. d. Bevölk.-Stat., p. 39.

mengen stammen. Dies alles ermöglicht die Berechnung von m'' und m_1' aus den beobachteten M und M_1. Es ist nämlich

$$m'' = m_1' = m' \frac{V_0'}{V_0},$$

daraus

$$\frac{m''}{m'} = \frac{V_0'}{V_0}, \quad \frac{m''}{m' + m''} = \frac{V_0'}{V_0 + V_0'}$$

und

$$m'' = \frac{V_0'}{V_0 + V_0'} M;$$

ebenso findet sich

$$m_1' = \frac{V_0''}{V_0' + V_0''} M_1.$$

Hiermit erkennt man die Abminderung der x-jährigen auf die $x + 1$-jährigen für die Generation V_0', indem

$$V_x = V_\tau + m''$$
$$V_{x+1} = V_\tau - m_1';$$

auf diese Generation oder irgendeine andere aus dem Bereiche lassen sich alle Altersklassen reduzieren.

In dem Maße, als gewisse gleich anzuführende Voraussetzungen zutreffen, ließe sich durch eine einmalige Zählung der Lebenden und ihre Scheidung nach Altersklassen ein angenähertes Bild des Absterbens einer Generation gewinnen. Diese Voraussetzungen wären: 1) Das Gesetz des Absterbens ist unabhängig von des Geburtszeit; 2) innerhalb eines engen Gebietes, etwa innerhalb eines Quadrates mit einjährigen Intervallen, darf die Zeunersche Fläche durch eine Ebene ersetzt werden; 3) die jährlichen Geburtsmengen der der Zählung vorausgehenden Periode von etwa 100 Jahren sind bekannt.

Vermöge der zweiten Voraussetzung projizieren sich die beiden durch die Mitte des quadratischen Feldes Fig. 40 gelegten Vertikalschnitte B_1B_1, C_1C_2 der Fläche in die Ebene TOZ (siehe deren Umlegung) als gerade Linien $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$, infolgessen sind die Flächen $A_1A_2B_2B_1''$, $A_1A_2C_2'C_1'$ inhaltsgleich, d. h. die durch B_1B_2, C_1C_2 dargestellten Hauptgesamtheiten von Lebenden gleich groß; die erste, V_x, ist die Gesamtheit der x-jährigen Überlebenden, die andere, zählbare Gesamtheit V_τ die der Überlebenden zur Zeit τ zwischen den Altern $x - \frac{1}{2}$ und $x + \frac{1}{2}$, beide Gesamtheiten aus demselben Geburtsjahre $(t, t+1)$ stammend. Dabei gilt die Beziehung

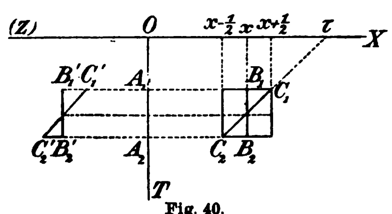


Fig. 40.

$$\tau = t + x + \frac{1}{2}.$$

Setzt man beispielsweise $t = 1880$, $x = 20$, so ergibt sich $\tau = 1900 + \frac{1}{2}$, d. h. wenn man bei einer Zählung am 1. Juli 1901 die Personen zusammenfaßt, die aus dem Geburtsjahre 1880 stammend in dem Altersintervall von $19\frac{1}{2}$ bis $20\frac{1}{2}$ leben, so erhält man damit einen angenäherten Wert der Gesamtheit der 20jährigen aus jenem Geburtsjahre. Denkt man sich dies für alle Altersklassen durchgeführt und die V_x auf *eine* Geburtenmenge, etwa die des Zählungsjahres (1901), reduziert [Voraussetzung 3)], so wäre damit ein beiläufiges Bild der Absterbeordnung gewonnen. Auf die ersten Altersjahre dürfte jedoch die Voraussetzung 2) nicht angewendet werden.

Auch in einer andern Art könnte das Verfahren durchgeführt werden. Setzt man z. B. $\tau = 1902$ (31. Dezember) und $x = 30$, so wird $t = 1871\frac{1}{2}$ und $t + 1 = 1872\frac{1}{2}$, d. h. zählt man am 31. Dezember 1902 die Überlebenden, welche der Geburt nach aus dem Zeitraume vom 1. Juli 1872 bis 30. Juni 1873 stammen, so ist damit eine angenäherte Bestimmung der Gesamtheit der überlebenden 30jährigen aus dem bezeichneten Zeitraume gewonnen. Die Zählung würde sich einfach gestalten, wenn man von vornherein alle, die in der zweiten Hälfte des Kalenderjahres 1872 und in der ersten Hälfte des Jahres 1873 geboren sind, mit dem Geburtsjahre 1872 bezeichnete.[1])

224. Fortsetzung. Die Erforschung des Absterbens einer Generation darf nach dem vorgeführten als ein Ziel bezeichnet werden, dem heute und wohl noch auf lange hinaus nur theoretische Bedeutung zukommt.

Dagegen läßt sich durch geeignete Verbindung von Volkszählungsergebnissen mit entsprechend angelegten Totenregistern eine Zahlenreihe gewinnen, welche formell die Struktur einer Sterbetafel aufweist, von der Sterbetafel einer Generation aber dadurch abweicht, daß sie die Abminderung der einzelnen Altersklassen, die ihnen entsprechenden Lebenswahrscheinlichkeiten, aus ebenso vielen *verschiedenen* Generationen ableitet. Weil die Grundlage einer solchen Tafel in der Altersgruppierung der Gezählten, also gleichzeitig Lebenden besteht, hat Zeuner[2]) sie als „Sterbetafel gleichzeitig Lebender" bezeichnet.

Wenn man über den Wert einer solchen gegenüber der Sterbetafel einer Generation urteilen will, so muß man auf den angestrebten Zweck Rücksicht nehmen. Vom Standpunkte der Biologie müßte den Sterbetafeln von Generationen der höchste Wert beigemessen werden;

1) Vgl. G. Zeuner, Abhandlungen etc., p. 61 ff.
2) Abhandlungen etc., p. 53.

die Vergleichung mehrerer derartiger Tafeln auf die verschiedenen biologischen Funktionen hin würde zu wichtigen Aufschlüssen führen über die Veränderung in der Lebenskraft der Bevölkerung, aus der die Generationen hervorgegangen sind. Immer aber wäre in einer Sterbetafel einer Generation nichts mehr als ein historischer Bericht über eine bereits abgestorbene menschliche Masse zu erblicken, der zu Schlüssen auf die Gegenwart streng genommen nicht verwendet werden dürfte.

Handelt es sich um praktische Zwecke, dann wird eine Tafel gleichzeitig Lebender den Vorzug verdienen, namentlich während einer Periode, die über den Zeitpunkt der Entstehung der Tafel nicht allzu weit hinausgeht. Denn die angestellten Untersuchungen weisen darauf hin, daß die auf die Sterblichkeit der einzelnen Altersklassen bezüglichen Relativzahlen — von den untersten Klassen abgesehen — wenigstens innerhalb der bisher beobachteten Zeiträume [vgl. Nr. 206, d) und e)] außer zufälligen Schwankungen nicht allzu beträchtlichen physischen Störungen unterworfen sind, so daß man innerhalb nicht zu weiter Zeiträume mit einer für praktische Zwecke zureichenden Berechtigung von festen Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten bei einer in bestimmter, gleichbleibender Weise zusammengesetzten Masse sprechen kann. Der Unterschied beider Tafelarten aus diesem Gesichtspunkte möge an dem folgenden Beispiele beurteilt werden. Wendet man eine im Jahre 1900 konstruierte Tafel *gleichzeitig Lebender* im Jahre 1930 auf 30jährige Personen an, so stammen diese aus einer Generation, die um 30 Jahre zurückliegt; könnte man auf dieselben Personen eine im Jahre 1900 fertig gewordene *Tafel einer Generation* anwenden, so käme das einer Vergleichung dieser Personen mit einer um rund 130 Jahre zurückliegenden Generation gleich; es unterliegt keinem Zweifel, welche Vergleichung statthafter ist.

Diese Erwägungen können selbstverständlich nur auf theoretischen Wert Anspruch erheben, da Sterbetafeln von Generationen überhaupt nicht vorliegen.

Zur Sache selbst übergehend nehmen wir an, das Ergebnis einer zum Zeitpunkte τ ausgeführten Volkszählung sei derart geordnet, daß die gezählten Personen (des männlichen, des weiblichen Geschlechtes) nach Geburtsjahren oder, was dasselbe ist, nach einjährigen Altersklassen geordnet seien, vorausgesetzt nämlich, daß die Zählung an der Grenze zweier Kalenderjahre stattgefunden hat. Dadurch sind Hauptgesamtheiten zweiter Art von Lebenden festgestellt. Eine solche Gesamtheit sei die, welche der Strecke C_1C_2 Fig. 41 entspricht, und heiße V_τ; sie umfaßt Personen, welche aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$ stammen, oder anders ausgedrückt, welche im Alter von $x = \tau - t - 1$ bis $x + 1$ Jahren stehen. Solcher Gesamtheiten gibt die Volkszählung so viele, als sie Altersklassen von Lebenden antrifft, also rund 100.

Weiter seien in dem der Zählung vorangehenden und dem nachfolgenden Kalenderjahre die Totenregister derart geführt worden, daß sie *Elementargesamtheiten* von Gestorbenen zu entnehmen gestatten. Somit kennt man auch die beiden Elementargesamtheiten M', M'', die an V_τ anstoßen und geometrisch durch die Dreiecke $B_1 C_2 C_1$, $C_1 C_2 B_2$ versinnlicht sind; die erste zählt die Verstorbenen der Altersstufe $(x, x+1)$ aus dem vorangehenden, die zweite die Verstorbenen derselben Altersstufe aus dem nachfolgenden Kalenderjahre, *beide* aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$. Aus diesen drei Daten berechnen sich — von Wanderungen abgesehen — die beiden Gesamtheiten:

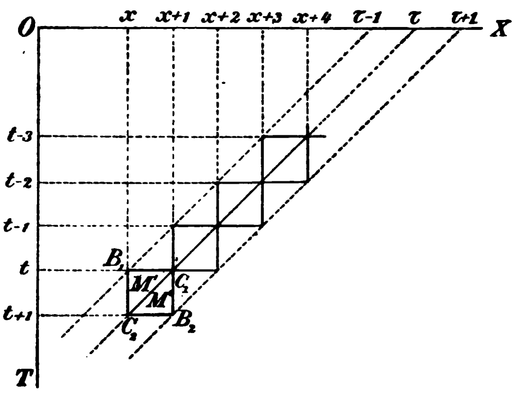


Fig. 41.

$$V_x = V_\tau + M'$$
$$V_{x+1} = V_\tau - M'',$$

und daraus die Lebenswahrscheinlichkeit der x-jährigen:

$$p_x = \frac{V_{x+1}}{V_x}.$$

Auf solche Weise erhält man eine vollständige Reihe von Lebenswahrscheinlichkeiten:

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad \cdots$$

aus der sich die Werte aller andern biometrischen Funktionen ableiten lassen, insbesondere die Zahlen der Überlebenden; man wählt zu diesem Zwecke eine (runde) Zahl l_0 als *Basis* und rechnet sukzessive:

$$l_1 = p_0 l_0, \quad l_2 = p_1 l_1, \quad l_3 = p_2 l_2, \quad \cdots;$$

diese Zahlen drücken aus, wie eine fiktive Gesamtheit von l_0 Geborenen mit fortschreitendem Alter abnimmt.

Diese vorgeführte Methode baut sich auf der Voraussetzung auf, daß die Volkszählung an einer Jahreswende stattfinde. Ist dem nicht so, erfolgt die Volkszählung zu einem andern Zeitpunkte, z. B. wie in Deutschland am 1. Dezember (Mitternacht vom 30. November auf den 1. Dezember), so ist eine *Fortschreibung* ihrer Ergebnisse bis zur nächsten Jahreswende, beziehungsweise eine detailliertere Nachweisung der Geburts- und Sterbefälle im Kalenderjahre der Volkszählung er-

forderlich. Dieser letztere Vorgang soll an dem Beispiele der von Zeuner[1]) durchgeführten Konstruktion von Sterbetafeln für die Gesamtbevölkerung des Königreiches Sachsen erläutert werden.

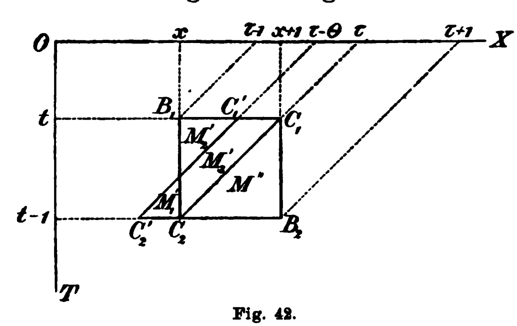


Fig. 42.

Die Volkszählung zur Zeit $\tau - \theta$ (Fig. 42), wo θ einen Bruchteil, hier $\frac{1}{12}$, des Jahres bedeutet, trifft die Personen aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$ in den Altersgrenzen $x - \theta$ und $x + 1 - \theta$ (wobei $x = \tau - t - 1$), während eine an der Jahreswende τ selbst vorgenommene Zählung sie in der Altersklasse $(x, x+1)$ antreffen würde. Um nun aus dem Zählungsergebnis, das geometrisch durch $C_1'C_2'$ dargestellt ist und mit $V_{\tau-\theta}$ bezeichnet werden soll, die beiden Gesamtheiten

$$V_x, \quad V_{x+1}$$

abzuleiten, die in der Figur durch die Linien B_1C_2, C_1B_2 vertreten sind, ist die Beobachtung folgender Gesamtheiten von Gestorbenen notwendig:

M_1': Personen, welche in der Zeit $(\tau - \theta, \tau)$ *vor* Vollendung des Alters x gestorben sind;

M_2': Personen, die im Kalenderjahre der Zählung, aber vor dieser, *nach* Vollendung des Alters x gestorben sind;

M_3': Personen, die im Kalenderjahre der Zählung, aber nach dieser und *nach* Vollendung des Alters x starben;

M'': Personen, die in dem *folgenden* Kalenderjahre *vor* Vollendung des Alters $x+1$ starben,

alle stammend aus dem Geburtsjahre $(t, t+1)$. Die Figur läßt dann unmittelbar erkennen, daß

$$V_x = V_{\tau-\theta} - M_1' + M_2',$$
$$V_{x+1} = V_{\tau-\theta} - (M_1' + M_3' + M'');$$

daraus ergibt sich wieder die Lebenswahrscheinlichkeit der x-jährigen:

$$p_x = \frac{V_{x+1}}{V_x}.$$

So ergab beispielsweise die sächsische Volkszählung vom 1. Dezember 1890 an Lebenden männlichen Geschlechtes aus dem Geburtsjahre 1888

$$V_{\tau-\theta} = 46443;$$

1) Zeitschr. d Königl. Sächs. Statist. Bur. XI (1894).

ferner lieferten die für diesen Zweck besonders angelegten Sterberegister folgende Daten:

$M_1' = 6$ (Gestorbene unter zwei Jahren aus dem Dezember 1890, geboren 1888);

$M_1'' = 591$ (Gestorbene über zwei Jahren aus Januar bis November 1890, geboren 1888);

$M_1''' = 135$ (Gestorbene über zwei Jahren aus dem Dezember 1890, geboren 1888);

$M'' = 591$ (Gestorbene unter drei Jahren aus dem Jahre 1891, geboren 1888);

daraus berechnet sich

$$V_2 = 46443 - 6 + 591 = 47028$$

$$V_3 = 46443 - (6 + 135 + 591) = 45711,$$

$$p_2 = \frac{45711}{47028} = 0{,}97200.$$

In der untersten Altersklasse (0, 1) entfällt die Gesamtheit M_1' und es treten an ihre Stelle die Geborenen aus der Zeit $(\tau - \theta, \tau)$, die jedoch *additiv* in Rechnung zu stellen sind.

225. Die Deutsche Sterbetafel. Die vorstehenden Prinzipien sind bei der Konstruktion der Deutschen Sterbetafel von 1887[1]), der ersten, welche die Sterblichkeit der deutschen Reichsbevölkerung darstellt, zur Anwendung gebracht worden. Um der Berechnung eine möglichst breite Grundlage zu geben und dadurch den Einfluß der unvermeidlichen Fehler nach Möglichkeit einzuschränken, sind die Ergebnisse dreier Volkszählungen, derjenigen in den Jahren 1871, 1875 und 1880, und die Sterbefälle aus dem Zeitraume 1871 bis 1881 benutzt worden, wobei jedoch die beiden äußersten Kalenderjahre, nämlich 1871 und 1881, nur mit einem Teile der beobachteten Sterbefälle in Rechnung kommen. Selbstverständlich ist auch auf die Wanderungen Rücksicht genommen worden. Da die Volkszählungen je am 1. Dezember der genannten drei Jahre stattfanden, so war die Fortschreibung ihrer Ergebnisse auf den nächsten Jahresschluß erforderlich; von dieser im vorigen Artikel erwähnten Prozedur sehen wir hier ab und stellen uns auf den Standpunkt, als hätten die Volkszählungen je am Ende der Jahre 1871, 1875, 1880 stattgefunden. Ihre Ergebnisse bestehen dann in einer Gruppierung der gezählten Personen, nach dem Geschlecht gesondert, nach Geburtsjahren, womit auch ihre Gruppierung nach Altersklassen gegeben ist.

Aus der für eine Jahreswende durch Zählung festgestellten Gruppierung läßt sich die für eine andere Jahreswende geltende

1) Monatsh. z. Statist. d. Deutschen Reiches. Jahrg. 1887, Nov.-Heft, p. 1—65.

Gruppierung rechnungsmäßig feststellen, wenn in der Zwischenzeit Geburten, Sterbefälle und Wanderungen in entsprechender Weise registriert worden sind; man nennt diesen Vorgang die Fortschreibung, beziehungsweise Rückschreibung der betreffenden Volkszählungsergebnisse. Unter den hierfür erforderlichen Elementen sind es die Wanderungen, über welche namentlich mit Rücksicht auf die Altersverhältnisse nur unvollkommene Aufzeichnungen vorliegen; dies nötigt dazu, die Altersverteilung der Wanderungsgewinne und -Verluste auf hypothetischem Wege, durch ein Ausgleichungsverfahren, festzustellen. Hierin liegt der Grund, warum die Fortschreibung der Zählung von 1871 zum Schlusse des Jahres 1875 und die Rückschreibung jener von 1880 zu demselben Zeitpunkte untereinander und mit dem unmittelbaren Ergebnisse der Zählung von 1875 differierende Altersgruppierungen ergeben haben; um diesen Widerspruch aufzuheben, ist aus den drei Zahlen jeder Altersklasse das arithmetische Mittel genommen worden, mit der Maßgabe jedoch, daß dem unmittelbaren Zählungsergebnisse das doppelte Gewicht verliehen wurde. Aus der auf diese Weise rechnungsmäßig hergestellten Altersgruppierung zu Ende 1875 hätten nun die Altersgruppierungen für alle Jahreswenden von 1871/72 bis 1880/81 berechnet werden können, wodurch z. B. mit Rücksicht auf eine Altersklasse (32, 33) die in Fig. 43 durch $C_0 C_0'$, $C_1 C_1'$, $C_2 C_2'$, $\cdots$ $C_9 C_9'$ dargestellten Gesamtheiten von Lebenden erhalten worden wären. Da ferner die aus der Figur ersichtlichen Elementargesamtheiten m_0'', m_0'; m_1'', m_1'; m_2'', $\cdots$ m_9'', m_9' von Gestorbenen beobachtet worden sind, so wären alle Hilfsmittel vorhanden gewesen, um die Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeiten der 32-jährigen, soweit sie aus den zehn Geburtsjahren 1839 bis 1848 stammen, zu bestimmen, und ähnlich für alle anderen Altersklassen. Dieser detailierte Vorgang ist jedoch nur beispielsweise für *eine* Altersklasse, nämlich für Männer von 32 bis 33 Jahren ausgeführt worden und ergab das folgende bemerkenswerte Resultat:

Fig. 43.

32—33 Jahre alte Männer			Hierzu eine Elementargesamtheit von Gestorbenen [2] u. der Wanderungsgewinn	Rechnungsmäßige Zahl d. Überlebenden im Alter v. 32 Jahren [3]	Davon sind bis zum Alter von 33 Jahren gestorben [4]	Sterbenswahrscheinlichkeit d. 32-jähr. Männer
vorhanden a. Schlusse des Jahres	stammend aus d. Geburtsjahre	Anzahl [1]				
1	2	3	4	5	6	7
1871	1839	275 289	1657	276 946	3108	0,01122
1872	1840	278 179	1518	279 697	3011	0,01077
1873	1841	280 651	1570	282 221	2857	0,01012
1874	1842	293 498	1403	294 901	2765	0,00938
1875	1843	275 610	1305	276 915	2749	0,00993
1876	1844	283 713	1273	284 986	2650	0,00930
1877	1845	292 720	1341	294 061	2763	0,00940
1878	1846	276 749	1313	278 062	2650	0,00953
1879	1847	266 950	1143	268 063	2495	0,00931
1880	1848	280 217	1085	281 302	2630	0,00935

Unter den zufälligen Schwankungen der Sterbenswahrscheinlichkeit während der zehn Jahre leuchtet die Tendenz ihrer Abnahme deutlich hervor.

Um für jede Altersklasse nur einen auf das ganze Material basierten Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit zu gewinnen, wurde die Summe der in der Spalte 5 angegebenen Überlebenden und die Summe der in der Spalte 6 angeführten Gestorbenen gebildet; der Quotient der letzteren Summe durch die erstere ergab die Sterbenswahrscheinlichkeit. Ihr Zähler ist also geometrisch durch das Rechteck $B_0 C_0 C_9 B_9$ der Sterbefälle und ihr Nenner durch die Linie $B_0 C_9'$ der Lebenden dargestellt.

Was die Summenzahlen der Überlebenden betrifft, so dienten zu ihrer Bildung die summierten Bevölkerungszahlen der betreffenden Altersklasse an den Jahreswenden der Periode 1871/72 bis 1880/81, also die Summen:

$$V_\tau = C_0 C_0' + C_1 C_1' + \cdots + C_9 C_9';$$

ferner die summierten Elementargesamtheiten von Gestorbenen:

$$M'' = m_0'' + m_1'' + \cdots + m_9'';$$

endlich eine Korrektur wegen der Unregelmäßigkeit der Wanderung:

$$W;$$

aus diesen Daten ergibt sich die Zahl der Überlebenden für die untere Altersgrenze:

---

1) Mit Bezug auf die Figur die durch $C_0 C_0'$, $C_1 C_1'$, $\cdots$ $C_9 C_9'$ dargestellten Gesamtheiten.

2) Es sind dies die Gesamtheiten m_0'', m_1'', $\cdots$ m_9''.

3) Die Gesamtheiten $B_0 C_0'$, $C_0' C_1'$, $\cdots$ $C_8' C_9'$.

4) Es sind dies die Summen $m_0'' + m_0'$, $m_1'' + m_1'$, $\cdots$ $m_9'' + m_9'$.

$$V_x = V_\tau + M'' + W.$$

Die Summenzahl der Gestorbenen hingegen ist:

$$M_x = m_0'' + m_0' + m_1'' + m_1' + m_2'' + \cdots + m_9'' + m_9'.$$

Daraus berechnet sich die Sterbenswahrscheinlichkeit der x-jährigen:

$$q_x = \frac{M_x}{V_x}.$$

Auf Grund der a. a. O. gegebenen Übersichten stellt sich beispielsweise für die Altersklasse 20 bis 21 und das männliche Geschlecht die Rechnung wie folgt:

	$V_\tau = 3611632$	
$m_0'' = 1745$	$W = \quad + 332$	$m_0' = 1589$
$m_1'' = 1580$		$m_1' = 1503$
$m_2'' = 1459$		$m_2' = 1320$
$m_3'' = 1282$		$m_3' = 1255$
$m_4'' = 1261$		$m_4' = 1292$
$m_5'' = 1253$		$m_5' = 1289$
$m_6'' = 1247$		$m_6' = 1293$
$m_7'' = 1273$		$m_7' = 1305$
$m_8'' = 1273$		$m_8' = 1336$
$m_9'' = 1300$		$m_9' = 1330$
$M'' = 13673$		13512

$$V_{20} = 3611632 + 13673 + 332 = 3625637$$

$$M_x = 13673 + 13512 = 27185$$

$$q_x = \frac{27185}{3625637} = 0{,}00750.$$

Die so bestimmten Sterbenswahrscheinlichkeiten[1]) sind einer Ausgleichung (s. Nr. 239) unterworfen worden; mittels der *ausgeglichenen* Sterbenswahrscheinlichkeiten wurde sodann mit Zugrundelegung der Basis 100000 für die Lebendgeborenen (0-jährigen) die Sterbetafel selbst konstruiert. In etwas abgeänderter Anordnung ist dieselbe in Tafel IV am Ende des Buches mitgeteilt. Über die Bedeutung der Kolumnen ist nach dem vorgeführten nichts weiter zu bemerken, bis auf die Kolumne mit der Überschrift: Bevölkerung L_x.

---

1) Auf dem beschriebenen Wege wurden die Sterbenswahrscheinlichkeiten nur bis zum Alter 89 bestimmt; die Feststellung der restlichen erfolgte auf rechnungsmäßigem Wege unter möglichstem Anschluß an die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten der vorhergehenden Alter. Anlaß dazu gab das irreguläre Verhalten der direkt bestimmten Sterbenswahrscheinlichkeiten, dessen Grund in der Unverläßlichkeit des betreffenden Beobachtungsmaterials zu erblicken war.

Die Zahlen dieser Kolumne bezeichnen die Altersgruppierung, welche eine *stationäre Bevölkerung* mit 100000 jährlichen Lebendgeburten aufweisen würde, d. i. eine Bevölkerung, in welcher alljährlich dieselbe Zahl von Kindern lebend geboren würde und eine ebenso große Zahl von Personen, stets nach dem Gesetze der Sterbetafel, stürbe, wobei auch noch die Geburten sich immer gleichmäßig über das Jahr verteilten. Eine *wirkliche Bevölkerung* richtet sich nach diesen Zahlen schon deshalb nicht, weil wegen des allenthalben beobachteten Überschusses der Geborenen über die Gestorbenen ein Anwachsen der Bevölkerung und daher auch ein Anwachsen der jährlichen Geburten stattfindet.

Was die Ermittelung der Zahlen L_x aus den Zahlen der Überlebenden l_x und den Zahlen der Gestorbenen d_x anlangt, so kann sie in erster Näherung in folgender Weise geschehen. Von den l_x Personen, welche das Alter x überleben, sterben vor Erreichung des Alters $x+1$ im ganzen $d_x = l_x - l_{x+1}$ Personen; diese Gesamtheit zerfällt in zwei Elementargesamtheiten, die, wenn man sich die Sterbefälle gleichmäßig über die Altersklasse verteilt denkt, gleich stark und von der Größe $\frac{1}{2} d_x$ sind; bringt man eine dieser Elementargesamtheiten von l_x in Abzug, so erhält man (s. Nr. 222) die Anzahl derjenigen Personen, welche zwischen den Altern x und $x+1$ *gleichzeitig* leben; also ist unter diesen Annahmen

$$L_x = l_x + \frac{1}{2} d_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}. \tag{1}$$

Eine dem Gange der Zahlen besser angepaßte Bestimmung von L_x ist bei der Konstruktion der Deutschen Sterbetafel befolgt worden. Denkt man sich die durch die Zahlen l_x und d_x der Tafel ausgedrückten Hauptgesamtheiten als zu *einer* Generation gehörig, so sind

$$d_{x-1} = a, \quad d_x = b, \quad d_{x+1} = c$$

durch drei neben einander liegende Quadrate (Fig. 44),

$$l_x, \quad l_{x+1}$$

durch deren Trennungslinien $B_1 C_2$, $C_1 B_2$, und das unbekannte

$$L_x$$

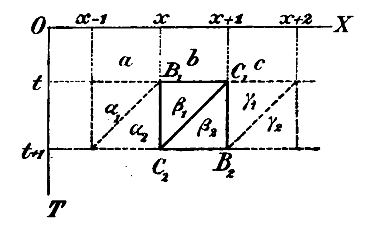


Fig. 44.

durch die Diagonale $C_1 C_2$ des mittleren Quadrates dargestellt. Teilt man auch a und c in die beiden Elementargesamtheiten, so handelt es sich darum, aus den der Tafel entnommenen Hauptgesamtheiten a, b, c von Gestorbenen nach einer plausibeln Annahme die Elementargesamtheiten α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zu bestimmen; ist dies geschehen so ist

$$L_x = l_x - \beta_1, \tag{2}$$

wie die Figur unmittelbar erkennen läßt. Die Annahme soll nun darin bestehen, daß die sechs Elementargesamtheiten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden; man hat dann zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= a \\
\beta_1 + \beta_2 &= b \\
\gamma_1 + \gamma_2 &= c \\
\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\beta_1 - \beta_2 &= 0 \\
\alpha_2 - 3\beta_1 + 3\beta_2 - \gamma_1 &= 0 \\
\beta_1 - 3\beta_2 + 3\gamma_1 - \gamma_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Determinante des Systems der Koeffizienten:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1
\end{vmatrix}$$

hat den Wert -64; die zu β_1 gehörige Zählerdeterminante:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & 0 & 1 & 1 \\
1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1
\end{vmatrix}$$

berechnet sich zu $-4(8b + a - c)$; mithin ist

$$\beta_1 = \frac{b}{2} + \frac{a-c}{16}$$

und daher nach (2):

$$L_x = l_x - \frac{d_x}{2} - \frac{d_{x-1} - d_{x+1}}{16}.$$

So ergibt sich auf Grund der Kolumnen l_x, d_x von Tafel IV für $x = 10$ bei dem männlichen Geschlechte

$$L_{10} = 62089 - \frac{289}{2} - \frac{342 - 253}{16} = 61939$$

als die Zahl derjenigen, welche von 100000 Lebendgeborenen männ-

lichen Geschlechtes auf der Altersstufe von 10 zu 11 Jahren *gleichzeitig* leben.

226. Weiteres über die Sterblichkeitsmessung an einer Bevölkerung. Die vorstehend an dem Beispiel der Deutschen Sterbetafel vorgeführte Methode ist von Becker ausgebildet worden und kann vom theoretischen Standpunkte als die beste unter den verschiedenen Methoden zur Gewinnung von Volkssterbetafeln bezeichnet werden, weil sie direkt zu Sterbenswahrscheinlichkeiten führt. Die Schwierigkeit, die sich ihrer Anwendung entgegenstellt, liegt darin, daß sie, wenigstens an den Enden des Zeitraumes, für welchen sie konstruiert wird, die Kenntnis von Elementargesamtheiten Gestorbener erfordert, die aber aus den geführten Registern nur ausnahmsweise unmittelbar zu erheben sind.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, hat man zu Hilfsmitteln gegriffen, die nur zu angenäherten Resultaten führen können. Ihre Stellung zur strengen Methode wird sich an der schematischen Fig. 45 am einfachsten erklären lassen.

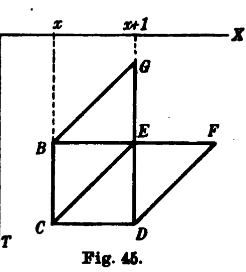


Fig. 45.

Während die Beckersche Methode die erste Hauptgesamtheit $BCDE$ von Gestorbenen mit der ersten Hauptgesamtheit BC von Lebenden vergleicht und dadurch eine wirkliche Sterbenswahrscheinlichkeit herstellt, bedient sich eine *zweite* Methode der zweiten Hauptgesamtheit $CDFE$ von Gestorbenen, die sie mit der zweiten Hauptgesamtheit CE von Lebenden ins Verhältnis setzt; man bemerkt, daß dann die Toten aus zwei Altersjahren stammen und die Lebenden nicht gleichaltrig sind, daß der Quotient nur unter gewissen Annahmen als Ersatz einer Sterbenswahrscheinlichkeit genommen werden kann. Bei einer *dritten* Methode wird die Hauptgesamtheit $BCEG$ von Toten mit den sie begrenzenden Hauptgesamtheiten BG, CE zweiter Art von Lebenden in Beziehung gesetzt; hier stammen die Toten aus zwei verschiedenen Geburtsjahren.[1])

---

1) Von andern Tafeln für ganze Bevölkerungen seien hier angeführt: Die *preußische* Sterbetafel, berechnet von Firks aus dem Mittel der Sterbetafeln von 1867, 1868, 1872, 1875, 1876, 1877 (Zeitschr. d. k. pr. Stat. Bur. 1882); die *schweizerische* Sterbetafel, gegründet auf die Sterbefälle aus der Periode 1876/77 bis 1880/81 (Schweizer. Stat. 1888), neu bearbeitet von G. Schaertlin (Schweizer. Stat. 1887 u. 1888); die Durrersche Sterbetafel, gleichfalls für die Gesamtbevölkerung der Schweiz, aus den Beobachtungen der Jahre 1881—88 und den Volkszählungen am 1. XII. 1880 und 1. XII. 1888 (Ber. d. eidgen. Versicherungsamtes pro 1907); die *französische* Sterbetafel aus Beobachtungen des Zeitraumes 1877 bis 1881, nach fünfjährigen Altersklassen fortschreitend (Stat. de la France XI, 1884); die *englische* Sterbetafel aus Beobachtungen des Zeitraumes 1871 bis 1880, zum großen Teil interpoliert, da die Sterbefälle nur nach 5- und 10jähri-

An der Beckerschen Methode ist eine Vereinfachung angebracht worden, die ihre wiederholte Anwendung, um die zeitlichen Änderungen in der Sterblichkeit einer Bevölkerung zu erkennen, erleichtert. Zu solchen wiederholten Sterblichkeitsmessungen eignen sich besonders die Zeiträume zwischen aufeinander folgenden Volkszählungen.[1])

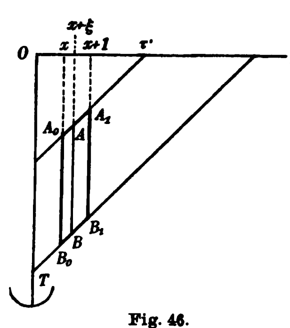


Fig. 46.

Die Volkszählungsergebnisse der Termine τ', τ'', Fig. 46, seien nach Altersjahrgängen ausgezählt, auf das Altersjahr $(x, x+1)$ mögen die Zahlen $V_{\tau'}$; $V_{\tau''}$ entfallen sein, in der Figur dargestellt durch $A_0 A_1$, $B_0 B_1$. Die Lebendengesamtheit erster Art $A_0 B_0$ werde mit V_0, die Lebendengesamtheit $A_1 B_1$ mit V_1 bezeichnet; während der Periode (τ', τ'') und zwischen den Altern x und $x+1$ seien M Personen gestorben (Hauptgesamtheit dritter Art) und W Personen durch Wanderung ausgeschieden. Es besteht dann zwischen all diesen Gesamtheiten die Beziehung (Nr. 217):

$$V_1 = V_0 + V_{\tau'} - V_{\tau''} - M - W,$$

und bezeichnet man die Differenz $V_{\tau''} - V_{\tau'}$, um welche die Altersklasse $(x, x+1)$ sich von der ersten Volkszählung zur zweiten geändert hat, mit D, so gilt also:

$$V_1 = V_0 - D - M - W. \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man, von den Geburten des Zeitraumes (τ', τ'') ausgehend, nach und nach alle Lebendengesamtheiten von der Art $A_0 B_0$ gewinnen.

Wendet man die gleiche Betrachtung auf den variablen Bruchteil ξ des Altersjahres, also auf die Figur $A_0 B_0 B A$ an, so entsteht die Gleichung

$$V_\xi = V_0 - D_\xi - M_\xi - W_\xi,$$

in der durch den Zeiger ξ angedeutet ist, daß sich die betreffenden Gesamtheiten auf das Alter $x + \xi$, bzw. auf das Altersintervall $(x, x+\xi)$ beziehen.

---

gen und nur in den untersten Jahren nach 1jährigen Altersklassen ausgewiesen waren (Suppl. of the 45[th] annual report of the Registral-General of birthes, deaths and mariages, 1885); die *niederländische* Sterbetafel, aus den Volkszählungen am 1. XII. 1869 und 1. XII. 1879 und den zwischenliegenden Geburten und Sterbefällen von van Pesch berechnet (Bijdragen van het statistisch Instituut 1885). Von diesen Tafeln ist die niederländische nach der zweiten, die französische und englische nach der dritten der oben unterschiedenen Methoden konstruiert worden.

1) J. Rahts, Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch., Wien 1909, II, p. 549ff.

Bezeichnet man die Sterblichkeitsintensität bei dem Alter $x + \xi$ durch μ_ξ, so ist

$$\frac{dM_\xi}{V_\xi d_\xi} = \mu_\xi,$$

woraus sich mittels der vorangehenden Gleichung die Differentialgleichung

$$dM_\xi = (V_0 - D_\xi - M_\xi - W_\xi)\mu_\xi d\xi$$

ergibt, der man die Form

$$\frac{d(M_\xi - V_0)}{d\xi} + \mu_\xi(M_\xi - V_0) = -\mu_\xi(D_\xi + W_\xi)$$

geben kann; sie erscheint jetzt als lineare Differentialgleichung und gibt, integriert:

$$M_\xi - V_0 = e^{-\int_0^\xi \mu_\xi d\xi}\left\{C - \int_0^\xi \mu_\xi(D_\xi + W_\xi)e^{\int_0^\xi \mu_\xi d\xi} d\xi\right\};$$

für die Konstante C ergibt sich, da mit $\xi = 0$ auch $M_\xi = 0$ wird, der Wert $-V_0$, so daß

$$M_\xi = V_0\left(1 - e^{-\int_0^\xi \mu_\xi d\xi}\right) - e^{-\int_0^\xi \mu_\xi d\xi}\int_0^\xi \mu_\xi(D_\xi + W_\xi)e^{\int_0^\xi \mu_\xi d\xi} d\xi;$$

wendet man auf das letzte Integral den Mittelwertsatz an und bezeichnet mit Θ den Mittelwert von $D_\xi + W_\xi$, so ergibt das erübrigende Integral nach seiner Ausführung $e^{\int_0^\xi \mu_\xi d\xi} - 1$, und es wird

$$M_\xi = (V_0 - \Theta)\left(1 - e^{-\int_0^\xi \mu_\xi d\xi}\right).$$

Läßt man nun die Grenze ξ bis 1 hinaufrücken, wählt dann für Θ unter Annahme gleichmäßiger Verteilung der Wanderungen und gleichmäßigen Anwachsens der Altersklassen während der Zeit (τ', τ'') den Wert $\frac{1}{2}(D + W)$ und beachtet schließlich, daß (Nr. 211, (12))

$$1 - e^{-\int_0^1 \mu_\xi d\xi} = q_x$$

ist, so ergibt sich

$$q_x = \frac{M}{V_0 - \frac{D + W}{2}}. \qquad (2)$$

Nach dieser Formel sind für das Deutsche Reich auch für die

Perioden 1881—1890 und 1891—1900 Sterblichkeitstafeln berechnet worden, die sich an diejenige aus den Jahren 1871—1881 anschließen. Eine summarische Vorstellung von der im Laufe dieser drei Dezennien erfolgten Änderung der Sterblichkeitsverhältnisse geben die aus den drei Tafeln abgeleiteten mittleren Lebensdauern; sie betragen:

	beim männl. Geschlecht	beim weibl. Geschlecht
1871—1881	35,58 Jahre	38,45 Jahre
1881—1890	37,17 „	40,24 „
1891—1900	40,56 „	43,97 „ .[1])

227. Sterblichkeitskurven. Von den biometrischen Funktionen eignen sich zur geometrischen Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes die Zahlen der Überlebenden l_x und die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x am besten. Eine Kurve, welche l_x als zur Abszisse x gehörige Ordinate besitzt, zeigt die sukzessive Abnahme einer Grundmasse von Geborenen mit zunehmendem Alter; eine Kurve, deren Ordinate q_x ist, wie die Erwartung, im Laufe des nächsten Altersjahres zu sterben, mit dem Alter sich ändert. Beide Kurven bezeichnet man als *Sterblichkeitskurven.*

Fig. 47 zeigt ihren Verlauf mit Zugrundelegung der Zahlen der Deutschen Sterbetafel für das männliche Geschlecht. Der Ordinatenmaßstab für die „Kurve der Überlebenden" ist links, jener für die „Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten" rechts aufgetragen. Übrigens

1) Die durch diese Zahlen konstatierte Verbesserung der Sterblichkeitsverhältnisse während des 30jährigen Zeitraums ist nicht eine vereinzelte Erscheinung, sie ist auch in anderen Staaten, in denen wiederholte Sterblichkeitsmessungen vorgenommen sind, wahrzunehmen. Ein bemerkenswertes Beispiel liefert die Schweiz, die über Volkssterbetafeln aus den Zeiträumen 1876—81. 1881—88 (s. die Fußnote am Schlusse von Nr. 223) und 1889—1900 (Bericht des eidgen. Versicherungsamtes pro 1907) verfügt. Diesen zufolge stellt sich die mittlere Lebensdauer wie folgt:

	beim männl. Geschlecht	beim weibl. Geschlecht
1876—81	40,5	43,2
1881—88	43,3	45,7
1889—1900	45,7	48,5.

Da die mittlere Lebensdauer bei der Geburt wesentlich beeinflußt wird durch die Sterbensintensität der ersten Lebensperiode, so möge noch die mittlere fernere Lebensdauer eines höheren Alters, die von diesem Einfluß frei ist, angegeben werden; sie betrug bei Personen des Alters von 16 Jahren

	beim männl. Geschlecht	beim weibl. Geschlecht
1876—81	41,8	43,3
1881—88	42,8	44,0
1889—1900	43,8	45,3,

stieg also von Periode zu Periode rund um 1 Jahr.

gibt die letztere Kurve auch eine Darstellung der Lebenswahrscheinlichkeiten, wenn man die Alter auf der oberen Begrenzungslinie des Diagrammes abliest und den rechts befindlichen Maßstab umgekehrt bezeichnet.

Die Unterschiede zwischen den beiden Geschlechtern zum Ausdruck zu bringen, ist der gewählte Maßstab wenig geeignet. Dagegen zeigt die genauere Verfolgung der beiderseitigen Sterbenswahrschein-

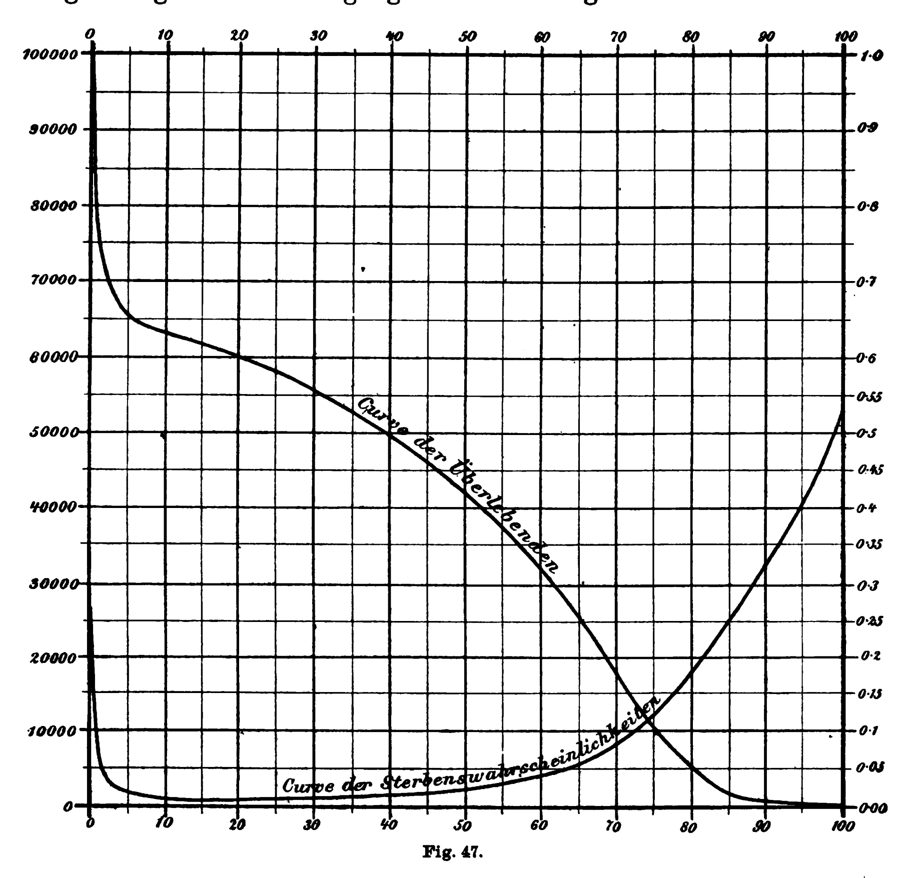


Fig. 47.

lichkeiten, daß im großen Ganzen das weibliche Geschlecht dem männlichen gegenüber begünstigt ist; nur in den Perioden 9 bis 15 und 27 bis 35 erhebt sich die Sterbenswahrscheinlichkeit des weiblichen Geschlechtes ein wenig über die des männlichen, wogegen sie in manchen Alterslagen, so zwischen 50 und 60, recht erheblich hinter ihr zurückbleibt. Die Kurve der Überlebenden des weiblichen Geschlechtes verbleibt in ihrem ganzen Verlaufe oberhalb jener des männlichen Geschlechtes, mit der sie bei 100000 einen gemeinsamen Ausgangspunkt hat.

228. Sterblichkeitsmessung an versicherten Personen. Das Problem der Sterblichkeitsmessung hat im Versicherungswesen seine höchste Ausbildung erfahren. Sachlich und formell zeigt es hier solche Besonderheiten, daß ihm eine selbständige Stellung eingeräumt werden muß.

Zunächst sind es bestimmte Altersklassen, die im Versicherungswesen vornehmlich in Betracht kommen, und das in ganz anderer relativer Besetzung als in der allgemeinen Bevölkerung. Ferner sind nicht alle Bevölkerungskreise gleichmäßig beteiligt, da das Eingehen und Fortführen einer Versicherung an gewisse wirtschaftliche Voraussetzungen geknüpft ist, die eine *soziale Auslese* bedingen. Die Zulassung zu manchen Versicherungsarten erfolgt nur unter der Voraussetzung, daß eine vorgenommene Prüfung des momentanen Gesundheitszustandes und der Antezedentien des Versicherungswerbers keine Bedenken hervorruft, es geht also dem Abschluß der Versicherung eine *ärztliche Auslese* voraus. Aber auch in solchen Fällen, wo die Versicherungsunternehmung kein Interesse daran hat, einen guten Gesundheitszustand des zu Versichernden voraussetzen zu können, findet der Zugang nicht wahllos statt; vielmehr wirkt hier die innere Empfindung, die bei den einen auf lange Lebensdauer hinweist, bei andern die Hoffnung auf eine solche herabdrückt, als eine besondere Art der Auslese, als *Selbstauslese,* die im einzelnen wohl irreführen kann, in der Masse aber zu sicherem Ausdruck kommt; auch dort, wo eine ärztliche Auslese erfolgt, geht ein gewisses Maß von Selbstauslese neben ihr einher und wirkt bei der Wahl der Versicherungsart mit. Das Ausscheiden aus der Beobachtung kann weiters in verschiedener Weise vor sich gehen: Durch *Tod,* durch *Erreichung des Versicherungszweckes bei Lebzeiten,* durch einseitige oder einverständliche Lösung des Versicherungsvertrags und den damit verbundenen *Austritt* aus der Versicherung. Wenn auch bei der Sterblichkeitsmessung die erstgenannte Form des Ausscheidens in erster Reihe in Betracht kommt, so bringt es der Gang der Messung doch mit sich, daß auch die andern Arten des Ausscheidens verzeichnet und verfolgt werden müssen. Um nämlich das Beobachtungsmaterial möglichst auszunützen und eine breite Grundlage zu gewinnen, wird jede versicherte Person während der ganzen Dauer ihrer Versicherung beobachtet und nicht etwa bloß im Falle ihres Todes, sondern bei allen ganzjährigen Altern, die sie in der Versicherung durchschreitet, zur Sterblichkeitsmessung herangezogen.

Alle diese und viele andere Momente, die noch zur Sprache kommen werden, unterscheiden die Sterblichkeitsmessung an Versicherten so wesentlich von der Sterblichkeitsmessung einer Bevölkerung, daß sie zu einem selbständigen und sehr komplizierten Problem der mathematischen Statistik geworden ist.

Was das Ziel betrifft, so besteht es darin, aus den Erfahrungen einer vergangenen Periode solche Daten abzuleiten, daß darauf die Erwartungen einer nächsten Zukunft gegründet werden können. Diese Grundlegung aber stützt sich auf die aus vielfältigter Beobachtung gewonnene Überzeugung von der relativen Beständigkeit menschlicher Massenzustände; gerade auf dem hier in Rede stehenden Gebiete haben Untersuchungen der neueren Zeit ergeben, daß diese Beständigkeit nicht allzuweit von jenem mathematisch umschriebenen Grade entfernt ist, der eine statistische Wahrscheinlichkeit einer solchen von definitiver Bedeutung vergleichbar macht. Erst durch diese Untersuchungen hat der von Anfang an gebrauchte Ausdruck „Sterbenswahrscheinlichkeit" eine wenn auch immer noch beschränkte Berechtigung erlangt (Nr. 192).

229. Entwicklung des Problems der Sterblichkeitsmessung an Versicherten. Unter den Umständen, von welchen der Sterblichkeitsgrad abhängt, stand seit jeher das *Alter* im Vordergrunde des Interesses. Die Unterschiede, die sich in dieser Richtung herausstellen, sind so erheblich und treten mit solcher Beständigkeit auf, daß sie zu keiner Zeit übersehen werden konnten. Daher kommt es, daß bis in eine nicht weit zurückliegende Vergangenheit das Alter als das alleinige zahlenmäßig ausdrückbare Element der Sterbenswahrscheinlichkeit gegolten hat.

Der Einfluß anderer Umstände ist nach und nach erkannt, vielfach unterschätzt und erst in späterer Zeit nach Richtung und Maß erforscht worden.

Daß das *Geschlecht* für die Gestaltung der Sterblichkeitsverhältnisse maßgebend ist, hat die Bevölkerungsstatistik frühzeitig gelehrt; das Versicherungswesen nahm auf dieses Moment erst in späterer Zeit Rücksicht, ohne ihm jedoch bis auf den heutigen Tag in den Rechnungen immer Ausdruck zu verleihen. In den Sterblichkeitsmessungen der neueren Zeit ist aber getrennte Behandlung der beiden Geschlechter zur Regel geworden.

Die Wirkung der *Auslese* (Selektion) macht sich zunächst in verschiedener Weise bemerkbar, je nachdem es sich um ärztliche Auslese oder Selbstauslese vornehmlich handelt. Die erstere tritt dann in Wirksamkeit, wenn Versicherungsleistungen auf dem Spiele stehen, die an den Tod der versicherten Person geknüpft sind; die andere macht sich hauptsächlich bei solchen Versicherungsarten geltend, bei denen eine von dem Erleben eines bestimmten Alters oder von der Fortdauer des Lebens abhängige Versicherungsleistuug in Aussicht steht. In der Hauptsache also tritt in dem Sterblichkeitsverlauf ein wesentlicher Unterschied zwischen *Todesfall*- oder *Erlebens*versicherung zutage; neben diesem Unterschied im *großen* machen sich aber feinere Unterschiede bemerkbar bei den verschiedenen *Versicherungskombina-*

tionen, deren Natur nicht allein von den versicherten Ereignissen und den an sie geknüpften Leistungen, sondern auch von der Art abhängt, wie der Versicherte seine Gegenleistungen abzutragen sich verpflichtet.

Die Auslese äußert aber noch eine andere, mehr ins einzelne gehende Wirkung, deren Wahrnehmung wohl nicht lange ausbleiben konnte, deren genauere Erforschung aber erst der jüngsten Zeit angehört. Die ärztliche Auslese, wo eine solche geübt wird, hat den Zweck, Personen von der Versicherung auszuschließen, in deren Gesundheitszustand und Antezedentien sich Momente nachweisen lassen, die eine Lebenskürzung zur Folge haben können; die Entscheidung erfolgt auf Grund objektiver Merkmale, deren Ausbildung Sache der Versicherungsmedizin ist, aber auch subjektives Ermessen und geschäftliche Rücksichten kommen dabei zu Worte. Daraus folgt zunächst, daß die ausgelesenen Leben besser sind als der allgemeine Durchschnitt bei demselben Alter. Dieser Vorzug hält aber nicht unvermindert an, da ja die Auslese einmal nach einem momentan herrschenden Zustand sich richtet, der sich mit der Zeit ändern kann und bei vielen auch wirklich ändert, und dann, da sie nicht untrüglich ist; je länger die seit der Auslese verstrichene Zeit, desto weniger, kann man im allgemeinen sagen, ist von ihrer Wirkung noch wahrzunehmen. Den präzisen Ausdruck wird dieser Sachverhalt darin finden, daß Massen von Versicherten desselben Alters, deren erste unmittelbar ausgelesen worden ist, während die folgenden um 1, 2, 3,... Jahre von der Auslese entfernt sind, ungleiche und zwar im allgemeinen steigende Sterbenswahrscheinlichkeiten ergeben werden. Hiermit tritt die abgelaufene *Versicherungsdauer* als ein neues zahlenmäßig ausdrückbares Element der Sterbenswahrscheinlichkeit zu dem Alter hinzu.

Was hier von der ärztlichen Auslese ausgeführt worden ist, hat sich in der Hauptsache auch bezüglich der Selbstauslese gezeigt, so daß auch bei Versicherten, die aus dieser allein hervorgehen, die Sterbenswahrscheinlichkeit als vom Alter und der abgelaufenen Versicherungsdauer abhängig aufgefaßt werden muß.

Die wiederholten Sterblichkeitsmessungen, die heute bereits vorliegen, haben weiter gezeigt, daß neben den relativen Zeitangaben des Alters und der Versicherungsdauer auch die *absolute Zeitlage* der Messung auf die Resultate Einfluß übt. Der Grund hierfür liegt teils in der allgemeinen Änderung der auf die Sterblichkeit einwirkenden Umstände, teils in der Vervollkommnung der ärztlichen Auslese, teils endlich in dem Wandel, dem die geschäftlichen Grundsätze des Versicherungswesens ebenso unterliegen wie alle menschlichen Einrichtungen. Aus dieser Tatsache ergeben sich wichtige Folgerungen. Wenn man in früherer Zeit, um für die Messung eine möglichst breite Grundlage zu gewinnen, Erfahrungen einer möglichst langen Periode zusammengefaßt hat, so ist man gegenwärtig davon

abgekommen und beschränkt die Beobachtungsperiode auf einen kürzeren Zeitraum, um auf annähernd gleichartige Verhältnisse während desselben rechnen zu können. Man ist sich ferner dessen bewußt, daß die Ergebnisse einer Messung nicht auf unabsehbare Zeit Geltung behalten können, daß demnach Sterblichkeitsmessungen zu einer ständigen Aufgabe des Versicherungswesens gemacht werden müssen, an die in entsprechenden Intervallen immer wieder von neuem heranzutreten ist.

Von weiteren Momenten, die das Sterblichkeitsverhältnis beeinflussen, seien genannt die Höhe der Versicherungssumme, in der die wirtschaftliche und die soziale Lage zum Ausdruck kommen, ferner bei Versicherungsunternehmungen, die nicht auf dem Gegenseitigkeitsprinzip beruhen, die Beteiligung oder Nichtbeteiligung am erzielten Gewinn; der Aufenthalt, der Beruf.

230. Die verschiedenen Arten von Sterbetafeln für Versicherte. Nach diesen Darlegungen wird es möglich sein, das Problem der Sterblichkeitsmessung in seiner heutigen Fassung zu kennzeichnen und die verschiedenen Formen seiner Lösung dem Verständnis zuzuführen, die es in den mannigfachen gegenwärtig vorhandenen und zum Teil auch schon in Verwendung stehenden Sterbetafeln gefunden hat.

I. Man kann die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit in allgemeinster Weise durch das Symbol

$$f_U(x, t) \tag{1}$$

darstellen, in welchem x das erreichte *Alter*, t die seit der Auslese verstrichene Zeit, die *Versicherungsdauer*[1]), und U den Komplex von *Umständen* bezeichnet, durch welche die Personengemeinschaft charakterisiert ist, an der die Sterblichkeitsmessung vorgenommen wird.

Mit Weglassung des U, das in der Beschreibung der aus der Messung hervorgehenden Tafel zum Ausdruck kommt, etwa in der Angabe des Geschlechts, der Versicherungsart und anderer als wichtig erkannter Umstände, schreibt man für (1)

$$q_{[x-t]+t}; \tag{2}$$

die Konstruktion dieses Zeichens ist so getroffen, daß in der eckigen Klammer das *Beitrittsalter* steht, zu dem die Versicherungsdauer additiv hinzugefügt ist. Diese Bezeichnungsweise ist auf alle andern mit der Sterblichkeit zusammenhängenden Größen, auf die Lebenswahrscheinlichkeit, die Zahlen der Lebenden und Gestorbenen, auf die verschiedenen in Betracht kommenden Gesamtheiten übertragen worden; die Symbole $p_{[x-t]+t}$, $l_{[x-t]+t}$, $d_{[x-t]+t}$ u. a. bedürfen daher keiner weiteren Erklärung, ebenso die Symbole $q_{[x]+t}$, $p_{[x]+t}$ usw., in

1) Die Verwendung des Buchstabens t weicht hier von der bisherigen ab.

denen nun x das Eintrittsalter bedeutet, so daß $x+t$ das erreichte Alter ist.

Stellt man die Hypothese auf, daß zu jeder nach der Natur der Sache zulässigen Wertverbindung x, t ein bestimmter Wert des Symbols (1) gehört, so ist durch dieses Symbol eine *Funktion* der genannten Variablen dargestellt.

Die *Grundaufgabe der Sterblichkeitsmessung* besteht nun darin, Einzelwerte dieser Funktion zu bestimmen, die zu ganzzahligen Wertverbindungen von x, t gehören. Diese Bestimmung stützt sich auf die Ermittlung zweier Gesamtheiten, nämlich der Gesamtheit $E_{[x-t]+t}$ derjenigen, die das Alter x nach Ablauf von t Versicherungsjahren durchschritten haben, und der Gesamtheit $\theta_{[x-t]+t}$ derjenigen unter ihnen, die vor Erreichung des Alters $x+1$ gestorben sind. Nach der wahrscheinlichsten Hypothese über den unbekannten Funktionswert ergibt sich für ihn die empirische Bestimmung:

$$q_{[x-t]+t} = \frac{\theta_{[x-t]+t}}{E_{[x-t]+t}}. \tag{3}$$

Aus der Gesamtheit der so bestimmten Einzelwerte seien folgende *Reihen* hervorgehoben:

1. Die Reihe

$$q_{[x_0-t]+t}, \quad q_{[x_0+1-t]+t}, \quad q_{[x_0+2-t]+t}, \ldots \tag{4}$$

stellt die Sterbenswahrscheinlichkeiten der $x_0, x_0+1, x_0+2, \ldots$-jährigen dar, die diese Alter nach t Versicherungsjahren erreicht haben, also den Sterblichkeitsverlauf nach dem Alter bei *konstanter Versicherungsdauer.*

2. Die Reihe

$$q_{[x-0]+0}, \quad q_{[x-1]+1}, \quad q_{[x-2]+2}, \ldots \tag{5}$$

gibt die Sterbenswahrscheinlichkeiten der x-jährigen an, die dieses Alter bei Abschluß der Versicherung, dann nach Ablauf eines, zweier, ... Versicherungsjahre erreicht haben, also den Sterblichkeitsverlauf nach der Versicherungsdauer bei *konstantem erreichten Alter.*

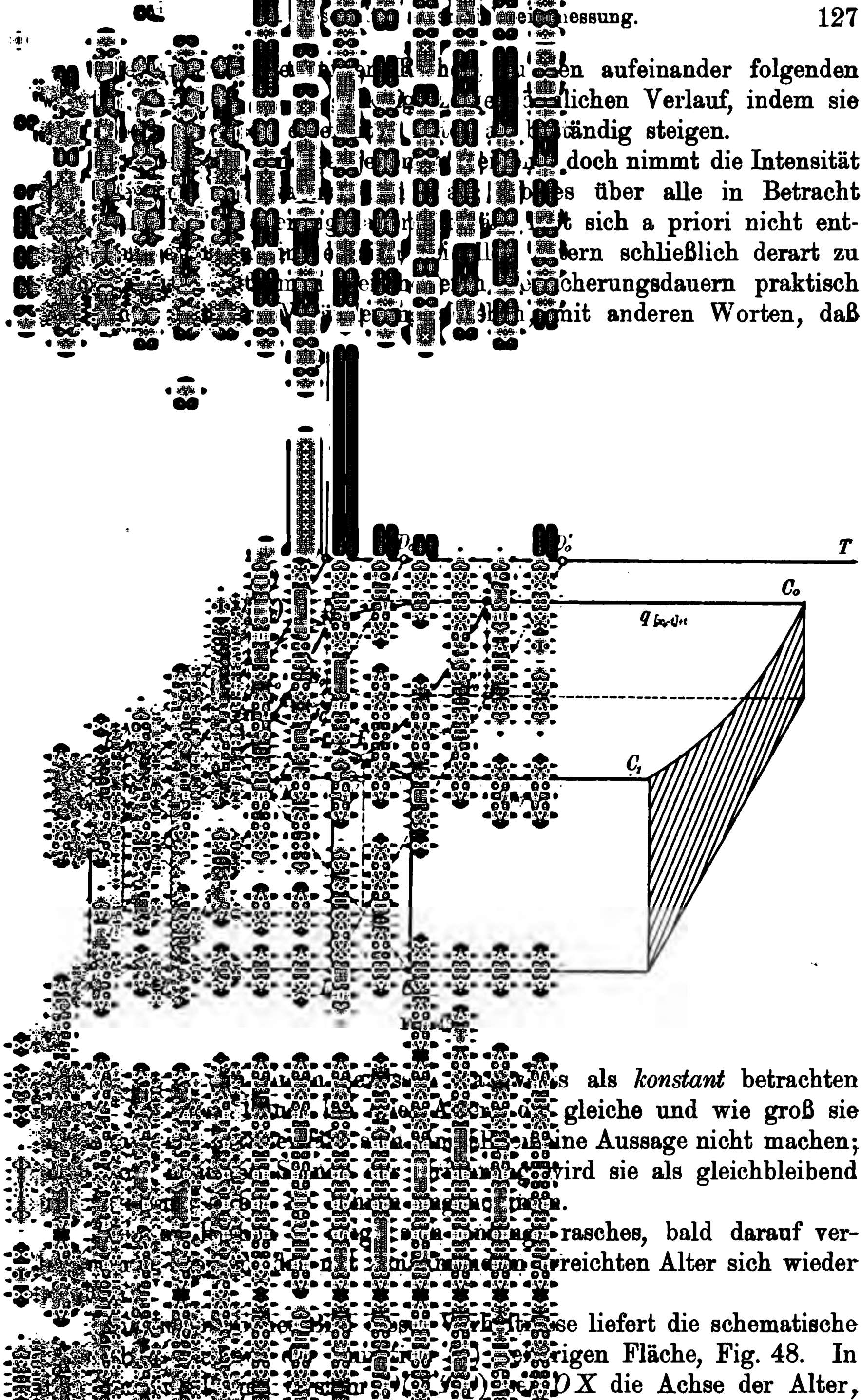
3. Aus der Reihe

$$q_{[x_0]+0}, \quad q_{[x_0]+1}, \quad q_{[x_0]+2}, \ldots \tag{6}$$

ist zu ersehen, wie sich die Sterbenswahrscheinlichkeit der im Alter x_0 Beigetretenen mit fortschreitendem Alter — daher auch mit fortschreitender Versicherungsdauer — ändert; sie zeigt also den Sterblichkeitsverlauf bei einem *konstanten Beitrittsalter.*

Die Vorstellung, die man sich auf Grund der bisher gesammelten Erfahrungen von dem Verlauf dieser Reihen in großen Zügen gemacht hat und die zum Teil hypothetischer Natur ist, kann in folgendem zusammengefaßt werden.

…en aufeinander folgenden
…lichen Verlauf, indem sie
…ändig steigen.
…doch nimmt die Intensität
…s über alle in Betracht
…t sich a priori nicht ent-
…tern schließlich derart zu
…cherungsdauern praktisch
…mit anderen Worten, daß



…s als *konstant* betrachten
… gleiche und wie groß sie
…ine Aussage nicht machen;
…ird sie als gleichbleibend
…
…rasches, bald darauf ver-
…reichten Alter sich wieder

…se liefert die schematische
…rigen Fläche, Fig. 48. In
…X die Achse der Alter,

Beitritts- und Beobachtungsalter, OT die Achse der Versicherungsdauern; in der Richtung der dritten Achse OQ werden die Sterbenswahrscheinlichkeiten aufgetragen.

Die Schnittkurve B_0B_1 mit der Ebene XQ gibt den Verlauf von $f_U(x, 0)$, also den altersmäßigen Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeit zur Zeit der Auslese, genau gesprochen während des ersten Versicherungsjahres, in anderer Bezeichnung den Verlauf von $q_{[x]}$ zwischen den Beitrittsaltern $x_0 = OA_0$ und $x_1 = OA_1$ an.

Die Schnittkurven F_0F_1, $F_0'F_1'$ mit den zu XQ in den Abständen $OD_0 = t$, $OD_0' = t'$ parallel gelegten Ebenen bezeichnen den Verlauf von $f_U(x, t)$, bzw. $f_U(x, t')$ bei konstantem t, t', mit andern Worten den altersmäßigen Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeit bei Personen, die t, bzw. t' Jahre versichert sind; die Applikaten dieser Kurven sind also $q_{[x-t]+t}$, resp. $q_{[x-t']+t'}$ von x_0 bis x_1.

Nimmt man an, daß mit der Versicherungsdauer t' die Wirkung der Auslese erloschen ist, so hat die Fläche rechts von der Kurve $F_0'F_1'$ die Gestalt eines *Zylinders* mit Seitenlinien parallel zu OT.

Die Schnittkurven B_0C_0, B_1C_1 mit den zu TQ in den Abständen $OA_0 = x_0$, $OA_1 = x_1$ parallel gelegten Ebenen geben den Verlauf der Funktionswerte $f_U(x_0, t)$, $f_U(x_1, t)$ bei variablem t an, lassen also erkennen, wie sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten bei den Altern x_0, x_1 gestalten, wenn diese Alter nach verschiedenen Versicherungsdauern erreicht werden; ihre Applikaten sind $q_{[x_0-t]+t}$, $q_{[x_1-t]+t}$.

Der zu XT normale, zu XQ unter 45° geneigte Schnitt BH bezeichnet den Verlauf von $f_U(x + t, t)$ bei festem $x = OA$, also den Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeit bei Personen, die im Alter x beitreten; seine Applikaten sind mit $q_{[x]+t}$ zu bezeichnen.

Die Projektionen der Kurven F_0F_1, $F_0'F_1'$, BH auf der Ebene XQ sind Kurven der Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x-t]+t}$, $q_{[x-t']+t'}$, $q_{[x]+t}$ in dem üblichen Sinne (Nr. 225), wobei die auf OX gemessene Abszisse jedesmal das *erreichte* Alter angibt. Was insbesondere den Verlauf $B(F)(F')(F_1')$ der Projektion von BH betrifft, so ist zu bemerken, daß sie bei (F') in die Projektion von $F_0'F_1'$ übergeht; denn in diese projiziert sich die ganze rechts von $F_0'F_1'$ befindliche Fläche.

II. Zu der allgemeinen Auffassung der Sterbenswahrscheinlichkeit, wie sie hier vorgeführt wurde, stehen nun die verschiedenen Arten von *Sterbetafeln*, die gegenwärtig unterschieden werden, in dem nachstehend dargelegten Verhältnis.

a) Summar-, Gesamt-, Durchschnitts- oder *Aggregattafeln* sehen von der Versicherungsdauer völlig ab, stellen also die Sterblichkeit nur als Funktion des Alters dar. Sie stützen sich auf Sterbenswahrscheinlichkeiten der Form

$$q_x = \frac{\theta_x}{E_x}, \tag{7}$$

wobei

$$E_x = \sum_{t=0}^{\tau} E_{[x-t]+t}, \quad \theta_x = \sum_{t=0}^{\tau} \theta_{[x-t]+t}$$

und τ die höchste bei den Personen des Beobachtungsalters x auftretende Versicherungsdauer ist. Man kann hiernach q_x als einen Durchnittswert der $q_{[x-t]+t}$ in bezug auf das variable t und mit den Gewichten $E_{[x-t]+t}$ auffassen, indem tatsächlich

$$q_x = \frac{\sum_0^{\tau} E_{[x-t]+t}\, q_{[x-t]+t}}{\sum_0^{\tau} E_{[x-t]+t}} \tag{8}$$

geschrieben werden kann; dadurch rechtfertigt sich der Name Durchschnitts-Sterbetafeln.

Aggregattafeln bildeten bis in die jüngste Zeit das ausschließliche Ziel der Sterblichkeitsmessung und sind auch heute die im Gebrauch vorherrschenden.

Die auf solche Tafeln bezüglichen Bezeichnungen lauten q_x, p_x, l_x, d_x, usw.

b) Auf die Versicherungsdauer ist bei der englischen Messung vom Jahre 1862 (s. Nr. 231) zum erstenmale ernstlich Rücksicht genommen worden, und zwar fand dies in den Schlußergebnissen folgenden Ausdruck. Um den damals schon erkannten, die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x herabdrückenden Einfluß der Selektion zu eliminieren, sind die Beobachtungen der ersten fünf Versicherungsjahre, die von diesem Einfluß am stärksten betroffen werden, bei der Bildung der Sterbenswahrscheinlichkeiten außer acht gelassen, an die Stelle der q_x also die Werte

$$q_x^{(5)} = \frac{\theta_x^{(5)}}{E_x^{(5)}} \tag{9}$$

gesetzt worden, wobei

$$E_x^{(5)} = \sum_{t=5}^{\tau} E_{[x-t]+t}, \qquad \theta_x^{(5)} = \sum_{t=5}^{\tau} \theta_{[x-t]+t}$$

bedeutet. Auch diese $q_x^{(5)}$ lassen sich nach Art von (8) als Durchschnittswerte der $q_{[x-t]+t}$ darstellen, nur daß die Summenbildung im Zähler und Nenner mit 5 statt 0 beginnt.

Absterbeordnungen, die auf derart gebildete $q_x^{(t)}$ (hier $q_x^{(5)}$) gegründet sind, bezeichnet man als um t Versicherungsjahre abgekürzte oder *abgestutzte Aggregattafeln*. Sie beurteilen die Sterblichkeit strenger als die vollen Aggregattafeln.

Die auf sie bezüglichen Bezeichnungen lauten: $q_x^{(t)}, p_x^{(t)}, l_x^{(t)}, d_x^{(t)}$ usw.

c) An die vorhin erwähnte englische Messung knüpft aber auch schon der erste Versuch an, die Versicherungsdauer in vollständigerer Weise zum Ausdruck zu bringen, als dies durch die abgestutzte Aggregattafel geschieht. Dieser Versuch wurde von Sprague unternommen[1]).

Gegenwärtig gebraucht man den von ihm vorgeschlagenen Namen *Selekttafel* (auch Selektionstafel), zu deutsch Auslesetafel, zunächst für eine Tafel, welche die Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Anfangsperiode, etwa der ersten 10 Jahre, nach Alter *und* Versicherungsdauer, beide von Jahr zu Jahr fortschreitend, zur Darstellung bringt, also eine Tafel der Werte

$$q_{[x-t]+t} \qquad (t = 0, 1, 2, \cdots 9),$$

innerhalb jener Altersgrenzen, für die Beobachtungsmaterial vorhanden war.

d) Die letzte Form, die eine Sterblichkeitstafel für versicherte Leben angenommen, besteht in der Verbindung einer Selekttafel für die ersten t Versicherungsjahre mit einer um dieselben t Jahre abgestutzten Aggregattafel. Eine solche kombinierte Tafel wollen wir als *zweifach abgestufte Sterbetafel* bezeichnen. Ihr Aufbau stützt sich also, wenn speziell die ersten 10 Versicherungsjahre berücksichtigt werden, auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten

$$q_{[x-t]+t} \quad (t = 0, 1, 2, \cdots 9) \quad \textit{und} \quad q_x^{(10)}$$

innerhalb jener Altersgrenzen, für welche Beobachtungen vorliegen.

In Lebenden $l_{[x-t]+t}$ geschrieben läßt eine solche Tafel den allmählichen Abfall von $l_{[x]}$ im Alter x in die Versicherung eingetretenen Personen verfolgen, er spricht sich in den Zahlen

$$l_{[x]}, l_{[x]+1}, l_{[x]+2}, \cdots l_{[x]+9}, \quad l_{x+10}^{(10)}, l_{x+11}^{(10)}, l_{x+12}^{(10)}, \cdots$$

aus.

Proben der verschiedenen Gattungen von Sterbetafeln und vergleichende Betrachtungen über dieselben werden bei Vorführung einiger der neueren Sterblichkeitsmessungen gegeben, beziehungsweise in einer besonderen Nummer (Nr. 236) nachgetragen werden.

231. Die Gesamtheiten von Lebenden und Toten in der Sterblichkeitsmessung unter Versicherten. Im Sinne der modernen Auffassung ist irgendein der Beobachtung unterzogenes Moment im Leben einer versicherten Person durch drei Zeitkoordinaten bestimmt: Durch die Geburtszeit z und die Eintrittszeit y des Individuums und durch die Beobachtungszeit x des betreffenden Moments. Naturgemäß ist $z < y < x$.

1) Journ. of the Inst. of Act. XXI (1879), p. 229—252.

Wählt man zur Unterstützung der Vorstellung die geometrische Verbildlichung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $O(XYZ)$, Fig. 49, auf dessen Achsen die gleichnamigen Zeiten abgetragen werden (wobei der Ursprung so gewählt sein soll, daß ihm auf allen drei Achsen derselbe Zeitpunkt entspricht), so liegen die sämtlichen *Lebenspunkte* eines Individuums auf einer zur X-Achse parallelen Geraden, der *Lebenslinie*, die mit dem *Geburtpunkte* G beginnt und mit dem *Sterbepunkte* T endet. Der gerade beobachtete Lebenspunkt sei B.

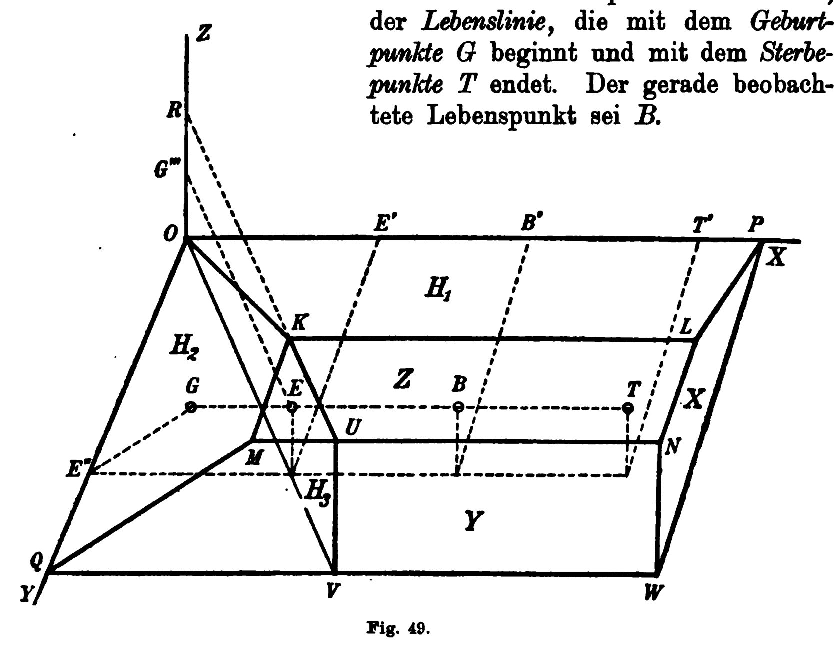


Fig. 49.

Die Größen x, y, z, als Variable aufgefaßt, und ihre drei Differenzen

$$y - z, \quad x - z, \quad x - y,$$

welche der Reihe nach das Eintrittsalter, das Beobachtungsalter und die Beobachtungsdauer ausdrücken, geben Anlaß zur Bildung von sechs Systemen paralleler Ebenen, u. zw. zu den drei Systemen

$$x = \mathsf{X} \tag{1}$$

$$y = \mathsf{Y} \tag{2}$$

$$z = \mathsf{Z} \tag{3}$$

und zu den weiteren drei Systemen

$$y - z = \mathsf{H}_1 \tag{4}$$

$$x - z = \mathsf{H}_2 \tag{5}$$

$$x - y = \mathsf{H}_3 . \tag{6}$$

Die Ebenen der ersten Gruppe sind den Koordinatenebenen parallel, und zwar enthalten (2), (3) Lebens*linien* gleicher Eintritts-, bzw.

gleicher Geburtszeit, die Ebenen (1) Lebens*punkte* gleicher Beobachtungszeit.

Die Ebenen der zweiten Gruppe sind den Halbierungsebenen der Flächenwinkel des Koordinatentrieders parallel und zwar enthalten die (4) Lebens*linien* gleichen Eintrittsalters, die (5), (6) Lebens*punkte* gleichen Beobachtungsalters, bzw. zur gleichen Beobachtungsdauer gehörig. Aus diesen drei Systemen sind von besonderem Interesse die speziellen Ebenen

$$H_1 \equiv y - z = 0 \qquad (4^*)$$

$$H_2 \equiv x - z = 0 \qquad (5^*)$$

$$H_3 \equiv x - y = 0; \qquad (6^*)$$

die erste enthält Lebenslinien des Eintrittsalters Null, also die Lebenslinien solcher Personen, die von der Geburt an versichert sind; die zweite ist Trägerin von Lebenspunkten des Beobachtungsalters Null, also von *Geburtspunkten*; die dritte ist Trägerin von Lebenspunkten der Beobachtungsdauer Null, also von *Eintrittspunkten*. Es beginnt also jede Lebenslinie in einem Punkte der Ebene H_2, durchsetzt die Ebene H_3 im Eintrittspunkte und endet in weiterer Fortsetzung entweder in einem Lebenspunkte, wenn der Versicherte lebend aus der Versicherung schied, oder im Sterbepunkte, wenn er bis zum Ableben versichert blieb.

Eine begrenzte flächenförmige Figur, welche die Lebenslinien schneidet, hebt eine *Gesamtheit von Lebenden* heraus.

Ein begrenzter Raum im Gebiete der Lebenslinien enthält im allgemeinen eine Vielheit von Sterbepunkten und hebt dadurch eine *Gesamtheit von Toten* heraus.

Das in der Figur dargestellte Gebiet, begrenzt von den Ebenen $z = 0$, X, Y, Z, H_1, H_2, umfaßt die Lebenslinien von Versicherten, die in der Zeitstrecke OR geboren, in der Zeitstrecke OQ eingetreten und auf der Zeitstrecke OP beobachtet worden sind.

Als *Träger* von Lebendengesamtheiten benützt man in der Sterblichkeitsmessung bloß Ebenen der Systeme (1), (5), (6), also Ebenen X, H_2 und H_3; und zwar umfaßt eine Gesamtheit

auf einem Träger X *Gleichzeitiglebende*,
„ „ „ H_2 *Gleichaltrige*,
„ „ „ H_3 *Gleichlangversicherte.*[1])

Zur *Begrenzung* benutzt man Ebenen der andern Systeme in der erforderlichen Anzahl. Aus der großen Mannigfaltigkeit seien als besonders wichtig hervorgehoben:

---

1) E. Blaschke, Vorl. über Mathem. Statistik, 1906, p. 51, bezeichnet diese Gesamtheiten der Reihe nach als englische, deutsche und Gothaer und unterscheidet darnach auch ein englisches, deutsches und Gothaer Sterblichkeitsmaß.

Erste Hauptgesamtheit: Träger X; Begrenzung zwei Ebenen Y und zwei Ebenen Z im Abstande eines Jahres: Gleichzeitig Lebende aus einjähriger Eintrittszeit- und einjähriger Geburtszeitstrecke.

Hier ist x konstant, während y, z sich über je ein Jahr erstrecken; daher erstrecken sich das Beobachtungsalter $x - z$ und die Versicherungsdauer $x - y$ über *ein* Jahr, das Eintrittsalter $y - z$ über *zwei* Jahre.

Z. B. Erhebungszeit 31. XII. 1908, Geburtsjahr 1860, Eintrittjahr 1883. Daraus: Beobachtungsalter 47—48, Versicherungsdauer 25—26, Eintrittsalter 22—24.

Zweite Hauptgesamtheit: Träger H_2; Begrenzung zwei Ebenen Y und zwei Ebenen Z im Abstande eines Jahres: Gleichaltrige aus einjähriger Eintrittszeit- und einjähriger Geburtszeitstrecke.

Hier ist $x - z$ fest, während sich y, z über je ein Jahr erstrecken; daher erstreckt sich das Eintrittsalter $y - z$ über zwei Jahre und ebenso die Versicherungsdauer $x - y = x - z - (y - z)$ über zwei Jahre.

Z. B. Alter 48, Geburtsjahr 1860, Eintrittsjahr 1881. Daraus: Eintrittsalter 20—22, Versicherungsdauer 26—28.

Dritte Hauptgesamtheit: Träger H_3; Begrenzung zwei Ebenen Y und zwei Ebenen Z im Abstande eines Jahres: Lebende gleicher Versicherungsdauer aus einjähriger Eintrittszeit- und einjähriger Geburtszeitstrecke.

Hier ist $x - y$ fest, während sich y, z je über ein Jahr erstrecken; daher umfaßt das Eintrittsalter $y - z$ zwei Jahre und ebenso das Beobachtungsalter $x - z = (x - y) + (y - z)$ zwei Jahre.

Z. B. Versicherungsdauer 18 Jahre, Geburtsjahr 1853, Eintrittsjahr 1887. Daraus: Eintrittsalter 33—35, Beobachtungsalter 51—53.

Als Träger einer *Totengesamtheit* wird ein an die Lebendengesamtheit anschließendes Polyeder genommen, dessen weitere Begrenzung wieder Ebenen der erwähnten Systeme bilden. Da auch dies in mannigfacher Weise geschehen kann, so lassen sich sehr verschiedene Sterblichkeitsmaße konstruieren, denen je nach den gewählten Begrenzungen auch verschiedene innere Bedeutung zukommt. Nur eine beschränkte Anzahl derselben ist praktisch verwertet worden.

Schließt man beispielsweise an die zweite Hauptgesamtheit der Lebenden, die durch ein Rechteck in H_2 dargestellt ist, ein Parallelepiped an, das durch die schon verwendeten zwei Ebenen Y und zwei Ebenen Z und eine zweite Ebene H_2 im Abstande eines Jahres von der ersten vervollständigt wird, so handelt es sich um Todesfälle aus einjähriger Altersstrecke, aus demselben Eintritts- und Geburtsjahr, dem die Lebendengesamtheit angehört, aber aus zwei aufeinander folgenden Beobachtungsjahren, und der Quotient aus der Totengesamtheit durch die Lebendengesamtheit bedeutet eine Sterbenswahrscheinlichkeit in dem üblichen Sinne.

232. Die Einbeziehung der Ein- und Austritte. Im Sinne der vorstehenden Ausführungen können auf der Lebenslinie als dem Repräsentanten eines versicherten Individuums drei verschiedene Skalen unterschieden werden:

Die kalendárische,
die nach Altersjahren,
die nach Versicherungsjahren.

Die erste stellt sich in die bürgerliche Zeitrechnung ein und hat deren Anfangspunkt zum Nullpunkt; die zweite geht vom Geburtspunkte aus; die dritte beginnt bei dem Eintrittspunkt.

Im gemeinen Verkehr bezieht man die Lebensereignisse zumeist auf die erste Skala durch mehr oder minder genaue Angaben, so durch Angabe des Datums — gestorben am 13. März 1908 — oder des Jahres und Monats — gestorben im März 1908 — oder bloß des Jahres — gestorben 1908.

Auch die zweite Skala ist gebräuchlich, indem man häufig das Alter angibt, in welchem das Ereignis eintrat; hier begnügt man sich zumeist mit grober Annäherung — gestorben im 70. Lebensjahre, gestorben im Alter von $69^1/_2$ Jahren o. ä.

Die dritte Skala ist eine spezifisch versicherungstechnische und hat nur von diesem Gesichtspunkte Interesse; neben ihr hat auf diesem Gebiete auch die zweite Skala hervorragende Bedeutung, weil ja die Sterbenswahrscheinlichkeit und die mit ihr zusammenhängenden Größen auf das Alter bezogen werden. Dieses Nebeneinandergehen zweier Skalen, die nur ganz ausnahmsweise koinzidieren, macht sich in Theorie und Praxis verschiedentlich bemerkbar.

Eine wichtige damit zusammenhängende Frage betrifft die Behandlung der Wanderungen im Versicherungsstocke, d. i. der *Ein- und Austritte.*

Wir stellen uns auf den Standpunkt, es handle sich um die Bestimmung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit zu einem ganzjährigen Alter x (ohne oder mit Berücksichtigung der Versicherungsdauer).

Erfolgte der Eintritt immer nur an einem Geburtstage und der Austritt nur durch Tod, so würde sich die Bestimmung von q_x einfach gestalten: Man zählt diejenigen, die *in* der Gesellschaft das Alter x überschritten haben, fügt dazu die Anzahl der im Alter x eingetretenen und erhält so den Nenner für den empirischen Wert von q_x, während der Zähler die Anzahl der in der Gesellschaft auf der Altersstufe $(x, x+1)$ Gestorbenen gebildet wird.

In Wirklichkeit aber geschieht der Eintritt zu beliebigen Zeiten und außer dem Todesfall gibt es noch andere Austrittsmöglichkeiten, die sich ebenfalls an kein bestimmtes Alter binden.

Eine Person, welche im Alter $x - \theta$ eintritt und im Alter $x + k + \theta'$ austritt — x, k sind positive ganze Zahlen, θ, θ' positive

echte Brüche —, steht durch $k + \theta + \theta'$ Jahre unter Beobachtung; sie überschreitet während derselben die Altersgrenzen $x, x + 1, \cdots x + k$ und durchlebt somit k *volle* Altersjahre innerhalb der Gesellschaft; würde man also von den Jahresbruchteilen θ, θ' der Beobachtungsdauer absehen, so könnte die an der Person vollzogene Beobachtung für die Sterblichkeitsmessung der k Alter $x, x + 1, \cdots x + k - 1$ verwertet werden. Ein solcher Vorgang wäre aber mit einer Schmälerung des Beobachtungsmaterials verbunden, wie dies auch aus der folgenden Betrachtung hervorgeht.

Angenommen wieder, es handle sich um die Sterbenswahrscheinlichkeit der x-jährigen. Man hat unter den Mitgliedern der Gesellschaft zu unterscheiden:

1) solche, welche das Alter x unter Beobachtung überschritten haben;

2) solche, welche auf der Altersstufe $(x, x + 1)$ in die Gesellschaft eingetreten sind.

Die Gruppe 1) zerfällt wieder in solche,

a) die das nächste Alter $x + 1$ unter Beobachtung überschreiten;
b) die auf der Altersstufe $(x, x + 1)$ in der Gesellschaft sterben;
c) die auf dieser Altersstufe austreten.

Die Gruppe 2) hinwiederum trennt sich in solche,

a) die das nächste Alter $x + 1$ unter Beobachtung überschreiten;
b) die vor Erreichung dieses Alters in der Gesellschaft sterben;
c) die vor Erreichung desselben aus der Gesellschaft austreten.

Für den gedachten Zweck würden bei dem oben erwähnten Vorgange nur die Gruppen 1a) und 1b) zur Verwendung kommen, und zwar wäre q_x der Quotient aus 1b) durch 1a) + 1b). Gänzlich außer Betracht blieben die Gruppen 2b) und 2c), während 2a) erst bei der nächst höheren Altersstufe $x + 1$ in Verwendung gezogen würde.

Man hat nun gesucht, die *ganze* Beobachtungsdauer auszunützen; tatsächlich ist dies mit gewissen Annahmen erreichbar, die wenigstens bei Ausschluß der jüngsten Altersstufen, welche aber hier ohnehin nicht in Betracht kommen, sich von den wirklichen Verhältnissen nicht viel entfernen dürften.

Es handle sich wieder um die Ermittelung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x der x-jährigen. Dabei sollen folgende Daten zur Verwendung kommen:

Die A Personen, welche das Alter x unter Beobachtung *überschritten* haben;

die B Personen, welche zwischen den Altern x und $x + 1$ *eingetreten* sind;

die C Personen, welche zwischen den Altern x und $x + 1$ *ausgetreten* sind;

die M Personen, deren *Ableben* auf der genannten Altersstufe beobachtet wurde.

In der nachfolgenden Betrachtung bezeichne $l(z)$ die Menge der Überlebenden des Alters z und werde als eine stetige Funktion von z betrachtet.

Zunächst ist eine plausible Annahme über die Verteilung der Ein- und Austritte erforderlich, um eine allgemeine Rechnung aufnehmen zu können; als solche darf wohl die gelten, *daß sich die Ein- und die Austritte gleichmäßig über die einjährige Altersstufe verteilen.*

Dies vorausgesetzt, stellt sich die Anzahl derjenigen, welche in dem Zeitintervall $x+h$ bis $x+h+dh$ (h und $h+dh$ positiv und kleiner als 1) eingetreten sind, auf Bdh; diesen entsprechen

$$Bdh \cdot \frac{l(x)}{l(x+h)}$$

Personen, die durch das Alter x gingen, ohne hierbei beobachtet worden zu sein; folglich sind davon

$$Bdh \cdot \frac{l(x)}{l(x+h)} - Bdh = \left\{\frac{l(x)}{l(x+h)} - 1\right\} Bdh \tag{1}$$

auf der Altersstufe $(x, x+1)$ gestorben, ohne daß die betreffenden Todesfälle in der Gesellschaft zur Beobachtung gekommen wären.

In demselben Zeitintervall sind ferner Cdh Personen aus der Gesellschaft ausgetreten; von diesen werden

$$Cdh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)}$$

das Alter $x+1$ überschreiten, ohne mehr unter Beobachtung zu stehen; folglich sterben, ebenfalls außer Beobachtung,

$$Cdh - Cdh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)} = \left\{1 - \frac{l(x+1)}{l(x+h)}\right\} Cdh \tag{2}$$

Personen.

Es ist also im Ganzen so, als ob

$$A + Bl(x)\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}$$

Personen unter Beobachtung durch das Alter x gegangen und

$$M + B\left\{l(x)\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} - 1\right\} + C\left\{1 - l(x+1)\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)}\right\}$$

Personen unter Beobachtung gestorben wären; daraus berechnet sich, wenn man zur Abkürzung

$$\int_0^1 \frac{dh}{l(x+h)} = J$$

setzt, die Sterbenswahrscheinlichkeit:

$$q_x = \frac{M + B\{Jl(x) - 1\} - C\{Jl(x+1) - 1\}}{A + BJl(x)},$$

woraus auch

$$Aq_x + (B - C)\{1 - l(x+1)J\} = M \qquad (3)$$

folgt.

Um die Rechnung weiterführen zu können, ist eine Annahme über die Verteilung der Sterbefälle notwendig, und diese kann, da von den jüngsten Altersklassen abgesehen werden darf, dahin getroffen werden, *daß die Todesfälle einer einjährigen Altersklasse sich gleichmäßig über dieselbe verteilen.*

Analytisch ausgedrückt heißt dies, daß

$$l(x) - l(x+h) = h[l(x) - l(x+1)]; \qquad (4)$$

dann aber ist

$$J = \int_0^1 \frac{dh}{l(x) - h[l(x) - l(x+1)]} = \frac{1}{l(x) - l(x+1)} \operatorname{Log} \frac{l(x)}{l(x+1)},$$

und die Gleichung (3) geht mit Rücksicht darauf, daß $\frac{l(x+1)}{l(x)} = 1 - q_x$ ist, über in:

$$Aq_x + (B - C)\left\{1 + \frac{1 - q_x}{q_x} \operatorname{Log}(1 - q_x)\right\} = M. \qquad (5)$$

Die Entwicklung des den natürlichen Logarithmus enthaltenden Gliedes gibt aber

$$(1 - q_x)\left[-1 - \frac{q_x}{2} - \frac{q_x^2}{3} - \cdots\right],$$

und dies reduziert sich, wenn man bei der ersten Potenz von q_x mit Rücksicht auf dessen Kleinheit stehen bleibt, auf $-1 + \frac{q_x}{2}$. Die Einführung dieses Wertes verwandelt (5) in

$$Aq_x + \frac{B - C}{2} q_x = M,$$

woraus schließlich

$$q_x = \frac{M}{A + \frac{B - C}{2}} \qquad (6)$$

folgt.[1]) Man hat also die Anzahl der in der Gesellschaft beobachteten Todesfälle mit einer ideellen oder *rechnungsmäßigen* Zahl von Überlebenden des untern Alters x zu verbinden, welch letztere erhalten wird, wenn man die Anzahl der beobachteten x-jährigen um die halbe

1) Vgl. Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften usw. Berlin 1883, p. XXIX—XXXI; ferner Th. Wittstein im Arch. f. Math. u. Phys., XXXIX.

Anzahl der Eingetretenen vermehrt und um die halbe Anzahl der Ausgetretenen vermindert.

Eine andere Hypothese über die Verteilung der Ein- und Austretenden hat Zeuner[1]) der Rechnung unterlegt und eine Formel abgeleitet, die wir wegen der Anwendung, die er von ihr für die Lösung eines andern Problems, die Invalidität betreffend, gemacht hat, hier entwickeln werden; bezüglich der jetzt vorliegenden Aufgabe der Sterblichkeitsmessung führt diese Formel wieder auf das Resultat (6). Die Hypothese Zeuners geht dahin, *daß die relative Häufigkeit der Ein- und Austritte bei irgendeinem Alter proportional sei der Menge der Überlebenden dieses Alters.* Sie stützt sich also auf die Vermutung, daß je mehr Personen eines Alters vorhanden sind, um so mehr Personen dieses Alters ein- und austreten werden.

Auf Grund dieser Annahme beträgt die Menge der in dem Altersintervall $(x+h,\ x+h+dh)$ Eintretenden

$$\beta l(x+h)dh, \tag{7}$$

jene der Austretenden

$$\gamma l(x+h)dh, \tag{8}$$

wobei β, γ Konstanten bedeuten, die sich auf Grund der Bemerkung ergeben, daß das Integral von (7), über das Intervall (0, 1) erstreckt, die bekannte Zahl B der Eingetretenen und das ebenso bestimmte Integral von (8) die Zahl C der Ausgetretenen geben muß; also ist

$$\beta\int_0^1 l(x+h)dh = B,$$

$$\gamma\int_0^1 l(x+h)dh = C.$$

Macht man über die Verteilung der Sterbefälle dieselbe Annahme wie vorhin, so gilt der Ansatz (4), aus welchem

$$l(x+h) = l(x) - h[l(x) - l(x+1)]$$

und

$$\int_0^1 l(x+h)dh = \frac{l(x)+l(x+1)}{2} \tag{9}$$

folgt; hiermit ergeben die obigen Gleichungen

$$\beta = \frac{2B}{l(x)+l(x+1)},\quad \gamma = \frac{2C}{l(x)+l(x+1)}.$$

Bezeichnet man die Anzahl derer, welche in der Gesellschaft das Alter $x+1$ erreichen, mit A_1, so kann diese in zweifacher Weise

1) Abhandlungen aus der mathem. Statist., p. 116ff.

ausgedrückt werden. Einmal besteht sie aus den A ursprünglich Vorhandenen und aus den Eingetretenen, vermindert um die Ausgetretenen und Gestorbenen, so daß

$$A_1 = A + B - C - M; \tag{10}$$

auf der anderen Seite setzt sie sich aus den Überlebenden der ursprünglich Vorhandenen und der sukzessive Eingetretenen, vermindert um die Überlebenden der sukzessive Ausgetretenen; nun leben von den Eingetretenen (7) im Alter $x + 1$ noch

$$\beta l(x+h)dh \cdot \frac{l(x+1)}{l(x+h)} \quad \text{oder} \quad \beta l(x+1)dh,$$

von allen Eingetretenen also

$$\beta l(x+1)\int_0^1 dh = \beta l(x+1),$$

von den Ausgetretenen (8) noch

$$\gamma l(x+h)dh \frac{l(x+1)}{l(x+h)} \quad \text{oder} \quad \gamma l(x+1)dh,$$

von allen Ausgetretenen demnach

$$\gamma l(x+1)\int_0^1 dh = \gamma l(x+1);$$

infolgedessen ist auch

$$A_1 = Ap_x + (\beta - \gamma)l(x+1)$$

und dies verwandelt sich nach Einsetzung der Werte für β, γ und mit Beachtung des Umstandes, daß $\frac{l(x+1)}{l(x)} = p_x$ ist, in den Ansatz:

$$A_1 = p_x\left[A + \frac{2(B-C)}{1+p_x}\right]. \tag{11}$$

Verbindet man die beiden Ausdrücke (10) und (11) für A_1 zu einer Gleichung und führt dabei q_x statt p_x ein, so wird:

$$A + B - C - M = (1 - q_x)\left[A + \frac{B-C}{1 - \frac{q_x}{2}}\right];$$

entwickelt man rechts bis auf Glieder der ersten Ordnung in q_x, so entsteht weiter

$$A + B - C - M = A(1 - q_x) + (B - C)\left(1 - \frac{q_x}{2}\right),$$

woraus nach entsprechender Reduktion

$$M = \left(A + \frac{B-C}{2}\right)q_x$$

folgt, was im Wesen mit der Gleichung (6) übereinstimmt.

Anders steht die Sache, wenn statt des Alters das *Versicherungsjahr* zur Grundlage genommen wird. Eine unterjährige Periode zu Beginn der Versicherung gibt es dann nicht, weil jede vom Zeitpunkte ihres Abschlusses an gezählt wird, daher entfallen Eintritte im früheren Sinne und es verbleiben bloß die Austritte. Macht man wieder die Annahme, daß sie sich gleichmäßig über das Jahr verteilen, so bedeutet dies so viel als alle Austritte auf die Mitte des betreffenden Versicherungsjahres zu reduzieren und für jeden noch ein halbes Versicherungsjahr über das letztvollendete in Rechnung zu bringen; auch so kann man die Sachlage auffassen, daß die Hälfte der Austretenden in den Anfang, die andere Hälfte in das Ende des angebrochenen Versicherungsjahres verlegt wird.

Will man jedoch eine der Wirklichkeit näher sich anpassende Verrechnung der Austritte durchführen, so kann dies nur durch ihre detailliertere Registrierung nach Bruchteilen des begonnenen und nicht vollendeten Versicherungsjahres erzielt werden. Ein solcher Vorgang ist bei der neuesten englischen Sterblichkeitsmessung beobachtet worden (siehe hierüber Nr 234).

Bei der Benutzung des Versicherungsjahres als Grundlage der Messung wird das tabellarische Beitritts*alter* in der Regel nach dem dem Eintrittstage nächstliegenden Geburtstage bestimmt, so daß es von dem wirklichen Beitrittsalter um ein halbes Jahr nach auf- oder abwärts differieren kann.

233. Gewinnung des Materials. Aufzählung von Sterblichkeitsmessungen. Die Konstruktion einer Sterbetafel für versicherte Leben, zumal einer solchen, die auch die Versicherungsdauer berücksichtigt, erfordert eine breite Beobachtungsgrundlage, sollen die einzelnen Alter, im zweiten Falle auch die unterschiedenen Beobachtungsdauern, genügende Daten aufweisen. Eine einzelne Anstalt kann nur bei beträchtlichem Geschäftsumfang und da auch erst nach einer langen Geschäftstätigkeit ein Beobachtungsmaterial aufbringen, das sie in den Stand setzt, eine Tafel oder gar die für verschiedene Versicherungskombinationen erforderlichen Tafeln aus eigenen Erfahrungen abzuleiten; ein allzu langer Beobachtungszeitraum kann dabei die Brauchbarkeit der gewonnenen Resultate in Frage stellen.

Dieser Umstand führte schon vor Mitte des vorigen Jahrhunderts englische Aktuare auf den Gedanken einer Kollektivoperation, indem Gesellschaften, die unter annähernd gleichartigen Verhältnissen arbeiten, ihre gesammelten Erfahrungen einer Zentralstelle überweisen, der die Aufgabe der Bearbeitung nach einem festzulegenden Plane zufällt. Auf diesem Wege, der in England und Schottland nun schon dreimal beschritten wurde und außerhalb dieser Staaten mehrfache Nachahmung fand, war es möglich, bei beschränkter Beobachtungsperiode (wenigstens bei der jüngsten Operation) zureichende Beobachtungs-

daten zu gewinnen, um nicht bloß neue Sterbetafeln abzuleiten, sondern auch für die Beantwortung mannigfacher Fragen betreffend Sterblichkeit, Bewegung unter den Versicherten u. a. m. die statistische Unterlage zu schaffen.

Bestand der Zweck also ursprünglich darin, für eine einzelne Anstalt oder eine Gruppe kooperierender Anstalten eine Tafel für den eigenen Geschäftsbetrieb zu konstruieren, so hat sich im Laufe der Zeit die Aufgabe immer mehr erweitert, und die neueren Messungen führten zu *Tafelwerken*, die vielen speziellen Zwecken dienen können. Auch ist es üblich geworden, das ganze Urmaterial zu veröffentlichen und über die Grundsätze und Methoden seiner Bearbeitung Rechenschaft abzulegen, um so der Kritik und der weiteren Forschung die Wege zu ebnen. So sind denn die Publikationen über Sterblichkeitsmessungen zu Hauptquellen der mathematischen Statistik geworden.

Es empfiehlt sich nun, bevor in das nähere eingegangen wird, eine Übersicht über die wichtigeren Sterblichkeitsmessungen zu geben, deren manche wohl nur mehr ein historisches Interesse beanspruchen dürfen, während andere, auch ältere, in der heutigen Praxis eine Rolle spielen und wieder andere, wenn auch noch nicht oder wenig in den Gebrauch gekommen, durch ihre Anlage und Durchführung das Interesse des Theoretikers und Praktikers verdienen.

Von Untersuchungen über die Sterblichkeit unter *Rentnern* und den daraus hervorgegangenen Tafeln seien angeführt:

Die Tafel von *Deparcieux*[1]), abgeleitet aus den Erfahrungen über Tontinen, eine Einrichtung, die der Versicherung auf feste Renten voranging;

die Sterbetafeln von Brune[2]), gerechnet aus den Aufzeichnungen der Königl. Preußischen Allgemeinen Witwen-Verpflegungsanstalt in Berlin, zuerst den Zeitraum 1776—1834, später den Zeitraum 1776—1845 umspannend;

die Tafel der Preußischen Rentenversicherungsanstalt von Semmler[3]), auf die vor den Renten vielfach betriebenen Jahresgesellschaften mit Altersklassen gegründet;

die Tafel der Königlichen Sächsischen Altersrentenbank von 1892[4]), aus dem Beobachtungszeitraum 1859—1869;

die Tafel der Königlichen Sächsischen Altersrentenbank von Helm[5]) vom Jahre 1904, aus dem Beobachtungszeitraum 1859—1899;

1) Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. 1746.

2) Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 16 (1837), p. 16f. — Allgem. Versicherungszeitung 1847, p. 187 u. 196.

3) Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen III (1875).

4) Dekrete Nr. 22 und 26 an die Stände (Bd. III) vom 21. XI. 1891.

5) Dekrete Nr. 20 und 28 an die Stände (Bd. III) vom 24. XI. 1903, bzw. 15. I. 1904.

die Deutschen Rentnersterbetafeln von 1891 und 1893[1]), aus einer Kollektivaktion von 38 Anstalten hervorgegangen; die aus 1891 stammende ist für beide Geschlechter angelegt, die von Semmler 1893 abgeleiteten Tafeln trennen männliche und weibliche Personen;

die französische Rentnersterbetafel R. F. von 1895[2]), durch Kooperation entstanden und von Kertanguy ausgeführt, Beobachtungszeitraum 1819—1877;

die französische Rentnersterbetafel 1900—D[3]), aus einer Kollektivaktion hervorgegangen, mit dem Beobachtungszeitraum 1819—1898.

Sterblichkeitsuntersuchungen an Personen, die für den *Todesfall* versichert sind, haben einige größere Anstalten an den eigenen Erfahrungen und zunächst für den eigenen Geschäftsgebrauch ausgeführt; es seien hier genannt:

Die Gothaer Tafel[4]), abgeleitet aus den Erfahrungen des Zeitraums 1829—1878;

die Beamtenvereinstafel[5]), gegründet auf die Statistik des Ersten Allgemeinen Beamtenvereins der österr.-ungar. Monarchie, Beobachtungsperiode 1865—1888;

die neue Gothaer Bankliste[6]), aus den Erfahrungen der Jahre 1852—1896 von J. Karup konstruiert;

die Leipziger Tafel[7]), von G. Höckner abgeleitet aus den Erfahrungen der Lebensversicherungsgesellschaft in Leipzig während des Zeitraums 1864—1899; diese zwei zuletzt genannten Messungen fassen das Problem schon in seiner neuesten Entwicklungsform und machen sich die Herstellung einer zweifach abgestuften Sterblichkeitstafel zum Ziele.

In jüngster Zeit haben auch die „Assicurazioni generali" in Triest[8]) und der „Anker" in Wien[9]) Tafeln aus den eigenen Beobachtungen abgeleitet im Anschlusse an die weiter unten zu nennende österreichisch-ungarische Sterblichkeitsmessung, an der die genannten Anstalten beteiligt waren.

---

1) Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen, XIX (1891) und B. Schmerler, Die Sterblichkeitserfahrungen unter den Rentenversicherten, Berlin 1883.

2) Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurances etc. Paris 1895.

3) Tables de mortalité 1900 des rentiers et assurés etc. Paris 1902.

4) Mitteil. a. d. Geschäfts- und Sterblichkeitsstatist. d. Lebensvers.-Bank f. Deutschland in Gotha, 1880.

5) Der Erste Allgem. Beamtenverein der österr.-ungar. Monarchie. Denkschrift, Wien 1890.

6) Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank a. G. Jena 1903.

7) Änderung der Rechnungsgrundlagen sowie Aufstellung einer Sterblichkeitstafel etc. für die Lebensversicherungsgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907.

8) Als Manuskript gedruckt, Triest 1907.

9) Fünfzigster Rechenschaftsbericht etc. (Jubiläumsschrift), Wien 1909, p. 41—50.

Von Kollektivunternehmungen großen Stils, beziehungsweise von den Ergebnissen solcher, seien die folgenden namhaft gemacht:

Die Tafel der 17 englischen Gesellschaften[1]), aus einem bis Ende 1837 reichenden Beobachtungszeitraum gewonnen;

die Tafeln der 20 britischen Gesellschaften[2]), deren Beobachtungsperiode mit dem 31. XII. 1862 schließt; die für gesunde (*H*) männliche (*M*) und weibliche (*F*) Personen geltenden Tafeln führen die Bezeichnungen H^M, H^F, $H^{M(5)}$, $H^{F(5)}$, die für beide Geschlechter geltenden heißen H^{MF}, $H^{MF(5)}$;

die Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften[3]), mit einem bis Ende 1874 reichenden Beobachtungszeitraum;

die Deutschen Sterblichkeitstafeln[4]) aus den Erfahrungen von 23 Gesellschaften, reichend bis Ende 1875;

die Tafeln der 4 französischen Gesellschaften[5]), mit dem Beobachtungszeitraum 1819—1887;

die Tafeln der 60 britischen Gesellschaften[6]), aus den Erfahrungen des Zeitraums 1863—1893, der sich an die Beobachtungsperiode für die Tafeln der 20 britischen Gesellschaften anschließt, abgeleitet;

die österreichisch-ungarische Messung, in zwei nach gleichen Grundsätzen und gleichen Methoden arbeitende Parallelaktionen, eine österreichische[7]) und eine ungarische, zerfallend, deren Ergebnisse

---

1) Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 Life Assurance Offices. London 1843.

2) The mortality experiences of life insurance companies collected by the Institute of Actuaries. London 1869.

3) System and Tables of Life Insurance. Norwich, Conn. 1881.

4) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften. Berlin 1883.

5) Wie unter 3), p. 142.

6) Die bezügliche Publikation zerfällt in drei Teile. Das Beobachtungsmaterial mit den unausgeglichenen Tafeln erschien in vier Bänden unter dem gemeinsamen Haupttitel: Combined experience of assured lives (1863—1893) deduced from the records contributed by companies in respect of assurance effected within the united Kingdom as collected and arranged by the Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland. London 1899—1900. Über die befolgten Grundsätze und Methoden gibt Aufschluß ein weiterer Band unter dem Titel: British Offices Life Tables 1893. An account of the principles and methods etc. London 1903. Die ausgeglichenen Tafeln und darauf gegründete technische Tabellen sind drei weiteren Bänden vorbehalten unter dem Titel: British Offices Life Tables 1893. Tables deduced from the graduated experience etc. London.

7) Die Publikation, das Beobachtungsmaterial, die unausgeglichenen und ausgeglichenen Tafeln enthaltend, umfaßt vier Bände unter dem Haupttitel: Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten. Wien 1907. Als Herausgeber fungiert die „Mathematisch-statistische Vereinigung des österr.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten". Der I. Band enthält auch die Beschreibung und Methodik der Arbeit.

nachher zu österreichisch-ungarischen Sterblichkeitstafeln[1]) vereinigt worden sind.

Die beiden zuletzt genannten Unternehmungen führten zu Tabellenwerken, die das Problem der Sterblichkeitsmessung in weitgehender Detailierung behandeln; so umfaßt das englische Werk außer Versicherungen, die den Todesfall einschließen, auch Renten.[2])

In Deutschland schreitet eben jetzt der Verein Deutscher Lebensversicherungsgesellschaften an die Durchführung gemeinsamer, im großen Stil geplanter und neue Gesichtspunkte einbeziehender Sterblichkeitsuntersuchungen für den Beobachtungszeitraum 1876—1906.

234. Fortsetzung. Die Zähleinheit. Zählkarten. I. Der Durchführung einer Sterblichkeitsmessung muß die Feststellung dessen vorangehen, was man als Beobachtungsobjekt betrachten will, die Feststellung der *Zähleinheit.* Bei der Sterblichkeitsmessung an einer Bevölkerung kann kein Zweifel darüber bestehen, daß es das Individuum, die *Person,* ist. Richtet sich hingegen die Untersuchung auf Versicherte, so kompliziert sich die Frage einmal durch die Eigenartigkeit des Versicherungsbetriebes, dann durch das verfolgte praktische Ziel und schließlich durch die Rücksicht auf die Möglichkeit einer konsequenten Durchführung. Was speziell den ersten Punkt betrifft, so liegt die Komplikation hauptsächlich in den mehrfachen Versicherungen, die sich schon im Material einer einzelnen Anstalt, noch mehr aber in den vereinigten Erfahrungen einer Gruppe von Anstalten geltend machen.

Es sind in diesem Belange bisher vier Gedanken zum Ausdruck gebracht und ausgeführt worden, die sich in Kürze durch die Schlagworte: *Police, Person, versicherte Geldeinheit, Auslese* kennzeichnen lassen. Die durch das Wort „Person" charakterisierte Zählmethode war seit der zweiten englischen Messung bis in die jüngste Zeit die herrschende.

Bei der *Police* als Zähleinheit fällt die Person, deren Leben sie betrifft, außer Betracht und es kommt eine mehrfach versicherte Person so oft zur Zählung, als auf sie lautende Policen in dem gesammelten Material sich vorfinden. Dieser Vorgang wurde bei der Herstellung der Tafel der 17 englischen Gesellschaften befolgt.

1) Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten. Wien 1909.

2) Bezüglich der Kritik der älteren Mesungen ist zu verweisen auf: E. Roghé, Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten. Jena 1891 (Supplem. XVII der Jahrb. f. Nationalökonomie und Statistik). Eine von Beschreibungen und Vergleichungen begleitete Wiedergabe zahlreicher Sterbetafeln findet man in der Widmung an den V. intern. Kongreß für Versicherungswissenschaft: Die gebräuchlichen Sterblichkeitstafeln der im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensversicherungsunternehmungen. Berlin 1906 (Veröffentl. d. D. Vereins f. Versich.-Wissensch.).

Stellt man den Grundsatz auf, die *Person* solle die Zähleinheit bilden, so bereitet seine Durchführung bei nur einmal Versicherten keine Schwierigkeit. Bei den mehrfach Versicherten entstehen aber zunächst prinzipielle Schwierigkeiten bezüglich einer einwandfreien Behandlung der äußerst mannigfachen Fälle des zeitlichen Zusammenhangs der einzelnen Versicherungen, Schwierigkeiten, die sich noch steigern, wenn man nicht nach einer Aggregattafel allein fragt, sondern auch den Einfluß der Versicherungsdauer, sei es in einer abgestutzten Aggregattafel, sei es in einer Selekttafel zum Ausdruck bringen will. Zu den prinzipiellen treten noch technische Schwierigkeiten bezüglich der Zusammenbringung eine und dieselbe Person betreffender Versicherungen, die in dem Maße wachsen, als das Material größer wird.

Wie schon bemerkt, war diese Zähleinheit seit langem die herrschende. Die Grundsätze aber, nach welchen der *Ersatz* der auf eine und dieselbe Person bezüglichen Einzelbeobachtungen, entsprechend den einzelnen von ihr eingegangenen Versicherungen, durch eine einzige fiktive Beobachtung geübt wurde, waren nicht durchwegs die gleichen, und da es schwer ist, ihren Einfluß auf das Resultat abzumessen, so haben die Ergebnisse streng genommen nicht unmittelbare Vergleichbarkeit.

Der Gedanke, die versicherte *Geldeinheit* als Zählobjekt zu wählen, entspringt der Betonung des geschäftlichen Interesses. Bei seiner Befolgung kommt die Person gewissermaßen mit einem ihrer Versicherungssumme proportionalen Gewichte in Rechnung, und jede von ihr neu versicherte Summe sowie jede Abändernng der ursprünglichen und einer etwaigen späteren Versicherung wird als neuer Beobachtungsfall behandelt. Zur Anwendung kam dieses Verfahren bei der Tafel der 30 amerikanischen Gesellschaften.

Die an letzter Stelle genannte Methode betrachtet den Akt der *Auslese* (Selektion) als das wesentliche, gleichgültig, ob es sich um eine ärztliche oder um Selbstauslese handelt. Jede *selbständige* Auslese bildet eine Zähleinheit; die Selbständigkeit kann eine Einschränkung erfahren durch Festsetzung eines Minimalzeitraumes, der die Auslese von der ihr vorangehenden trennt; es bleibt dann nur übrig, einen Komplex von Versicherungen, die von derselben Person auf Grund *eines* Ausleseaktes abgeschlossen worden sind, auf eine fiktive Einzelbeobachtung zu reduzieren (sogen. Nachversicherungen auszuscheiden) Der Person wird bei diesem Zählungsmodus ein der Zahl an ihr vorgenommener selbständiger Auslesen proportionales Gewicht eingeräumt.

Fragt man zunächst nach dem praktischen Effekt der verschiedenen Zählmethoden, so muß gesagt werden, daß er sich nach angestellten Vergleichen nicht in allzu großen Unterschieden der schließlichen Resultate äußert. Die Ursache dieser auf den ersten Blick etwas be-

fremdlichen Erscheinung ist in der Eigenartigkeit der Zusammensetzung des Materials zu suchen.

Richtet man die Aufmerksamkeit auf die biologische Bedeutung der Zahlen, so muß man auf den ersten Blick erkennen, daß von einer solchen bei der Zählung nach Polizzen und nach Geldeinheiten nicht ernstlich die Rede sein kann. Wenn zwischen den beiden übrigen zu entscheiden wäre, so unterliegt es keinem Zweifel, daß eine nach einwandfreien Grundsätzen durchgeführte Personenzählung in dem in Rede stehenden Belange höher stünde als eine Selektionszählung. Erwägt man aber, daß bei einer Sterblichkeitsmessung für Versicherungszwecke die Tatsache einer Auslese mit positivem Ergebnis, daher das Vorhandensein mehrerer solcher Akte bei ein und derselben Person einen Umstand bedeutet, dem ein Gewicht beigelegt werden muß, so kommt man zu dem Schlusse, daß die Zählung nach Auslesen sich der Natur der Aufgabe ganz wohl anpaßt.

Würden aber die beiden Methoden der Personen- und der Selektionszählung auf ein und dasselbe Erfahrungsmaterial angewendet zu erheblich verschiedenen Resultaten führen, dann allerdings stiege die schwierig zu beantwortende Frage auf, welchem der Resultate der Vorzug zu geben sei; theoretisch ließe sie sich kaum lösen, die praktische Erprobung würde eines langen Zeitraumes und großer Arbeit bedürfen.

Bei der österreichisch-ungarischen Messung ist nun der dankenswerte Entschluß gefaßt worden, zur Feststellung des Verhältnisses der beiden Methoden den einzig richtigen Weg der praktischen Erprobung zu beschreiten, sie gleichmäßig auf ein umfangreiches Material zur Anwendung zu bringen und bis zur Herstellung von Schlußresultaten zu verfolgen. Das Ergebnis war, daß *beide Zählweisen, die Personen- und die Selektionszählung, zu Resultaten führen, die vom Standpunkte der Versicherungspraxis als gleichwertig erachtet werden können.*

Diese Feststellung, hinter der eine beträchtliche Summe von Arbeit steckt, hat eine große praktische Tragweite, da sich die beiden Methoden in ihrer *technischen Ausführung* wesentlich unterscheiden. Eine Selektionszählung gestaltet sich wesentlich einfacher und erfordert einen viel geringeren Arbeitsaufwand als eine Personenzählung und ihre Resultate sind in theoretischer Beziehung in manchen Punkten einwandfreier; auch der Umstand ist nicht ohne Belang, daß sich Selektionszählungen leicht verbinden und fortsetzen lassen.[1])

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen im I. Bande der „Absterbeordn. aus Beobacht. an österr. Versich.", ferner G. Höckners „Kritische Bemerkungen" in der Zeitschr. f. d. ges. Versich.-Wissensch. VIII (1908) p. 631—637 und desselben Autors „Einige Bemerkungen über die Zähleinheit bei Sterblichkeitsmessungen", Assekuranz-Jahrb. XXXI (1910) p. 199—207; endlich G. Rosmaniths „Zur Methodik der Sterblichkeitsmessung", Versich.-wissensch. Mitteil. der mathem.-statist. Ver-

II. Seit der zweiten englischen Messung ist es üblich geworden über die einzelnen Versicherungsfälle, die in den festgesetzten Rahmen der Operation fallen, *Zählkarten* auszustellen und an diesen die Zählmanipulationen auszuführen. Dieser Vorgang hat sich als so vorteilhaft erwiesen, daß er gegenwärtig bei allen größeren statistischen Operationen geübt wird. Die Konzeption der Zählkarte hängt von dem ganzen Arbeitsplane ab, richtet sich nach den zu lösenden Aufgaben und nach den Methoden, die bei der Aufarbeitung befolgt werden sollen; sie erfordert große Sorgfalt und Voraussicht, sollen nicht im Zuge der Arbeit Schwierigkeiten sich einstellen, denen dann schwer zu begegnen wäre.

Zwei Beispiele mögen zur Illustration dienen.

Bei der *englischen* Messung 1863—1893 wurde der zu erfragende Inhalt der Karte wie folgt festgesetzt:

1. Policennummer.
2. Versicherte Summe (bzw. Rente).
3. Beschreibung der Police (Versicherungsart; entfällt bei Rentenkarten).
4. Mit oder ohne Anteil am Gewinn.
5. Name des Versicherten.
6. Seine Beschäftigung.
7. Datum der Geburt.
8. Datum des Eintritts.
9. Datum des Austritts.
10. Art des Austritts.

Die Anordnung dieser Daten ist aus dem Bilde A, das in $\frac{2}{3}$ der natürlichen Größe gehalten ist, ersichtlich; das fett vorgedruckte ist von der beteiligten Anstalt zu beantworten, das in Kleindruck gehaltene wird in der Zentralstelle ausgefüllt. Die Probe bezieht sich auf eine neue Versicherung (s. Nr. 236); die Karten für alte Versicherungen (vor dem 1. I. 1863 abgeschlossen) enthalten im oberen Teile zwischen den Zeilen „Of Entry“ und „Of Exit“ noch eine mit „In 1863“, im Mittelteile vor „Duration of Policy“ die Zeile „Duration before 1863“ (Vordauer bei Eintritt in die Beohachtung), im untern Teile zwischen „Age of Entry“ und „Age of Exit“ die Zeile „Age in 1863“. Das Geschlecht war durch die Farbe der Karte gekennzeichnet. Die Arten des Austritts hatten die Bezeichnungen: D (Tod),

---

einigung IV (1909) p. 192—207. Höckner tritt für die Personenzählung ein in einem von ihm näher bezeichneten Sinne, der die wiederholte Zählung einer Person unter Umständen zuläßt, bekämpft die Selektionszählung in der bei der österreichischen Messung befolgten Art und rät davon ab, daß sie bei den geplanten deutschen Sterblichkeitsmessungen (vgl. Schlußabsatz von Nr. 233) zur Verwendung gelange.

W (Austritt), T (anders gearteter Ablauf). Ein Leerbleiben der Zeilen „Date of Exit“ und „Mode of Exit“ bedeutete, daß die Versicherung am Schlusse des Zähltermins (Policendatum 1893) noch in Kraft war.

A.

New Policies.

NO .... **£** ..*150*..

CLASS .... **PROFIT OR NOT** ..*P*..

LIFE { *Goldsmith* .... *Oliver, W.* ....

DATE-	**D. M.**	**YEAR.**	
OF BIRTH	*4 6*	*1850*	
OF ENTRY	*3 6*	*1870*	
OF EXIT	*9 7*	*1877*	
Duration of Policy .		*7*	
Age at Entry		*20*	
Age at Exit			

MODE OF EXIT (W.)

REMARKS.

Form und Inhalt der bei der *österreichischen Messung* verwendeten Zählkarte sind aus dem im selben Maßstab gehaltenen Bilde B zu entnehmen. An unterscheidenden Merkmalen gegenüber der englischen Karte seien angeführt die Angaben über Mit-, Vor- und Nachversicherungen, die wegen der Auslese als Zähleinheit, aber auch zum Zwecke der leichteren Feststellung mehfacher Versicherungen aufgenommen sind; die Weglassung des Tages im Datum, die Forderung des Geburts*ortes* und des vollen Geburts*datums* zum Zwecke der Identifizierung der mehrfach Versicherten. Zur Bezeichnung der Art des Austrittes dienten die Buchstaben *T* (Tod), *A* (Ablauf), *E* (Erreichung des Fälligkeitstermins), *R* (Rückkauf), *S* (Storno mangels Prämienzahlung); bei Policen, die am Endtermin der Zählung noch in Kraft waren, wurde links von „Art des Austrittes“ die Zahl „1900“ aufgedruckt. Bei Tod wurde auch die Todesursache erfragt, um eine Spezialuntersuchung nach dieser Richtung zu ermöglichen.[1]) Die

1) Eine solche ist ausgeführt worden von G. Rosmanith, Versich.-wissensch. Mitteil. d. mathem.-statist. Vereinig. IV (1909), p. 146—176.

Rubriken „Kategorie nach Höhe der Versicherungssumme“ und „Etwaige Prämienerhöhung“ waren darauf angelegt, die Untersuchung auch auf die Höhe der versicherten Summe und auf minderwertige Leben erstrecken zu können; man nahm jedoch hiervon Abstand.

B.

Gesellschaft .... Nr. ....

	Kategorie nach Höhe der Versicherungssumme	Auf Grund d. ursprüngl. ärztl. Untersuch.	
		besteh. Mitversich.	ausgest. Ersatzpol.
	Etwaige Prämienerhöhung		

	Jahr	Monat
Datum der Geburt	....	....
„ des wirkl. Austrittes	....	....
„ „ rechn.-mäß. „	....	....
„ „ Eintrittes . . .	....	....
Dauer der Beobachtung . .	....	....

.... Art des Austrittes ....

Todesursache ....

Name und Vorname ....

....

geboren in ....

am ....

Vor- oder Nachversich. { ....

Im Gegensatze zu der verhältnismäßigen Einfachheit dieser Karten steht die Komplikation und der Datenreichtum der Zählkarten, die bei der jetzt beginnenden deutschen Sterblichkeitsuntersuchung (s. Schlußabsatz von Nr. 233) Verwendung finden werden. Die Grundkarte ist hier in 52 Felder eingeteilt, welche teils den persönlichen Angaben über den einzelnen Versicherungsfall, teils den zu bildenden Gruppen und Gesamtheiten zu dienen haben. Die Einrichtung ist so getroffen, daß ein Teil der Angaben durch Auszacken des Randes an bestimmten Stellen gemacht wird. Auch die Nebenkarten, die für verschiedene Spezialuntersuchungen bestimmt sind, zeigen ein ähnliches, nur wenig vereinfachtes Bild. Für die Untersuchungen sind folgende Gesichtspunkte in Aussicht genommen, wenigstens soll für manche derselben die spätere Möglichkeit gesichert werden: Allgemeine Sterblichkeit der Kapitalversicherungen auf den Todesfall;

Spezialuntersuchung nach einzelnen Tarifen, nach dem Beruf, nach Kategorien der Versicherungssumme, nach Körpermaßen (Brust, Bauch, Größe, Gewicht), nach Risikoklassen (überstandene Krankheiten, Krankheitsanlagen, Antezedentien), nach Todesursachen.

235. Die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften. Als Zähleinheit wurde die Person festgesetzt. Von den 982520 Zählkarten, welche die an dem großen Unternehmen beteiligten 23 Gesellschaften (21 deutsche, je 1 österreichische und schweizerische) auf Grund einer Instruktion einsandten, verblieben nach Ausscheidung von 124020 Stück (davon 115825 wegen mehrfacher Versicherung)

858500,

die der Bearbeitung unterzogen wurden.

Aus diesem Material sind durch Zerlegung desselben in vier Kategorien und Trennung jeder Kategorie in die beiden Geschlechter acht Original-Sterbetafeln abgeleitet worden; diese Kategorien sind:

1) Personen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung und normaler Prämie (die zugehörigen Tafeln für Männer, beziehungsweise Weiber führen die Bezeichnungen MI., WI.);
2) Personen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung und erhöhter Prämie (MII., WII.);
3) Personen mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung (Begräbnisgeld- und Sterbekassenversicherungen [MIII., WIII.]);
4) Personen ohne ärztliche Untersuchung (Erlebens- und Rentenversicherungen [MIV., WIV.]).

Die Zeitangaben, die eingefordert wurden, entsprechen den Anforderungen an eine strenge Sterblichkeitsmessung; jede Karte hatte zu enthalten: das Datum des Austrittes, des Eintrittes und der Geburt nach Jahr, Monat und Tag, so daß Beobachtungsdauer, Eintritts- und Austrittsalter in voller Schärfe berechnet werden konnten.

Außer diesen Angaben trug die Karte: das Merkmal der Kategorie und des Geschlechtes, dem sie angehört; die Bezeichnung der Gesellschaft, von der sie abstammte, und die Policennummer; die Bezeichnung der Art des Austrittes; die Angabe der Todesursache; die Bezeichnung des Domiziles; die genaue Namensbezeichnung des Versicherten.

Um den Gang der Arbeit klar zu machen, bedienen wir uns der geometrischen Darstellung (Nr. 215—217). Die Zeitangaben gestatten es, für jede beobachtete Person eine *Beobachtungslinie* zu konstruieren, deren Anfangspunkt (E) dem Eintritt, deren Endpunkt dem Austritt und deren Länge der Beobachtungsdauer entspricht. Die Angaben über die Art des Austrittes führen ferner zu einer Scheidung der Austrittspunkte in drei Kategorien: in Sterbepunkte (T), in Punkte des Ausscheidens bei Lebzeiten (A), in Punkte des Ausscheidens aus der Beobachtung durch Erreichen des Schlußtermines der Beobach-

tungen im versicherten Zustande (V); dieser Endtermin war mit dem 31. Dezember 1875 festgesetzt.

Die Fig. 50 zeigt charakteristische Beispiele aller in Betracht kommenden Beobachtungslinien. Der Eintrittspunkt liegt durchwegs auf der Altersstufe 57—58, aber in verschiedenen Geburtsjahren: es handelt sich also um Personen, deren Eintrittsalter zwischen 57 Jahren (einschl.) und 58 Jahren (ausschl.) liegt, ohne Rücksicht auf die Zeit der Geburt. Im besonderen betrifft:

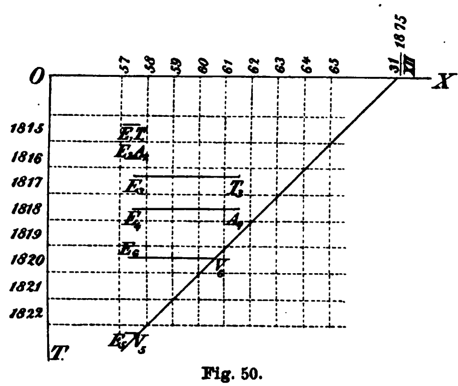


Fig. 50.

$E_1 T_1$ eine Person, die im Eintrittsjahre gestorben ist;
$E_3 T_3$ eine Person, die auf einer späteren Altersstufe starb;
$E_2 A_2$ eine Person, welche im Eintrittsjahre lebend ausschied;
$E_4 A_4$ eine Person, die in einem späteren Altersjahre lebend ausschied;
$E_5 V_5$ eine Person, die im Eintrittsjahre den Endtermin versichert erreichte;
$E_6 V_6$ eine Person, bei der dies auf einer späteren Altersstufe geschah.

Diese Übersicht läßt nun deutlich das Prinzip erkennen, nach welchem die Karten gruppiert und gezählt wurden.

a) Zuerst erfolgte die Bildung von Kartengruppen *gleichen Eintrittsalters*;

b) jede solche Gruppe wurde in Untergruppen *gleichen Austrittsalters* zerlegt;

c) jede dieser Untergruppen wurde nach den drei *Arten des Austrittes* wieder in drei Untergruppen geteilt, und an diesen erfolgte die *Zählung* und *erste Tabellarisierung*.

Hiernach wird der Inhalt der Kolonnen 1, 2, 3, 4 der nachfolgenden Probetabelle sofort verständlich, welche der Kategorie MI. entnommen ist.[1])

Man liest aus dieser Tabelle, daß 1213 Personen vom vollendeten 57. bis vor Vollendung des 58. Lebensjahres eintraten, daß 8 davon schon auf dieser Altersstufe gestorben, 37 lebend ausgeschieden sind und 11 aus der Beobachtung ausgetreten sind, weil sie den Endtermin versichert erreichten; daß diese Fälle beziehungsweise bei 32, 6, 50 Personen erst auf der Altersstufe 65—66 sich ereigneten.

Das Verständnis der übrigen Kolonnen, deren Gewinnung durch

1) l. c., p. 62.

[illegible] eschrieben ist, wird durch die [illegible] Die Zahlen der Kol. 7 geben [illegible] getretenen (1213) Personen auf

[illegible] s zu 58 Jahren ausschl.
[illegible] ersonen.

Hälfte der Kolonne 5	Summe der Kolonnen 2, 3, 4	Summe der Kol. 7 von unten	Erste Zeile: Hälfte der Kol. 8 minus Kol. 6. Folgende Zeilen: Kol. 8 minus Kol. 6
6	7	8	9
24	56	1213	582,5
41	122	1157	1116
25	87	1035	1010
23,5	84	948	924,5
18	71	864	846
24	79	793	769
30,5	94	714	683,5
35	95	620	585
28	88	525	497
20,5	60	437	416,5
23	65	377	354
15	45	312	297
15	52	267	252
9	33	215	206
8,5	37	182	173,5
3,5	14	145	141,5
3	18	131	128
5,5	22	113	107,5
5	19	91	86
3,5	21	72	68,5
3	10	51	48
1,5	11	41	39,5
—	8	30	30
1	6	22	21
0,5	5	16	15,5
0,5	5	11	10,5
0,5	3	6	5,5
—	1	3	3
0,5	1	2	1,5
—	—	1	1
—	—	1	1
—	—	1	1
—	1	1	1
368	1213	10397	9422,5

[illegible] urch die Kol. 2, 3, 4 unter- [illegible] tung“ ausgeschieden sind; ihre [illegible] der Eingetretenen überein, die

auch als *erste* Zahl der Kol. 8 figuriert; die *zweite*, *dritte*, $\cdots$ Zahl dieser Kolonne bezeichnet somit die Zahl derer, die unter Beobachtung das Alter 58, 59, $\cdots$ überschritten haben. Wenn man also die in Nr. 232 bei Formel (6) erläuterte *rechnungsmäßige* Zahl der Überlebenden:

$$A + \frac{B-C}{2}$$

für die aufeinander folgenden Alter bestimmen will, so ist die Ausführung in der ersten Zeile eine andere als in den übrigen Zeilen, und zwar ist in der *ersten* Zeile:

$$A = 0, \quad B = 1213 \text{ (erste Zahl der Kol. 8)},$$

$$\frac{C}{2} = 24 \text{ (erste Zahl der Kol. 6)},$$

$$A + \frac{B-C}{2} = \frac{\text{erste Zahl der Kol. 8}}{2} - \text{erste Zahl der Kol. 6};$$

in den *folgenden* Zeilen:

$$A = \text{Zahl der Kol. 8}, \quad B = 0, \frac{C}{2} = \text{Zahl der Kol. 6},$$

$$A + \frac{B-C}{2} = \text{Zahl der Kol. 8} - \text{Zahl der Kol. 6}.$$

Die „Deutschen Sterblichkeitstafeln" bezeichnen die Zahlen der Kol. 9, denen wir hier den Namen „rechnungsmäßige Anzahl der Überlebenden" gegeben haben, als „durchlebte Beobachtungsjahre oder Personen unter einjährigem Risiko auf der betreffenden Altersstufe"; diese Bezeichnung wäre nur dann zutreffend, wenn die Todesfälle jeder Altersstufe sämtlich am Ende derselben einträten. Wenn jedoch Roghé[1]) in diesem Umstande eine Fehlerquelle der Deutschen Sterblichkeitstafeln erblickt, so beruht dies auf einem Irrtum; denn wie eben gezeigt worden, entspricht die Berechnung dieser Zahlen und ihre weitere Verwendung für die Sterblichkeitsmessung vollkommen der Formel (6) in Nr. 232.

Was diese Verwendung anlangt, so geschieht sie in folgender Weise. Überlebende eines bestimmten Alters und Gestorbene auf der ihm folgenden Altersstufe gibt es aus allen *vorangehenden* Eintrittsaltern; man braucht sie nur aus den Tabellen der eben vorgeführten Art (Kol. 9 und Kol. 2) herauszuheben und zusammenzustellen; dies gibt Anlaß zu einer *zweiten Tabellarisierung*, von welcher wir nachstehend wieder eine Probe aus der Kategorie MI. mitteilen[2]):

1) l. c., p. 96.
2) l. c., p. 84—85.

MI. Tabelle III.

Eintrittsalter von Jahr einschl.	Eintrittsalter bis Jahr ausschl.	Durchlebte Beobachtungsjahre Tab. I, Kol. 9	Gestorbene Tab. I, Kol. 2
		Beobachtungsalter 40	
14	15	1	—
15		1	—
16		—	—
17		1	—
18		3	—
19		4	—
20		9	—
21		44	—
22		72	—
23		145	2
24		267	3
25		531	3
26		775,5	11
27		1 153	15
28		1 782,5	26
29		2 579,5	32
30		3 381	37
31		4 282	59
32		5 406,5	55
33		6 292	65
34		7 423	75
35		8 112,5	97
36		8 326	91
37		9 053	124
38		9 656	101
39		10 659	103
40	41	5 061	41
	Sa.	85 020,5	940

Aus dieser Tafel geht hervor, daß z. B. von den zwischen 25 und 26 Jahren eingetretenen (rechnungsmäßig) 531 das Alter 40 überlebten und davon 3 im Alter von 40 bis 41 Jahren starben, und daß von allen Eingetretenen der Kategorie (es waren deren 341 744) rechnungsmäßig 85 020,5 das Alter 40 überschritten und 940 vor Vollendung des Alters 41 durch Tod abgingen; daraus ergibt sich für die Sterbenswahrscheinlichkeit der 40-jährigen der empirische Wert:

$$q_{40} = \frac{940}{85\,020{,}5} = 0{,}01106,$$

der denn auch in der Tabelle V[1]) bei dem Alter 40 eingetragen und mit den andern auf gleiche Weise bestimmten Werten zur Konstruktion der Sterbetafel verwendet erscheint. Diese geht in der Weise vor sich, daß der Reihe nach folgende Kolonnen gerechnet werden:

1) l. c. p. 104.

(5) $p_x = 1 - q_x$

(6) $\log p_x$

(7) $4 + \sum_{15}^{x} \log p_x = \log l_x$

(8) l_x

(9) $d_x = l_x - l_{x+1}$

(10) $\sum_{x}^{\omega} l_x$

(11) $\frac{\sum_{x}^{\omega} l_x}{l_x} - \frac{1}{2} = \overset{0}{e}_x;$

(5) sind also die Lebenswahrscheinlichkeiten; (6) deren Logarithmen; (7) die Logarithmen der Zahlen der Überlebenden, wenn für das Alter 15 die Basis 10000 gewählt wird; (8) die Zahlen der Überlebenden selbst; (9) die Zahlen der Gestorbenen; (10) die bis zum höchsten Alter summierten Zahlen der Überlebenden; (11) die vollen mittleren Lebenserwartungen (vgl. Nr. 177 u. 179).

Auf die beschriebene Art sind alle acht Kategorien von Versicherten aufgearbeitet worden. Aus den gewonnenen Originalresultaten hat A. Zillmer „ausgeglichene Sterblichkeitstafeln" gerechnet, und zwar im ganzen neun, deren Bedeutung aus den nachfolgend zusammengestellten Bezeichnungen ersichtlich ist:

MI., WI., M u. WI.,
MII., WII., M u. WII.,
MIII., WIII., M u. WIII..

Die letzte Tafel der ersten Gruppe ist in den ersten drei Kolonnen der Tafel V am Ende dieses Buches mitgeteilt.

236. Die englische Sterblichkeitsmessung 1863—1893. Die Gesichtspunkte, mit welchen die Einleitung dieses bisher größten Unternehmens begründet wurde, waren die folgenden. Die neuesten Tafeln über versicherte Leben[1]) stützen sich auf Beobachtungen, die vor 30 Jahren abgeschlossen worden sind, und die Rententafeln betreffen lediglich Staatsrentner. Seither haben sich die Lebensbedingungen der Bevölkerung geändert, was darauf schließen läßt, daß auch die Sterblichkeitsrate eine andere geworden ist. Die Tafeln des Instituts der Aktuare sind des weiteren auf Erfahrungen gegründet, die äußerst spärlich erscheinen im Vergleich zu dem heute bei den Anstalten angesammelten Material, und diese Erfahrungen erstrecken sich überdies

1) Gemeint sind die Tafeln der 20 britischen Gesellschaften.

über eine sehr lange, bis zum Beginn des Jahrhunderts reichende Periode. Dies alles zeitigt das Bedürfnis, Tafeln zu konstruieren, die sich auf Erfahrungen an der gegenwärtigen Generation gründen und in befriedigender Weise die charakteristischen Züge in der Sterblichkeit unter Versicherten darstellen, wie sie durch die Auslese am Beginn und die darauffolgende Versicherungsdauer beeinflußt ist.

Die Durchführung dieses Programms kann hier nur an einer knappen Übersicht und einigen charakteristischen Einzelheiten gezeigt werden, durch die sich die vorliegende Arbeit von ihren Vorgängerinnen wesentlich unterscheidet.

Die Gliederung der Untersuchungen erfolgte nach folgenden Momenten:

1. Nach der Versicherungsart;
2. nach dem Geschlecht;
3. nach Beteiligung und Nichtbeteiligung am Gewinn;
4. nach „alten", „neuen" und „vereinigten" Versicherungen;
5. nach Alter und Beobachtungsdauer.

Was den ersten Punkt anlangt, so sind folgende *Haupt*kombinationen unterschieden worden:

O. Gewöhnliche Todesfallversicherungen mit lebenslänglicher gleichbleibender Prämienzahlung;

E. Gemischte Versicherungen;

A. Renten;

an untergeordneten *Neben*kombinationen:

OL. Todesfallversicherungen gegen einmalige oder begrenzte Prämienzahlung;

OA. Todesfallversicherungen gegen steigende Prämie;

T. Temporäre Kapitalversicherungen;

JL. Versicherungen verbundener Leben;

C. Überlebensversicherungen.

Die Unterscheidung nach dem zweiten Moment, dem Geschlechte, erfolgte bei *O*, *E*, *A* und *JL*; sonst wurden nur männliche Personen untersucht.

Die Differenzierung nach dem 3. Merkmal geschah nur bei *O*.

Die Gliederung nach 4. hatte den Zweck, den zeitlichen Änderungen der Sterblichkeit nachzuforschen.

Die Gliederung 5. ist konsequent durchgeführt und in den Resultaten einmal in Selekttafeln über die ersten 10 Versicherungsjahre, dann in abgestutzten und schließlich bei der Kombination *O* in einer zweifach abgestuften Tafel zum Ausdruck gebracht worden.

Von 66 beteiligten Anstalten lieferten 60 ihre Erfahrungen über Kapitalversicherungen, 43 über Renten.

Die Beobachtungsperiode war derart festgesetzt, daß Policen, die, aus einer früheren Zeit stammend, 1863 am Jahrestage des Eintritts

noch in Kraft waren, mit diesem Tage als „alte“ Policen in die Beobachtung eintraten, und Policen, die zwischen dem 1. I. 1863 und 31. XII. 1892 in Kraft traten, als „neue“ Policen behandelt wurden. Beide Gattungen zusammen bildeten die „vereinigten“ Beobachtungen.

Die Untersuchung bezog sich nur auf solche Leben, die bei ihrem Eintritt in die Versicherung in den vereinigten Königreichen wohnten; ausgeschlossen waren Versicherungen gegen erhöhte Prämie (wegen der Beschäftigung oder mit Rücksicht auf Minderwertigkeit oder ausländischen Wohnsitz); ausgeschlossen Leben, die ohne ärztliche Untersuchung Aufnahme fanden (ausgenommen natürlich die Rentner); ausgeschlossen endlich übernommene Rückversicherungen.

Die Verteilung der 1 138 359 eingelieferten Zählkarten, über deren Form in Nr. 234 berichtet worden ist, nach Kombination und Geschlecht ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

Kombination	Männlich	Weiblich
O	785 222	62 362
E	114 981	6 798
A	9 700	24 300
OL	39 019	799
OA	25 535	1 074
T	13 731	2 084
JL	9 668	7 547
C	3 987	1 552
	1 031 843	106 516

Für den eigentlichen Umfang des Beobachtungsmaterials sind aber nicht diese Zahleu, sondern die unter Risiko zugebrachten Jahre und die beobachteten Todesfälle maßgebend. Diese Angaben in Verbindung mit den offiziellen Zeichen für die betreffenden Sterbetafeln sind in der folgenden Tabelle verzeichnet, die sich jedoch nur auf die wichtigsten Kombinationen erstreckt, die Aggregattafeln betrifft und bei *O* die am Gewinn beteiligten mit den nichtbeteiligten zusammenfaßt.

Zeichen der Tafel	Kombination	Beobachtungsjahre	Todesfälle
O^{M}	*O* männlich	7 659 454	195 771
O^{F}	*O* weiblich	619 052	19 905
O^{EM}	*E* männlich	897 673	6 021
O^{EF}	*E* weiblich	42 646	304
O^{am}	*A* männlich	53 599	4 427
O^{af}	*A* weiblich	173 519	11 100

Die vorstehenden Zeichen beziehen sich auf *vollständige* Aggregattafeln; bei *abgestutzten* kommt zu dem symbolischen Exponenten noch die Anzahl der fortgelassenen Versicherungsjahre in runder Klammer

(also z. B. $O^{M(5)}$, $O^{af(10)}$ usw.), bei *Selektions*tafeln ist um den symbolischen Exponenten eine eckige Klammer angebracht (z. B. $O^{[M]}$, $O^{[EM]}$ usw.).

Bezüglich der *Zeitbestimmungen* sei das folgende ausgeführt.

Als tabellarisches *Eintrittsalter* galt durchwegs das Alter an dem dem Abschluß der Versicherung bzw. dem Ankauf der Rente nächstliegenden Geburtstage; es kann sich daher von dem wirklichen Alter höchstens um $^1/_2$ Jahr nach auf- oder abwärts unterscheiden.

Die *Versicherungsdauer* wurde nach *Versicherungs*jahren bemessen und grundsätzlich nur in ganzen Jahren tabellarisiert. Dem war einerseits schon die Bestimmung über den Eintritt der „alten" Versicherungen in die Beobachtung, andererseits durch die Festsetzung vorgearbeitet, daß die am Schlusse der Zählperiode verbleibenden Versicherungen nicht an einem festen Tage, etwa dem 31. XII. 92, sondern mit dem Jährungstage 1893 aus der Beobachtung ausschieden. Die Todesfälle wurden mit der „abgekürzten", d. i. mit jener Versicherungsdauer eingetragen, die am Beginn des unvollendet gebliebenen Versicherungsjahres abgelaufen war.

Bei den stornierten, sowie bei den durch Erleben eines festgesetzten Termins erloschenen Versicherungen kam jedoch die unterjährige Dauer während des letzten, angebrochenen Versicherungsjahres in Rechnung und dies in einer bemerkenswerten Weise. Das übliche Näherungsverfahren (s. Nr. 232) besteht darin, daß man Ausscheidungen während des ersten Halbjahres mit 0, jene des zweiten Halbjahres mit 1 zählt. Bei gleichmäßiger Verteilung der Ausscheidungen über das Versicherungsjahr wäre dieser Vorgang genau zutreffend. Diese Voraussetzung war aber bei dem in Rede stehenden Material, wie Probezählungen ergeben hatten, nicht erfüllt. Zwischen der wirklich unter Beobachtung zugebrachten und der nach jener Näherungsmethode berechneten Zeit zeigten sich beträchtliche Unterschiede. Um zu einem besseren „modifizierten Näherungsverfahren" zu gelangen, hat man über die Verteilung der Storni eine Hilfsuntersuchung angestellt und daraus auf empirischem Wege die folgende Regel abgeleitet:

Sind	$W(1)$	$W(4)$	$W(7)$	$W(10)$
die Storni aus dem	0.—2.,	2.—6.,	6.—8.,	8.—12. Monat

und bezeichnet W die Gesamtzahl der Storni des betreffenden Versicherungsjahres (des 1., 2., 3., $\cdots$), so wird die in dieses fallende Dauer der stornierten Versicherung mit

$$\frac{1}{2} W(7) + W(10) + \frac{1}{12} W$$

angesetzt, wobei die angezeigten Divisionen nach bestimmten Regeln nur auf ganze Quotienten verrichtet werden.

Bezüglich der durch Erleben eines Termins abgelaufenen Ver-

sicherungen wurde eine ähnliche Hilfsuntersuchung angestellt und zu einer Regel formuliert.

Neuartig waren weiter die Grundsätze, nach welchen die *mehrfachen Versicherungen* behandelt worden sind; dabei wurde ein Unterschied gemacht, je nachdem es sich um die Herstellung von Selekt- oder Aggregattafeln handelte.[1])

Von den Ergebnissen der vorstehenden Messung ist in Tafel VI am Schlusse des Bandes die zweifach abgestufte Tafel $O^{[M]}$ mitgeteilt als Beispiel der modernsten Form einer Sterbetafel versicherter Leben. Zur Lesung dieser Tafel sei noch das folgende bemerkt. Verfolgt man die Zahlen, von einem Beitrittsalter $[x]$ beginnend, in horizontaler Richtung bis zur letzten Kolonne und dann in dieser vertikal nach abwärts, so hat man die Absterbeordnung der im Alter $[x]$ eingetretenen vor sich; so vermindern sich beispielsweise 87153 Personen, die im Alter von 30 Jahren in die Versicherung eingetreten sind, bis zum Alter 85 nach Maßgabe der Zahlen 86881, 86445, $\cdots$ 81349, 80547, 79723, $\cdots$ 6105,6. — Aus der Tafel der Lebenden ergibt sich eine zweifach abgestufte Tafel der Gestorbenen durch Subtraktion *nebeneinander*, in der Schlußkolonne durch Subtraktion *untereinander* stehender Zahlen; es sterben also von den 87153 eingetretenen Dreißigjährigen im ersten Versicherungsjahre 272, im zweiten 436, $\cdots$ vom 39. zum 40. Lebensjahre 772, vom 40. zum 41. Lebensjahre 802, $\cdots$. In dem Tabellenwerk sind die Zahlen der Toten schärfer (mit Dezimalen) bestimmt.

Noch sei angefügt, daß zur Konstruktion der Tafel der Lebenden aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten nur *eine* Grundzahl willkürlich anzunehmen ist: hier ist es $l_{[10]} = 100000$.

237. Die österreichische Sterblichkeitsmessung. Die Anregung zu diesem groß angelegten Unternehmen ging von E. Blaschke[2]) aus, der auch die Grundzüge des Planes festgestellt hat.

Bei der Gliederung des Materiales waren folgende Momente maßgebend.

1. Die Versicherungskombination;
2. das Geschlecht;
3. die Zugehörigkeit zum alten oder neuen Bestande;
4. Alter und Beobachtungsdauer.

Was das erste Merkmal anlangt, so erstreckte sich die Untersuchung auf folgende Gruppen:

a) Gesamtmaterial, ohne Rücksicht auf die Kombination, Männer;

b) Gesamtmaterial ohne Rücksicht auf die Kombination, Frauen;

---

1) Vgl. hierzu des Verf. Darstellung in der Zeitschr. f. d. ges. Versich.-Wissensch., V. (1905), p. 315—345.

2) Der bezügliche Vortrag vom 2. XII. 1899 ist im 2. Hefte der Mitteil. der österr. und ungar. Versicherungstechniker veröffentlicht.

c) Todesfallversicherungen mit lebenslänglicher Prämienzahlung, Männer;

d) Gemischte Versicherungen, mit Einschluß der Todesfallversicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung, Männer.

Bei den Gruppen a) und b) wurden überdies die Versicherungen alten und neuen Bestandes getrennt behandelt.

Die Unterscheidung nach dem vierten Merkmal kam in allen Teilen zur Durchführung und führte zu Selekttafeln für die ersten 10 Versicherungsjahre und zu abgestutzten Aggregattafeln, neben welchen selbstverständlich auch vollständige erstellt worden sind.

An der Zusammentragung des Materials hatten sich 28 Anstalten beteiligt.

Als *Beobachtungsperiode* war der Zeitraum vom 1. I. 1876 bis 31. XII. 1900 bestimmt. Jene Versicherungen, die vor dem 1. I. 1876 abgeschlossen in diesen Zeitraum fortdauerten, wurden als „alter Bestand“ zusammengefaßt, während die nach diesem Datum abgeschlossenen den „neuen Bestand“ bilden.

Die Untersuchung bezog sich auf Personen, die in Österreich domizilierend bei den in diesem Staatsgebiet arbeitenden Gesellschaften Versicherungen abgeschlossen hatten.

Es ist ein Grundzug der österreichischen Messung, der ihr in der Geschichte der Sterblichkeitsuntersuchung an Versicherten eine bleibende Stellung einräumt, daß die Zählung nach zwei Einheiten, der Auslese und der Person, vollständig durchgeführt und dadurch ein entscheidendes Experiment für die Beantwortung der Frage geliefert wurde, ob die Selektionszählung neben der Personenzählung praktische Berechtigung besitzt (s. Nr. 234).

Wie sich die Zählkarten auf die beiden Zählungsmodi verteilten, geht aus der folgenden Tabelle hervor, die sich auf die vollständigen Aggregattafeln bezieht und neben den Tafelbezeichnungen auch die unter Beobachtung zugebrachten Jahre und die Todesfälle angibt.

Zeichen der Tafel	Kombination	Behandelte Zählkarten	Beobachtungsjahre	Todesfälle
M^S	a)	484 913	3 439 779	62 769
M^P		410 067	2 890 233	52 939
F^S	b)	83 158	682 939	15 604
F^P		78 456	637 369	14 121
M_T^S	c)	227 057	2 104 674	51 528
M_T^P		199 816	1 838 421	44 219
M_G^S	d)	262 606	1 361 278	11 616
M_G^P		232 417	1 196 313	10 456

Die Grundbuchstaben M, F unterscheiden Männer und Frauen, die in Exponentform geschriebenen S, P die Selektions- von der Personenzählung, bei den Selekttafeln sind sie in eine eckige Klammer eingeschlossen, z. B. $M^{[S]}$, $M_T^{[P]}$ u. ä., bei den abgestutzten Tafeln ist die Anzahl der unterdrückten Anfangsjahre unten durch eine rund eingeklammerte Ziffer ersichtlich gemacht, z. B. $M_{(10)}^S$, $M_{G(5)}^P$ u. ä. a.

Wie schon gelegentlich der Besprechung der Zähleinheiten festgestellt wurde, haben die beiden Zählungsweisen zu Resultaten geführt, die vom Standpunkte der Versicherungspraxis als gleichwertig erachtet werden können. Beleg dafür sei die folgende Tabelle, die für von 5 zu 5 Jahren fortschreitende Alter die nach der Selektionszählung (S) und der Personenzählung (P) gefundenen unausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten (in Einheiten der dritten Dezimale) nebeneinander stellt, wobei alle Versicherungsdauern zusammengefaßt sind.

Alter	Versicherungskombination							
	a)		b)		c)		d)	
	‰ aus dem Zählungsmodus							
	S	P	S	P	S	P	S	P
20	4,31	4,36	14,75	13,78	13,29	13,42	1,83	1,84
25	4,27	4,40	5,68	5,74	5,43	5,48	3,67	3,77
30	4,95	5,10	9,55	9,45	6,02	6,16	4,39	4,57
35	6,87	7,13	10,82	10,85	8,59	8,62	5,59	5,72
40	8,81	9,19	10,95	10,92	10,95	11,02	6,54	6,83
45	12,67	13,31	9,29	9,59	14,06	14,24	10,42	10,85
50	18,27	18,71	15,24	15,30	19,43	19,94	15,36	15,34
55	26,43	26,48	21,44	21,84	27,53	27,54	21,14	21,05
60	35,04	35,31	28,35	28,30	35,92	36,05	27,08	28,99
65	52,55	51,68	49,68	49,81	53,54	52,70	32,88	34,33
70	76,58	76,04	68,19	68,22	77,68	76,91	38,90	40,96
75	100,15	98,29	97,77	100,23	100,60	98,19	67,79	68,96
80	149,17	149,52	178,45	175,04	149,57	149,39	120,00	120,00

Bei der Beurteilung dieser Tatsache darf der Umstand nicht übersehen werden, daß das Material mehrfache Versicherungen in sehr beträchtlicher Menge enthielt. Das prozentische Verhältnis der auf mehrfache Versicherungen bezüglichen zu den behandelten Karten überhaupt gestaltete sich nämlich wie folgt:

	bei a)	b)	c)	d)
Selektionszählung	38,8	20,8	40,2	38,8
Personenzählung	27,6	16,1	32,0	30,8.

Noch eines Vorgangs soll Erwähnung geschehen, der bei der in Rede stehenden Messung zum ersten Male befolgt worden ist. Der Bearbeitung des Gesamtmaterials ging die Einzeluntersuchung der kooperierenden Gesellschaften voraus bis zur Herstellung für sie gelten-

der Sterbetafeln, betreffend die männlichen Versicherten in toto und die gemischten Versicherungen, jedesmal nach Selektions- und nach Personenzählung. Diese Vorarbeit, deren Resultate selbstverständlich unveröffentlicht blieben, bot eine Prüfung des Gesamtmaterials auf den Grad seiner Homogenität.

Die Tabellarisierung der Beobachtungen ist — dies sei als weitere Besonderheit der österreichischen Messung hervorgehoben — auch in solcher Art erfolgt, daß eine Untersuchung des Einflusses der Geburtszeit ermöglicht ist.

Aus den Ergebnissen der österreichisch-ungarischen Sterblichkeitsmessung sind in Tafel VII die Absterbeordnungen für die gemischte Versicherung mitgeteilt, und zwar die volle Aggregattafel AH_G^M, die um die ersten 5 und die um die ersten 10 Versicherungsjahre gekürzte Aggregattafel, $AH_{G(5)}^M$ und $AH_{G(10)}^M$. Über den Umfang des diesen Tafeln zugrunde liegenden Beobachtungsmaterials geben die folgenden Zahlen Aufschluß:

	Zahl der Beobachtungsjahre	Zahl der Todesfälle
AH_G^M	2423093	20076
$AH_{G(5)}^M$	1005235	11679
$AH_{G(10)}^M$	382104	5491.

Die Tafeln sind aus den Resultaten der beiderseitigen Selektionszählungen abgeleitet.

238. Vergleichende Betrachtungen über Sterblichkeit und Sterblichkeitstafeln. Um die vorstehenden theoretischen Ausführungen über den Sterblichkeitsverlauf unter Versicherten und die verschiedenen ihn darstellenden Tafelarten ziffernmäßig zu beleuchten, sei zum Schlusse eine Zusammenstellung vergleichender Tabellen vorgeführt, welche die verschiedenen als maßgebend hervorgehobenen Momente zum Ausdruck bringen.

Dem späteren Inhalt vorgreifend sei noch bemerkt, daß die vorgeführten Zahlen zum Teil unausgeglichene Resultate sind, wie sie sich aus den Beobachtungen unmittelbar ergeben, zum Teil ausgeglichenen Zahlenreihen entstammen, die das Ergebnis einer rechnerischen Bearbeitung der ersteren bilden. Die ausgeglichenen Zahlenreihen sind es, von welchen die Praxis Gebrauch macht.

a) Um den Einfluß des *Geschlechts* zu zeigen, seien die Sterblichkeitspromille (d. i. die tausendfachen Sterbenswahrscheinlichkeiten) für die von 10 zu 10 Jahren fortschreitenden Alter 20—90 aus der jüngsten englischen Messung angeführt; es sind unausgeglichene Werte, die die größere Sterblichkeit der weiblichen Versicherten in den jün-

geren Jahren, ihre niedrigere Sterblichkeit in den höheren Altern als Grundzug erkennen lassen, der sich allgemein bemerkbar macht.

Alter	Tafel	
	O^M	O^F
20	4,31	4,96
30	5,87	7,88
40	9,16	11,78
50	15,33	13,40
60	29,15	25,40
70	63,34	54,76
80	141,51	147,36
90	263,10	251,16

Eine weitere bemerkenswerte Illustration dieses Moments wird sich unter b) ergeben.

b) Wie erheblich sich die Wahl der *Versicherungskombination* geltend macht und welch großer Unterschied insbesondere zwischen *Todesfall*versicherungen einerseits und *Erlebens*versicherungen, worunter *Renten* die Hauptgattung bilden, andererseits besteht, wird der Zusammenhalt der folgenden Tabellen zeigen.

Die *erste* bringt die ausgeglichenen Sterblichkeitspromille, wie sie sich aus der österreichischen Messung für reine Todesfall- und für gemischte Versicherungen männlicher Personen ergeben haben; man achte hier auf die wesentlich günstigere Sterblichkeit der zweiten Kategorie gegenüber der ersten.

Alter	Tafel	
	M_T^S	M_G^S
20	5,61	2,94
30	7,31	4,33
40	11,05	7,38
50	19,28	14,04
60	37,20	28,50
70	75,63	59,48
80	155,14	124,04
90	307,34	—

Die *zweite* und *dritte* Tabelle betreffen die Sterblichkeit unter männlichen und weiblichen Rentnern aus drei verschiedenen Gebieten; in der zweiten Tabelle sind ausgeglichene Sterblichkeitspromille für einzelne nach Dezennien fortschreitende Alter angegeben; anders ist die dritte Tabelle angeordnet: sie enthält unausgeglichene Durchschnitts-Sterblichkeitspromille nach dem in Nr. 228, IIa) erklärten Prinzip, für beide Geschlechter.

Aus diesen Tabellen geht, wenn man sie mit der Tabelle unter a) und mit der ersten unter c) vergleicht, hervor, daß die Sterblichkeit unter den Rentnern einen wesentlich günstigeren Verlauf nimmt

als unter den für den Todesfall Versicherten, und des weiteren, daß auch hier die weiblichen Personen den männlichen gegenüber durch geringere Sterbensintensität sich auszeichnen.

Alter	Deutsche Rentnersterbetafel (1893)		Französ. Rentnersterbetafel 1900-D	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen
25	7,6	3,2	6,4	3,6
35	3,8	4,1	8,3	5,0
45	10,6	7,5	10,4	9,6
55	20,7	13,4	22,0	18,5
65	39,8	29,0	40,4	28,8
75	96,8	71,8	93,2	74,7
85	195,3	168,7	208,4	180,6
95	622,2	383,9	331,9	323,3

Alter	Tafel	
	O^{am}	O^{af}
50—54	20,05	12,37
55—59	24,28	14,09
60—64	32,03	20,40
65—69	42,73	33,01
70—74	65,93	49,30
75—79	99,67	81,09
80—84	146,79	132,31
85—89	216,75	193,38

c) Zur Illustration der *zeitlichen Variation* der Sterblichkeit unter Versicherten dienen die ersten drei Kolonnen der folgenden Tabelle, indem sie die ausgeglichenen Sterblichkeitspromille aus den drei englischen Messungen nach ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge nebeneinander stellen und die *Abnahme* der Sterblichkeit vor Augen führen.

Alter	Sterblichkeitspromille nach der Tafel				
	17 engl. Gesellsch.	H^M	O^M	MWI.	Neue Goth. Bankliste
20	7,3	6,3	4,0	9,2	5,7
30	8,4	7,7	6,0	8,8	4,3
40	10,4	10,3	9,2	11,8	7,8
50	15,9	16,0	15,0	18,1	15,0
60	30,3	29,7	28,9	35,4	31,5
70	64,9	62,2	62,1	72,8	70,5
80	140,1	144,7	138,4	155,2	170,5
90	323,7	279,5	300,8	—	—

Dieselbe Tatsache geht auch aus den ersten zwei Kolonnen der jetzt folgenden Tabelle hervor, in welchen die unausgeglichenen Sterblichkeitspromille der „alten“ und „neuen“ O-Versicherungen der

Alter	Tafelmaterial für O^M (m. Anteil)			
	„alt“ (1)	„neu“ (2)	„kombiniert“ (3)	Quotient $\frac{(1)}{(2)}$
20	6,50	4,19	4,31	1,55
30	8,20	5,61	5,87	1,46
40	11,36	8,48	9,16	1,34
50	16,59	14,38	15,33	1,15
60	30,25	27,19	29,15	1,11
70	64,30	59,45	63,34	1,08
80	141,55	141,06	141,51	1,00
90	264,92	190,48	263,10	1,39

jüngsten englischen Messung für die Alter 20—90, nach Dezennien fortschreitend, zusammengestellt sind. Die letzte Kolonne gibt das Verhältnis der Zahlen aus der ersten und zweiten Kolonne an, das durchwegs, am stärksten in den jüngeren Altern, die Einheit überschreitet. Die aus den kombinierten Beobachtungen resultierenden Zahlen der vorletzten Kolonne zeigen einen Verlauf, der sich aus der Beteiligung der alten und neuen Versicherungen an dem kombinierten Material erklärt: in den jüngeren Jahren überwiegen die neuen, in den hohen Altern dominieren die alten Versicherungen.

In die zweitvorhergende Tabelle sind auch die Daten der Deutschen Tafel *MWI* und der neuen Gothaer Tafel einbezogen worden, um zu zeigen, wie streng die erstere die Sterblichkeit beurteilt, wie sehr die letztere in den jüngeren Altern sich der neuesten englischen Messung nähert und wie auch sie in den höheren Altern auf eine erheblich stärkere Sterblichkeit hinweist, als sie unter den englischen Versicherten konstatiert worden ist.

d) Die bislang vorgeführten Zahlen stammen durchweg aus vollständigen Aggregattafeln. Wir wenden uns nun dem Einfluß der *Versicherungsdauer* zu. Um hier die allgemeinen Züge kennen zu lernen, empfiehlt es sich, nicht einzelne Alter in Betracht zu ziehen, sondern Durchschnitte von Altersgruppen, da die Zersplitterung des Beobachtungsmaterials nach beiden Elementen, Alter und Beobachtungsdauer, mit starken zufälligen Störungen einhergeht und das Bild verdunkelt. Auch das Fortschreiten von einem Versicherungsjahr zum nächsten wäre für die Gewinnung eines Einblicks wenig geeignet. Es sind daher Durchschnittswerte für Alterquinqennien gebildet und von den Versicherungsjahren der ersten Dekade das 1., 2., 4., 7. und 10. in Vergleich gesetzt.

Durch diese Angaben ist das Verständnis der folgenden Tabelle

$O^{[M]}$ Beobachtungsjahre: 8647246; Sterbefälle 117279.

Erreichtes Alter	Sterblichkeitspromille im Versicherungsjahre					Quotienten der Sterblichkeitspromille				Quersumme der Quotienten
	1.	2.	4.	7.	10.	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{10}{1}$	
30—34	3,55	4,78	5,90	7,65	8,21	1,35	1,66	2,16	2,32	7,49
35—39	3,61	5,81	7,06	8,59	8,63	1,61	1,96	2,38	2,39	8,34
40—44	5,16	6,66	8,49	10,04	10,06	1,29	1,65	1,95	1,95	6,84
45—49	5,75	8,91	10,17	11,01	11,87	1,55	1,77	1,92	2,06	7,30
50—54	8,88	12,87	15,09	14,12	16,11	1,45	1,70	1,59	1,81	6,55
55—59	11,96	16,82	18,18	22,85	23,91	1,41	1,52	1,91	2,00	6,84
60—64	16,64	22,48	26,94	27,23	32,88	1,35	1,62	1,64	1,98	6,59
65—69	21,43	37,50	30,35	39,13	44,87	1,75	1,42	1,83	2,09	7,09
						11,76	13,30	15,38	16,60	

angebahnt, die sich auf die unausgeglichenen Resultate des ungeheuren Materials der Tafel $O^{[M]}$ bezieht. Im zweiten Teile der Tabelle sind die Verhältnisse der Sterblichkeitspromille der späteren Versicherungsjahre zu jenen des ersten Jahres angegeben.

Die Tabelle läßt folgende Tatsachen erkennen: Die Sterbenswahrscheinlichkeit nimmt bei demselben Alter mit der vor seiner Erreichung durchlebten Versicherungsdauer ständig zu und erreicht im zehnten Versicherungsjahre einen Wert, der jenen des ersten Versicherungsjahres um 100% und darüber übertrifft; in den jüngeren Altern ist dieses Ansteigen erheblicher als in den höheren, wie an den Quersummen der Verhältniszahlen konstatiert werden kann — denn diese Quersummen geben in der oberen Hälfte der Tabelle zusammen 29,97, in der unteren Hälfte nur 27,07; die Schnelligkeit des Ansteigens vermindert sich im allgemeinen mit der Zunahme der Versicherungsdauer, wie die Vertikalsummen der Quotienten zeigen.

War bei dem eben betrachteten Material die ärztliche Auslese das Ausschlaggebende, so zeigt die nächste Tabelle, die sich auf das für diese Kombination beträchtlich zu nennende Material der weiblichen Rentner bei der jüngsten englischen Messung gründet, daß die *Selbstauslese* ähnliche Verhältnisse zeitigt, wenn auch in etwas abgeschwächtem Maße; auch scheint es, daß bei den Rentnern der Einfluß der Selektion früher nachläßt als bei den Todesfall-Versicherten.

$O^{[af]}$ Beobachtungsjahre: 207 324; Sterbefälle: 11 100.

Erreichtes Alter	Sterblichkeitspromille im					Quotienten der Sterblichkeitspromille				Quersumme der Quotienten
	1.	2.	4.	7.	10.	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{10}{1}$	
	Versicherungsjahre									
50—54	10,74	13,25	15,08	12,30	21,13	1,23	1,40	1,15	1,97	5,75
55—59	7,92	9,54	6,58	10,22	16,57	1,20	2,09	1,29	2,09	6,67
60—64	14,24	17,88	21,84	25,18	22,75	1,26	1,53	1,77	1,60	6,16
65—69	21,26	27,92	33,06	34,00	31,08	1,31	1,55	1,60	1,46	2,92
70—74	30,93	41,54	39,76	44,96	52,58	1,34	1,29	1,45	1,70	5,78
75—79	56,35	58,68	78,95	75,36	75,46	1,04	1,40	1,34	1,84	5,12
80—84	73,24	147,21	111,33	105,94	126,20	2,01	1,52	1,45	1,72	6,70
85—89	144,23	191,30	205,13	216,78	167,51	1,33	1,42	1,50	1,16	5,41
						10,72	14,20	11,55	13,04	

Wie nun die Weglassung der Erfahrungen der ersten Versicherungsjahre mit ihrer geringen Sterblichkeit gegenüber der Zusammenfassung der Beobachtungen *aller* Versicherungsdauern wirkt, soll an dem folgenden typischen Beispiel vor Augen geführt werden, das die Verhältnisse zwischen der vollständigen Aggregattafel O^{M} einerseits und den um die ersten fünf, bzw. um die ersten zehn Jahre abgestutzten

Aggregattafeln $O^{M(5)}$, $O^{M(10)}$ zur Darstellung bringt. Die Erscheinungen die dieses riesenhafte Material darbietet, kehren der Hauptsache nach

Alter	O^M B.[1]): 7 056 863 S.[1]): 140 889 (1)	$O^{M(5)}$ B.: 5 324 862 S.: 129 001 (2)	$O^{M(10)}$ B.: 3 918 638 S.: 112 831 (3)	Differenz (2)–(1)		Differenz (3)–(2)	
	Durchschnittl. Sterblichkeitspromille			absolut	in % von (1)	absolut	in % von (2)
20—24	4,58	6,03	6,02	1,45	31,7	– 0,01	– 0,1
25—29	5,15	7,02	6,99	0,87	16,9	– 0,03	– 0,4
30—34	6,53	7,69	8,02	1,16	17,8	0,33	4,3
35—39	8,10	8,93	9,08	0,83	10,2	0,15	1,7
40—44	10,19	10,83	11,18	0,64	6,3	0,35	3,2
45—49	12,71	13,22	13,55	0,51	4,0	0,33	2,5
50—54	16,98	17,38	17,45	0,40	2,4	0,07	0,4
55—59	23,34	23,74	23,91	0,40	1,7	0,17	0,8
60—64	33,01	33,31	33,66	0,30	0,9	0,35	1,1
65—69	48,68	48,92	49,03	0,24	0,5	0,11	0,2
70—74	72,48	72,59	72,64	0,11	0,15	0,05	0,1
75—79	107,03	107,07	107,20	0,04	0,04	0,13	0,1
80—84	160,20	160,26	160,34	0,06	0,04	0,08	0,05
85—89	222,59	222,59	223,42	0,00	0,00	0,83	0,38

auch bei Materialien anderer Provenienz wieder[2]) und lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die gestutzten Tafeln sind strenger als die vollständige Aggregattafel; der Unterschied zwischen O^M und $O^{M(5)}$ ist ein erheblicher in den jüngeren Jahren, nimmt mit dem Alter ab und wird vom Alter 60 aufwärts unerheblich; der Unterschied zwischen $O^{M(5)}$ und $O^{M(10)}$ ist gering und nur in den Altern 30—50 von einigem Belang, er ist übrigens von schwankender Größe und selbst dem Zeichen nach nicht beständig.

Wenn demnach bei der Konstruktion einer doppelt abgestuften Tafel eine zehnjährige Vorperiode nach einzelnen Versicherungsjahren dargestellt und daran die um diese Vorperiode gekürzte Aggregattafel geschlossen wird, so scheint damit den Bedürfnissen der Praxis in zureichendem Maße Rechnung getragen zu sein. In dieser Weise ist bei der englischen Tafel $O^{[M]}$, die in Taf. VI am Ende des Bandes mitgeteilt ist, und bei der neuen Leipziger Tafel vorgegangen worden, während sich die neue Gothaer Bankliste mit einer siebenjährigen Vorperiode begnügt, nach der sie die Wirkung der Auslese als erloschen annimmt.

§ 4. Tafelausgleichung.

239. Ausgleichung einfach abgestufter Tafeln. Die unmittelbaren Ergebnisse einer Sterblichkeitsmessung, mögen sie aus

1) B. = Beobachtungsjahre; S. = Sterbefälle.

2) Vgl. d. Verf.s Studie „Die Versicherungsdauer als Element der Sterbenswahrscheinlichkeit", Mitteil. d. Österr.-ungar. Verbandes der Privat-Versich.-Anst., Neue Folge IV (1909).

bevölkerungsstatistischen oder aus Beobachtungen an Versicherten od. dgl. hervorgegangen sein, bieten in ihrer nach dem wachsenden Alter geordneten Zusammenstellung insofern kein befriedigendes Bild dar, als der Verlauf der Zahlen der Vorstellung, die man sich a priori von ihm bildet, nicht entspricht. Diese Vorstellung geht dahin, daß es *normale* Werte der betreffenden Größe — wir denken an die Sterbenswahrscheinlichkeit — gebe, die sich in den Lauf einer Funktion einfügen, die weder plötzliche, noch innerhalb enger Altersgrenzen häufig wechselnde Änderungen aufweist, vielmehr mit einer gewissen Regelmäßigkeit mit dem Wachsen des Alters fortschreitet. In geometrischer Interpretation geht also die apriorische Erwartung dahin, durch die Endpunkte der graphisch aufgetragenen Einzelwerte der Größe, um die es sich handelt, werde sich eine Kurve legen lassen, die einen im Detail regelmäßigen ruhigen Verlauf zeigt.

Wenn dem nicht so ist, so sind die Gründe hierfür in zwei Umständen zu suchen: In den unvermeidlichen, vom Zufall abhängigen Fehlern, die *jeder* empirischen Bestimmung einer Größe, sei dieselbe konkret oder abstrakt, anhaften, und in Störungen des „normalen“ Verlaufes der beobachteten Erscheinung.

Für die unvermeidlichen, *zufälligen* Fehler läßt sich ein Maß aus der Beobachtungsgrundlage ableiten. Ist s die (wirkliche oder rechnungsmäßige) Anzahl der Personen, welche ein bestimmtes Alter x überlebt haben, und m die Anzahl der aus ihnen hervorgegangenen Sterbefälle, so ist man berechtigt, mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt \tag{1}$$

zu erwarten, die Sterbenswahrscheinlichkeit q des betreffenden Alters liege zwischen den Grenzen:

$$\frac{m}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}} \quad \text{und} \quad \frac{m}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}; \tag{2}$$

bezeichnet man also den empirischen (wahrscheinlichsten) Wert $\frac{m}{s}$ von q mit q_0, seine Ergänzung zur Einheit mit p_0, so ist

$$h = \sqrt{\frac{s}{2 p_0 q_0}} \tag{3}$$

die Präzision und damit zugleich ein Maß der Unsicherheit der Bestimmung q_0 von q, insbesondere ist

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{p_0 q_0}{s}} \tag{4}$$

der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung (s. Nr. 79). Diese Formeln zeigen, daß in den schwach besetzten Altersklassen aus dieser

Quelle allein eine erhebliche Unsicherheit in der Bestimmung von q und daher auch eine beträchtliche Unregelmäßigkeit in den gewonnenen Einzelwerten entspringen kann.

Die zweite Fehlerquelle entzieht sich der rechnerischen Behandlung. Störungen können sich dadurch ergeben, daß besondere Sterblichkeitsursachen für kürzere oder längere Zeit mit verstärkter Intensität auftreten. Auch Unvollkommenheiten anderer Art, wie sie selbst einer mit der größten Sorgfalt ausgeführten Beobachtung anhaften (unrichtige Altersangaben, hypothetische Behandlung der Wanderungen, Ein- und Austritte u. ä.), wirken störend auf den Verlauf der Zahlen. Nur möglichste Erweiterung der Beobachtungsgrundlage kann den Einfluß solcher Störungen einschränken.

Aus dem Bestreben, die durch den Zufall verursachten Unregelmäßigkeiten einer Tafel — und dies gilt auch von andern als Sterbetafeln allein — zu beseitigen und sich dem „normalen" Verlaufe zu nähern, sind die zahlreichen *Ausgleichungsmethoden* hervorgegangen, welche heute ein wichtiges und vielgepflegtes Kapitel der Tafelkonstruktionspraxis bilden; dabei darf nicht verschwiegen werden, daß es nicht an fachmännischen Stimmen fehlt, die für die unveränderte Beibehaltung der unmittelbaren Ergebnisse eintreten; die Aufbewahrung und die Publikation *dieser* Ergebnisse ist unter allen Umständen geboten, weil jede wissenschaftliche Untersuchung zu ihnen zurückkehren muß. Das Bestreben der neueren Methoden geht denn auch dahin, nur dort, wo offenkundig zufällige Störungen des normalen Verlaufes vorliegen, sich von den Originalzahlen zu entfernen und einer allzustark eingreifenden Ausgleichung, die auch in der Natur der Sache gelegene und daher charakteristische Bewegungen verwischen kann, aus dem Wege zu gehen; daneben freilich besteht der Wunsch, die Endresultate so regelmäßig zu gestalten, als ob sie tatsächlich aus einem analytischen Gesetze hervorgegangen wären.

Existierte ein solches und befände man sich im Besitze seines analytischen Ausdruckes, dann wäre die ganze Frage gelöst. Angenommen, die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x bei dem Alter x hätte den allgemeinen Ausdruck

$$q_x = F(x, a, b, c, \cdots), \tag{5}$$

wobei F das Zeichen für eine bekannte Funktion ist und $a, b, c, \cdots$ Konstanten (Parameter) bedeuten. Dann würde sich das Absterben irgendeiner Masse nur als eine Modalität des Gesetzes oder der *Sterblichkeitsformel* (5) darstellen und durch die Spezialwerte der Konstanten gekennzeichnet sein. Zu einer genäherten Berechnung dieser Spezialwerte genügte im Grunde die empirische Bestimmung von so vielen Einzelwerten von q_x, als es Konstanten gibt; ihre möglichst gesicherte Berechnung aus einer vollständigen Beobachtungsreihe hätte

nach der Methode der kleinsten Quadrate zu geschehen, wobei je nach der Zusammensetzung von F der eine oder der andere der beiden in Nr. 162 entwickelten Rechnungsvorgänge sich besonders empfehlen würde.

Nach dem ersten Vorgange entwickelt man, nachdem Näherungswerte $a_0, b_0, c_0, \cdots$ für die Konstanten bestimmt worden sind,

$$F(x, a_0 + \varDelta a, b_0 + \varDelta b, c_0 + \varDelta c, \cdots)$$

bis auf Glieder erster Ordnung in $\varDelta a, \varDelta b, \varDelta c, \cdots$, setzt

$$F_a'(x, a_0, b_0, c_0, \cdots) = \alpha_x, \quad F_b'(x, a_0, b_0, c_0, \cdots) = \beta_x,$$
$$F_c'(x, a_0, b_0, c_0, \cdots) = \gamma_x, \quad \cdots,$$

bildet mit Hilfe des beobachteten Wertes $\mathfrak{q}_x$ von q_x die Differenz

$$\mathfrak{q}_x - F(x, a_0, b_0, c_0, \cdots) = \delta_x;$$

mit Hilfe dieser Werte ergibt sich für jedes Alter eine Fehlergleichung von der Form:

$$\lambda_x = -\delta_x + \alpha_x \varDelta a + \beta_x \varDelta b + \gamma_x \varDelta c + \cdots;$$

aus dem System der Fehlergleichungen erhält man unter Berücksichtigung ihrer Gewichte g_x die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l}
[g\alpha\alpha]\varDelta a + [g\alpha\beta]\varDelta b + [g\alpha\gamma]\varDelta c + \cdots = [g\alpha\delta] \\
[g\alpha\beta]\varDelta a + [g\beta\beta]\varDelta b + [g\beta\gamma]\varDelta c + \cdots = [g\beta\delta] \\
[g\alpha\gamma]\varDelta a + [g\beta\gamma]\varDelta b + [g\gamma\gamma]\varDelta c + \cdots = [g\gamma\delta] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

zur Bestimmung der Korrektionen $\varDelta a, \varDelta b, \varDelta c, \cdots$ der Näherungswerte. Mit der definitiven Formel ist dann nicht bloß eine Ausgleichung der Beobachtungsreihe, sondern auch deren *Interpolation* gewonnen, da man imstande ist, q_x auch für nichtganze x zu berechnen. Was das Gewicht g_x betrifft, so ergibt es sich aus der Präzision (3) von $\mathfrak{q}_x$, und zwar ist nach Nr. 155

$$g_x = \varkappa \frac{s}{\mathfrak{p}_x \mathfrak{q}_x},$$

wobei $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, den man zweckmäßig so wählen wird, daß die g_x sich in bequemen Zahlen ausdrücken.

Der zweite Vorgang kommt vorteilhaft zur Anwendung, wenn es eine Funktion $\varphi(q_x)$ von q_x gibt, die in bezug auf die Konstanten $a, b, c, \cdots$ oder irgendwelche einfache Funktionen derselben linear ist; es kann dann das direkte Verfahren der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (Nr. 157 u. 160) zur Anwendung gebracht werden; nur kommt an die Stelle des Gewichtes g_x von $\mathfrak{q}_x$ das Gewicht g_x' von $\varphi(\mathfrak{q}_x)$ in Rechnung, das sich nach Nr. 162 mit

$$g_x' = \frac{g_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_x}\right)^2}$$

bestimmt.

Die eingangs gemachte Voraussetzung, die Funktion, nach welcher die beobachtete Erscheinung verläuft, sei a priori gegeben, ist im allgemeinen nicht erfüllt. Das Problem tritt in der Regel in der Form auf, eine hypothetisch angenommene Funktion sei der Beobachtungsreihe anzupassen. Auch dann bildet die Methode der kleinsten Quadrate ein systematisches Verfahren, von dem Gebrauch gemacht werden kann in dem eben vorgetragenen Sinne; nur können die Resultate nicht mehr auf die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung Anspruch erheben, die ihnen zukommt, wenn über die Form der Funktion kein Zweifel besteht (s. I. Bd., Nr. 164). Außer der Methode der kleinsten Quadrate seien in diesem Zusammenhange auch die *Methode der Momente* von Pearson (Nr. 196) und die gelegentlich ihrer Besprechung erwähnte *Methode der Flächen* von Cantelli als systematische Verfahren angeführt.

Damit ist die eine Methode der Ausgleichung von Tafeln, die mit Zugrundelegung einer *analytischen Formel*, dem Wesen nach gekennzeichnet. Neben dieser gibt es *mechanische* Methoden, die auf eine ausgleichende Kombination der Beobachtungsresultate hinzielen, und die *graphische* Ausgleichung.

Zur Wahl der Methode kommt im einzelnen Falle noch die Frage, an welcher Größenreihe die Ausgleichung vorzunehmen ist. Bei Sterbetafeln kann es sich nur um die Entscheidung zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x, den Lebenswahrscheinlichkeiten p_x und den Zahlen der Überlebenden, l_x, handeln. Der seit langem schon befolgte Vorgang, die Sterbenswahrscheinlichkeiten auszugleichen und aus ihren ausgeglichenen Werten erst die Tafel aufzubauen, hat sich auch theoretisch als der vorteilhaftere erwiesen[1]) (dort, wo mit Gewichten zu arbeiten ist, sprechen auch praktische Gründe für ihn, weil die Gewichtsbestimmung der l_x umständlich ist).

240. Sterblichkeitsformeln. Die Formeln von Gompertz und Makeham. Seit De Moivre, dem ersten, der eine Hypothese über den Verlauf des Absterbens aufstellte[2]), dahin gehend, die Reihe der Zahlen der Überlebenden vom 12. bis zum 86. Jahre (Lebensende) sei eine arithmetische Progression mit konstanter Differenz, bis in die Gegenwart sind zahlreiche Versuche unternommen worden, die Er-

1) J. Karup, Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Transactions of the second internat. actuarial congress 1898, London 1899, p. 53.

2) Treatise of Annuities on Lives, London 1724. In dritter Auflage 1756. Nach dieser Auflage ins Deutsche übertragen von E. Czuber unter dem Titel: A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten. Wien 1906.

scheinung des Absterbens in eine analytische Formel zu fassen; und sicherlich werden auch in der Zukunft solche Versuche wiederholt werden. Bei vielen Autoren bestand die Meinung, in der Formel den Ausdruck eines Naturgesetzes gefunden zu haben; der Glaube an die Existenz eines solchen geht auch aus den Worten hervor, mit welchen Wittstein die Vorrede zur zweiten Auflage seiner Schrift: „Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit" (Hannover 1883) schließt, das Ziel derartiger Untersuchungen sei, „gleichwie der Astronom jetzt aus wenigen Beobachtungen eines Gestirnes dessen ganze Bahn berechnet, so auch dereinst aus der Beobachtung weniger Altersklassen mit Sicherheit eine ganze Sterblichkeitstafel aufbauen zu können"[1]).

Die neuere Anschauung erblickt in den Sterblichkeitsformeln nichts mehr als analytische Ausdrücke, welche sich der einen Beobachtungsreihe besser, einer andern mit minder gutem Erfolge anpassen, und hält es für ausgeschlossen, daß es einmal gelingen könnte, eine Formel zu finden, die alle Beobachtungsreihen gleich gut wiederzugeben vermöchte. Sie darf sich dabei nicht bloß auf die bisher gemachten Erfahrungen, sondern hauptsächlich auf die Natur der in Frage stehenden Erscheinung berufen, deren zeitlicher und örtlicher Wechsel eine alles umfassende analytische Formulierung tatsächlich auszuschließen scheint.

Unter den vielen Formeln haben es die von B. Gompertz und M. W. Makeham zu einem hohen Ansehen gebracht; viele der neueren wichtigen Sterblichkeitsmessungen sind nach ihnen bearbeitet worden und man muß zugeben, zum Teil mit überraschendem Erfolg.

Die Grundidee der Gompertzschen Theorie der menschlichen Sterblichkeit[2]) läßt sich mit Hilfe des Begriffes der Sterblichkeitsintensität (s. Nr. 213) dahin ausdrücken, daß der Wert dieser biologischen Funktion mit dem Alter nach geometrischer Progression wachse, daß also

$$\mu_x = Bc^x \tag{1}$$

sei; da nun $\mu_x = -\frac{dl_x}{l_x dx}$ ist, so folgt daraus:

$$\operatorname{Log} l_x = -\frac{B}{\operatorname{Log} c} c^x + \operatorname{Log} k;$$ [3])

und setzt man $-\frac{B}{\operatorname{Log} c} = \operatorname{Log} g$, so wird

$$\operatorname{Log} l_x = \operatorname{Log} k + c^x \operatorname{Log} g$$

und

1) Zur geschichtlichen Entwicklung des Gegenstandes vgl. des Verf.s „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie etc.", Jahresber. der Deutschen Mathem.-Verein. VII (1899), p. 238—243.

2) On the nature of the function expressive of the law of human mortality etc. Lond. Transact. (part II) 1825.

3) Log ist hier die Bezeichnung des *natürlichen* Logarithmus.

$$l_x = kg^{c^x}. \tag{2}$$

Dies ist die Gompertzsche Sterblichkeitsformel mit den drei Parametern c, g, k. Die Zahl dieser reduziert sich auf zwei, wenn man zur Darstellung der Lebens- oder Sterbenswahrscheinlichkeit übergeht; denn aus

$$l_{x+1} = kg^{c^{x+1}}$$

und (2) folgt

$$p_x = g^{c^x(c-1)}. \tag{3}$$

Gompertz selbst beschränkte die Formel auf die Alter von 10 oder 15 bis 55 oder 60 Jahren und bemerkte, auf die Kinderjahre sei sie nicht anwendbar, und wolle man sie über das 60. Jahr ausdehnen, so müsse eine Änderung der Konstanten eintreten.

Makeham[1]) hat an der Gompertzschen Formel eine Abänderung angebracht, durch die sie anwendbar wurde auf *alle* Alter von etwa 20 Jahren aufwärts. Diese Erweiterung oder Verallgemeinerung der Formel ist schon in den Ausführungen angebahnt, mit welchen Gompertz seine Theorie begründete; er spricht hier die Vermutung aus, daß das Absterben die Wirkung von zwei koexistierenden Ursachenkomplexen sei; der eine wirke in allen Altern gleich stark, der andere, indem er den Organismus abnütze und seine Widerstandskraft herabsetze, in einer mit dem Alter zunehmenden Weise. In genauer Verfolgung dieses Gedankens gelangt man dazu, die Sterblichkeitsintensität als Summe aus einem konstanten (d. h. vom Alter unabhängigen) und einem mit dem Alter (in geometrischer Progression) wachsenden Teile anzusetzen:

$$\mu_x = A + Bc^x; \tag{4}$$

daraus ergibt sich durch Integration:

$$\operatorname{Log} l_x = -Ax - \frac{B}{\operatorname{Log} c} c^x + \operatorname{Log} k;$$

setzt man $-A = \operatorname{Log} s$, $-\frac{B}{\operatorname{Log} c} = \operatorname{Log} g$, so entsteht die für jedes Logarithmensystem gültige Gleichung:

$$\log l_x = \log k + x \log s + c^x \log g,$$

aus der schließlich

$$l_x = ks^x g^{c^x} \tag{5}$$

folgt. Dies ist die von Makeham aufgestellte Formel, zumeist die Gompertz-Makehamsche genannt. Sie enthält vier Konstanten, deren Zahl sich bei dem Übergang zu einer Wahrscheinlichkeit um eine vermindert; so ist insbesondere die Lebenswahrscheinlichkeit:

$$p_x = sg^{c^x(c-1)}. \tag{6}$$

---

1) Journal of the Inst. of Actuaries, 1860 (January).

241. Die King-Hardysche Anwendung der Makehamschen Formel. Wir gehen nun daran, jene Art der Anwendung der Formel (5) auf eine spezielle Erfahrungsreihe zu erklären, die im Text Book[1]) eingeschlagen worden ist. So interessant der dabei befolgte Vorgang in seinen Einzelheiten ist und so sehr die ausgeglichene Tafel durch die Regelmäßigkeit ihres Verlaufes befriedigt, als ein methodisches Verfahren, das bei einem andern Material mit Aussicht auf Erfolg angewendet werden könnte, kann er nicht bezeichnet werden.

Vier äquidistante Werte von l_x reichen theoretisch zur Bestimmung der vier Konstanten c, g, k, s hin, und die Rechnung kann zweckmäßig wie folgt geführt werden. Man bilde im gemeinen Logarithmensystem die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\log l_x &= \log k + x \log s + c^x \log g \qquad (7)\\ \log l_{x+t} &= \log k + (x+t) \log s + c^{x+t} \log g\\ \log l_{x+2t} &= \log k + (x+2t) \log s + c^{x+2t} \log g\\ \log l_{x+3t} &= \log k + (x+3t) \log s + c^{x+3t} \log g;\end{aligned}$$

durch Bildung der ersten Differenzen in der Reihe der linken Seiten entsteht:

$$\begin{aligned}\Delta \log l_x &= t \log s + c^x (c^t - 1) \log g \qquad (8)\\ \Delta \log l_{x+t} &= t \log s + c^{x+t} (c^t - 1) \log g\\ \Delta \log l_{x+2t} &= t \log s + c^{x+2t} (c^t - 1) \log g;\end{aligned}$$

die Bildung der zweiten Differenzen führt weiter zu:

$$\begin{aligned}\Delta^2 \log l_x &= c^x (c^t - 1)^2 \log g \qquad (9)\\ \Delta^2 \log l_{x+t} &= c^{x+t} (c^t - 1)^2 \log g.\end{aligned}$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch die vorletzte und logarithmiert das Resultat, so ergibt sich:

$$\log \Delta^2 \log l_{x+t} - \log \Delta^2 \log l_x = t \log c. \qquad (10)$$

Daraus berechnet sich $\log c$ und c. Die Einführung dieses Wertes in (9) ermöglicht die Bestimmung von $\log g$ und damit von g selbst. Mit den Werten von c und g liefert die Gleichung (8) den Wert von $\log s$ und somit von s selbst. Mit diesen Daten kann schließlich aus (7) $\log k$ und k berechnet werden.[2])

---

1) Institute of Actuaries' Text Book. Part. II. London 1887, p. 75ff.

2) Eine Weiterbildung der King-Hardyschen Methode hat A. Tauber gegeben; seine Arbeit beschäftigt sich insbesondere mit der Gleichung zur Bestimmung von c, wenn statt dreigliedriger Gruppen wie oben in (8) allgemein n- und insbesondere 4-gliedrige Gruppen von Beobachtungen herausgegriffen werden; auf die Bestimmung von c folgt bei Tauber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Versicherungswissensch. Mitteilungen II, Wien 1906.

Folgten die l_x tatsächlich in aller Strenge dem Gesetze (5), so wäre es gleichgültig, wie man die vier äquidistanten Alter auswählt. Hingegen bietet die wiederholte Rechnung der Konstanten aus verschiedenen Altersgruppen einen Anhalt dafür, ob und wie weit die Formel sich der Reihe der l_x anpaßt. Als Beispiel in letzterem Sinne diene die wiederholte Berechnung aus der Sterbetafel, welche J. Milne[1]) für die Stadt Carlisle konstruierte; dieselbe ergab:

log	Altersgruppe			
	15, 35, 55, 75	20, 40, 60, 80	25, 45, 65, 85	30, 50, 70, 90
c	0,0364852	0,0411317	0,0404469	0,0397194
g	— 0,0007393	— 0,0003083	— 0,0003272	— 0,0003694
s	— 0,0029073	— 0,0034071	— 0,0038187	— 0,0039126
k	4,8452254	4,8549296	4,8681803	4,8743597

Diese Tabelle, die nebenbei auch über die Vorzeichen der Logarithmen der Konstanten belehrt, zeigt, daß es nicht wohl möglich ist, die genannte Tafel durch *eine* Formel befriedigend darzustellen; sie läßt auch den verschiedenen Grad der Empfindlichkeit der Konstanten erkennen. Man könnte, um in einem so gearteten Falle einen möglichst gleichmäßigen Anschluß der Formel an die Beobachtungsreihe zu erzielen, Mittelwerte aus den verschiedenen Bestimmungen der Konstanten bilden.

Ein anderer Weg ist bei der Herstellung der Tafel eingeschlagen worden, welche die Grundlage aller Tabellen des Text Book bildet und auf den Beobachtungen H^M der 20 britischen Gesellschaften beruht.

Das Verfahren, darauf ausgehend, möglichst viele Beobachtungswerte an der Bestimmung der Konstanten mitwirken zu lassen, besteht in folgendem.

Man bildet vier Summen von je t aufeinander folgenden $\log l_x$, mit einem zweckmäßig gewählten x und t vorgehend; nach Formel (5) ist zunächst

$$\sum_x^{x+t-1} \log l_x = t \log k + (x + \overline{x+1} + \overline{x+2} + \cdots + \overline{x+t-1}) \log s$$
$$+ c^x (1 + c + c^2 + \cdots + c^{t-1}) \log g,$$

also definitiv:

$$\sum_x^{x+t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + t - 1) \log s + c^x \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g;$$

ebenso:

---

1) Treatise on Annuities and Assurance, 1815.

$$\sum_{x+t}^{x+2t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 3t - 1) \log s + c^{x+t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\sum_{x+2t}^{x+3t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 5t - 1) \log s + c^{x+2t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g$$

$$\sum_{x+3t}^{x+4t-1} \log l_x = t \log k + \frac{t}{2}(2x + 7t - 1) \log s + c^{x+3t} \frac{c^t - 1}{c - 1} \log g.$$

Mit diesen vier Summen wird genau so verfahren, wie es vorhin mit den vier Einzelwerten, deren erster mit (7) bezeichnet war, geschehen ist.

Nach mehrfachen Versuchen ist als die vorteilhafteste Gruppenbildung die gefunden worden, welche $x = 17$, $t = 18$ entspricht; dadurch sind die 72 Altersklassen von 17 bis 88 zur Verwendung gekommen, und die Rechnung ergab:

$$\log c = 0{,}03965686 \qquad c = 1{,}0956122$$

$$\log g = \overline{9}{,}9995432 \qquad g = 0{,}9989465$$

$$\log s = \overline{9}{,}997390673 \qquad s = 0{,}9938272$$

$$\log k = 4{,}0404723 \qquad k = 10976{,}7.$$

Mit diesen Werten der Konstanten sind nun die l_x für alle Alter (von 10 aufwärts, da die Beobachtung für die untersten Alter ein völlig unzulängliches Material ergeben hatte) zu *rechnen*. Die Rechnung wurde auf Grund der folgenden Betrachtung vollzogen. Es ist:

$$\log l_x = \log k - x(-\log s) - c^x(-\log g)$$

und vermöge $\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$ weiter

$$\Delta \log l_x = \log p_x = -(-\log s) - c^x (c - 1)(-\log g);$$

daraus folgt durch neuerliche Differenzenbildung:

$$\Delta \log p_x = - c^x (c - 1)^2 (-\log g),$$

$$\log(-\Delta \log p_x) = x \log c + 2 \log(c - 1) + \log(-\log g),$$

und hieraus schließlich mittels desselben Prozesses:

$$\Delta \log(-\Delta \log p_x) = \log c.$$

Man erhält also, von einem Anfangswerte $\log(-\Delta \log p_x)$ ausgehend, durch fortgesetzte Addition von $\log c$ die ganze Reihe der Werte von $\log(-\Delta \log p_x)$; nimmt man hierzu die Numeri, so hat man die Reihe der $-\Delta \log p_x$. Aus dem direkt gerechneten Anfangswerte von $\log p_x$ ergibt sich mittels der letzterwähnten Reihe die Reihe der $\log p_x$; aus dieser mit Hilfe des direkt gerechneten Anfangswertes von

$\log l_x$ die ganze Reihe der $\log l_x$ und schließlich die der l_x. Bei dieser letzten Stufe der Rechnung ist $\log l_x$ oder, was dasselbe bedeutet, $\log k$ um eine Einheit erhöht worden, um eine größere Basis zu gewinnen.

Die direkt gerechneten Anfangswerte sind:

$$\log(-\Delta \log p_{10}) = \bar{5},0173009, \quad \log p_{10} = \bar{1},99720183,$$
$$\log l_{10} = 5,0124407;$$

damit ergibt sich für die durch bloße Additionen und den Übergang von Logarithmen zu Zahlen geführte Rechnung folgendes Schema:

x	$\log(-\Delta \log p_x)$	$-\Delta \log p_x$	$\log p_x$	$\log l_x$	l_x
1	2	3	4	5	6
10	$\bar{5}$,0173009	0,0000104	$\bar{1}$,9972018	5,0124407	102 906
11	,0569578	,0000114	,9971914	,0096425	102 245
12	,0966146	,0000125	,9971800	,0068339	101 586
13	,1362715	,0000137	,9971675	,0040139	100 928
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Jede Zahl der Kolonne 2 entsteht aus der vorangehenden durch Addition von $\log c = 0,03965686$; jede Zahl der Kolonne 4 aus der über ihr stehenden durch Subtraktion der links daneben befindlichen; jede Zahl der Kolonne 5 endlich aus der über ihr stehenden durch Addition der links daneben befindlichen.

Vergleicht man die so berechneten l_x mit den Originalzahlen der H_1^M-Tafel, so zeigen sie vom Alter 25 aufwärts eine sehr befriedigende Übereinstimmung; unterhalb dieses Alters aber halten sich die gerechneten Zahlen beständig über den Originalzahlen, und die Divergenz nimmt von 25 gegen 10 hin in ausgesprochener Weise zu; der Verlauf der Sterblichkeit macht also um das 25. Lebensjahr eine Wendung, welche die Formel nicht wiedergibt.

Um eine im ganzen Verlaufe dem Original sich anschmiegende, regelmäßig verlaufende Reihe zu erhalten, wurde der *Exzeß* der gerechneten l_x über die originalen in dem betreffenden Teile der Tafel wieder einer Makehamschen Formel angepaßt, dabei jedoch die frühere Konstante c, die erfahrungsmäßig nur geringen Variationen unterliegt, beibehalten; dagegen traten an die Stelle von g, s, k neue Konstanten γ, σ, $\varkappa$, deren Berechnung aus den Altern 10, 16, 22 ergab:

$$\log \gamma = \bar{9},54698$$
$$\log \sigma = 0,06820$$
$$\log \varkappa = 3,9103.$$

Mit diesen Werten ist der Exzeß für 10 bis 28 gerechnet und von

den aus der ersten Rechnung hervorgegangenen l_{10} bis l_{28} in Abzug gebracht worden; so ergab sich die endgültige Reihe der l_x von 10 aufwärts.

Eine ausschlaggebende Prüfung des Anschlusses der Formel an die Zahlen der Originalreihe lieferte nun die Vergleichung der „erwartungsmäßigen" mit den „wirklichen" Todesfällen. Bezeichnet $\mathfrak{l}_x$ die (rechnungsmäßige) Anzahl der unter Beobachtung gestandenen x-jährigen, $\mathfrak{d}_x$ die Anzahl der aus ihnen hervorgegangenen, also beobachteten Todesfälle[1]), q_x die Sterbenswahrscheinlichkeit nach der ausgeglichenen Tafel, so ist $q_x \mathfrak{l}_x = \mathfrak{d}_x'$ die Anzahl der erwartungsmäßigen Todesfälle. Die folgende Tabelle zeigt für die von fünf zu fünf Jahren fortschreitenden Alter das Größenverhältnis von $\mathfrak{d}_x$ und $\mathfrak{d}_x'$.

x	$\mathfrak{l}_x$	$\mathfrak{d}_x$	$\mathfrak{d}_x'$	$\mathfrak{d}_x' - \mathfrak{d}_x$
10	379	3	2	− 1
15	908	2	3	+ 1
20	3 293,5	19	19	0
25	13 622,5	70	96	+ 26
30	27 112,5	224	209	− 15
35	35 818,5	295	309	+ 14
40	38 195	377	382	+ 5
45	34 735,5	429	425	− 4
50	28 855,5	476	454	− 22
55	22 170,5	509	471	− 38
60	15 672,5	488	468	− 20
65	9 984,5	435	432	− 3
70	5 622	315	360	+ 45
75	2 693	254	259	+ 5
80	995	140	144	+ 4
85	254,5	55	55	0
90	43,5	10	14	+ 4
95	1,5	1	2	+ 1
In *allen* Altersklassen zusammen		20 517	20 496	− 21

Schließlich wurde die Tafel für die Alter unter 10 Jahren ergänzt mit Hilfe der Lebenswahrscheinlichkeiten von Farrs Sterbetafel für die „gesunde männliche Bevölkerung" Englands.[2])

1) Siehe diese Zahlen in „The Mortality Experience" p. 244.

2) London, Philos. Trans. 1860. — Es sei hier angeführt, daß dasselbe Beobachtungsmaterial auch von Th. Wittstein nach einer von ihm selbst aufgestellten Sterblichkeitsformel ausgeglichen wurde, welche lautet:

$$p_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n},$$

und in der M das höchste noch mit Lebenden besetzte Alter (hier 97) bedeutet; die Konstante m ergibt sich vor der Ausgleichungsarbeit durch das Alter geringster Sterbenswahrscheinlichkeit und M (sie ist hier mit 6 angenommen worden): Es bleiben noch die Konstanten a und n zu bestimmen und dieser Teil der Ausgleichung ist mit allen Einzelheiten aus der bezüglichen Schrift: Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit, 1883, p. 36ff, zu entnehmen.

242. Anwendung der Makehamschen Formel bei der Ausgleichung der englischen Sterblichkeitsmessung 1863—1893. Bei diesem Messungswerke ist von der Makehamschen Formel durch G. F. Hardy weitgehender Gebrauch gemacht worden, sie erfuhr dabei auch mancherlei Modifikation und Verallgemeinerung.

Das Prinzip der Anwendung besteht hier in folgendem. Ist u_1, $u_2, \cdots u_n$ die auszugleichende, u_1', u_2', $\cdots u_n'$ die ausgeglichene Reihe, $u_i' - u_i = \lambda_i$ die Abweichung zweier korrespondierender Glieder, so wird verlangt, daß die Summe der Abweichungen und die Summe der aufsummierten (akkumulierten) Abweichungen gleich Null sei, in Zeichen, wenn man $\sum_r^n{}^i \lambda_i = \lambda^{(r)}$ setzt, daß

$$\sum_1^n{}^i \lambda_i = 0 \tag{1}$$

$$\sum_1^n{}^r \lambda^{(r)} = 0; \tag{2}$$

die letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit $\sum_1^n{}^i\, i\, \lambda_i = 0$.

Daß mit zwei Bedingungen das Auslangen gefunden wurde, hängt mit den weiteren Details des Rechnungsvorgangs zusammen. Was zunächst die Konstante c anlangt, deren Einfluß geringer ist als der von s und g, so ist sie in jedem einzelnen Falle vorweg probeweise bestimmt und ein für die Rechnung bequemer Wert von $\log c$ fortan beibehalten worden. Die Konstante k wird dadurch ausgeschieden, daß man von den Zahlen der Lebenden auf Lebenswahrscheinlichkeiten und Sterblichkeitsintensitäten übergeht. Bezeichnet man mit $E \log p_x$ den absoluten Wert von $\log p_x$, so folgt aus der Reihe der

$$\log l_x = \log k + x \log s + c^x \log g$$

durch Differenzbildung

$$E \log p_x = -\Delta \log l_x = -\log s - c^x (c-1) \log g = A' + B' c^x, \tag{3}$$

wenn

$$\begin{aligned} -\log s &= A' \\ -(c-1) \log g &= B' \end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt wird. Ferner ist

$$\mu_x = -\frac{d \operatorname{Log} l_x}{dx} = \frac{1}{M} (-\log s - c^x \operatorname{Log} c \log g)$$

$$= \frac{1}{M} \left(\alpha + \beta \frac{\operatorname{Log} c}{c-1} c^x\right) = A + Bc^x, \tag{5}$$

wenn man

$$\frac{\alpha}{M} = A \qquad \text{Modul } \frac{1}{M} = 0{,}434\,294 \cdots \qquad (6)$$
$$\frac{\beta}{M} \frac{\operatorname{Log} c}{c-1} = B$$

setzt. Die Formeln (3) und (5) enthalten tatsächlich nunmehr zwei zu bestimmende Konstante und sind bezüglich derselben linear.

Hier soll nur über die beiden der Ausgleichung unterzogenen Aggregattafeln O^M und $O^{M(5)}$ gesprochen werden als von einfach abgestuften Tafeln.

Mit der Ausgleichung begann Hardy an der Tafel $O^{M(5)}$ mit $\log c = 0{,}039$; es ergab sich ein sehr befriedigender Anschluß der ausgeglichenen Werte an die rohen Daten bei den folgenden Werten der Konstanten:

$$k = 114\,157{,}6 \text{ (Basis beim Alter } 10:107\,324)$$
$$s = 0{,}9941287$$
$$g = 0{,}9988449$$
$$c = \text{num log } 0{,}039 = 1{,}0939564;$$
$$A' = 0{,}0025575$$
$$B' = 0{,}0000472$$
$$A = 0{,}0058889$$
$$B = 0{,}0001038.$$

Die bei der Prüfung des Erfolges einer Ausgleichung übliche Vergleichung der erwartungsmäßigen mit den wirklichen Todesfällen, aus der folgenden Tabelle ersichtlich, zeigt, daß der Hauptteil der

Altersgruppe	Erwartungsmäßige Todesfälle	Wirkliche Todesfälle	Abweichung
15—9	18	10	+ 8
20—4	136	122	+ 14
25—9	949	924	+ 25
30—4	3 136	3 072	+ 64
35—9	5 683	5 689	— 6
40—4	7 981	8 152	— 171
45—9	10 277	10 257	+ 20
50—4	12 613	12 620	— 7
55—9	14 921	14 903	+ 18
60—4	16 808	16 618	+ 190
65—9	17 448	17 455	— 7
70—4	15 929	16 042	— 113
75—9	12 147	12 172	— 25
80—4	7 207	7 317	— 110
85—9	2 970	2 865	+ 105
Im ganzen	128 223	128 218	+ 444 — 439

Tafel, vom Alter 25 bis 79 etwa, sehr nahe mit den Originaldaten übereinstimmt.

Für die Herstellung der adjustierten Tafel O^M erwies sich die Makehamsche Formel allein nicht ausreichend, auch aus dem Grunde nicht, weil gefordert werden mußte, daß sie über dem 85. Lebensjahr mit der ausgeglichenen $O^{M(5)}$ koinzidiere, da in dieser Schlußperiode die Erfahrungen für beide Tafeln dieselben sind — es gab in diesen Altern keine Personen mit einer Versicherungsdauer unter 5 Jahren. Diese Erwägungen führten dazu, die Tafel O^M aus jener $O^{M(5)}$ rechnerisch abzuleiten und zwar in der Weise, daß an den Gliedern der Reihe $\varDelta E \log p_x$ aus der Tafel $O^{M(5)}$ eine empirisch festgestellte vom Alter abhängige Korrektion angebracht wurde, nach dem Ansatze:

$$[(\varDelta E \log p_x)^{O^M} = (\varDelta E \log p_x)^{O^{M(5)}} + \Phi(x),$$

wobei

$$\Phi(x) = 0{,}0000504.10^{-0{,}0032\,(29-x)^2} + 0{,}0000114.10^{-0{,}0060\,(66{,}5-x)^2};$$

der Übergang zu $E \log p_x$ geschieht dann gemäß der Formel

$$(E \log p_x)^{O^M} = (E \log p_x)^{O^{M(5)}} - \sum_x^{\omega} \Phi(x).$$

Der Erfolg dieses Vorgangs darf als sehr befriedigend bezeichnet werden für alle Alter von 10 bis 89; im ganzen ergaben sich genau so viel rechnungsmäßige als wirkliche Todesfälle (140107).

243. Ausgleichung nach der Makehamschen Formel mittels der Methode der kleinsten Quadrate. I. Geht man von der Formel (6), Nr. 240, für die Lebenswahrscheinlichkeit aus, so ergibt sich durch deren Logarithmierung:

$$\log p_x = \log s + c^x (c-1) \log g. \qquad (1)$$

Nimmt man also die Ausgleichung an der Logarithmen der beobachteten p_x vor, so ist der Ansatz in bezug auf die Konstanten

$$\left.\begin{aligned} \log s &= a \\ (c-1)\log g &= b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

bereits linear, nicht so in bezug auf den Parameter c. Setzt man den *beobachteten* Wert von $\log p_x = y_x$, den *ausgeglichenen* Wert $= \mathfrak{y}_x$, denkt sich Näherungswerte a_0, b_0, c_0 der drei Konstanten a, b, c auf irgend einem Wege bestimmt und bezeichnet mit α, β, γ' ihre als klein vorausgesetzten Korrektionen, so schreibt sich wegen

$$\frac{\partial y_x}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial y_x}{\partial b} = c^x, \quad \frac{\partial y_x}{\partial c} = b x c^{x-1}$$

die allgemeine Fehlergleichung wie folgt (Nr. 162):

$$\mathfrak{y}_x = y_x + \lambda_x = y_x^{(0)} + \alpha + c_0^{\,x} \beta + b_0\, x c_0^{\,x-1} \gamma',$$

worin $y_x^{(0)} = a_0 + b_0 c_0^x$, oder mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} y_x - y_x^{(0)} &= \varDelta_x \\ b_0 c_0^{-1} \gamma' &= \gamma \end{aligned} \tag{3}$$

noch einfacher:

$$\lambda_x = - \varDelta_x + \alpha + c_0^x \beta + x c_0^x \gamma. \tag{4}$$

Das System der Normalgleichungen, das sich hieraus zur Bestimmung von α, β, γ ergibt, hat die Form:

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= D \\ B\alpha + E\beta + F\gamma &= G \\ C\alpha + F\beta + H\gamma &= K; \end{aligned} \tag{5}$$

bei seiner Aufstellung sind die Gewichte der Fehlergleichungen zu berücksichtigen. Das Gewicht von p_x, wenn E_x die diesem Alter entsprechende Zahl der beobachteten Lebenden ist, kann gleich $\frac{p_x(1-p_x)}{E_x}$ genommen werden, der Regel in Nr. 155 entsprechend darf dann als Gewicht von $\log p_x$

$$\mathfrak{g}_x = \frac{E_x p_x}{1 - p_x} \tag{6}$$

benutzt werden. Mit diesen Gewichten stellen sich die Koeffizienten der Normalgleichungen wie folgt dar:

$$\begin{aligned} A = [\mathfrak{g}_x], \quad B = [\mathfrak{g}_x c_0^x], \quad & C = [\mathfrak{g}_x x c_0^x], \quad D = [\mathfrak{g}_x \varDelta_x], \\ E = [\mathfrak{g}_x c_0^{2x}], \quad & F = [\mathfrak{g}_x x c_0^{2x}], \quad G = [\mathfrak{g}_x c_0^x \varDelta_x], \\ & H = [\mathfrak{g}_x x^2 c_0^{2x}], \quad K = [\mathfrak{g}_x x c_0^x \varDelta_x]. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Berechnung von A, B, C, E, F, H, die sämtlich positiv sind, geschieht mit Hilfe der Logarithmen von $\mathfrak{g}_x$, c_0^x, c_0^{2x}, x und x^2. Die Berechnung der Absolutglieder aber würde sich nach den vorstehenden Formeln unbequem gestalten; einmal erforderte sie die Ausrechnung der $y_x^{(0)}$ für alle benutzten Alter, dann die Bildung der Differenzen $y_x - y_x^{(0)} = \varDelta_x$, die teils positiv, teils negativ sein werden, und darin liegt die zweite Unbequemlichkeit und zugleich eine Gefahr für Irrungen. Ersetzt man aber in den Ausdrücken für D, G, K die $\varDelta_x$ durch $y_x - a_0 - b_0 c_0^x$ und entwickelt die Summen, so wird

$$\begin{aligned} D &= [\mathfrak{g}_x y_x] - [\mathfrak{g}_x]\, a_0 - [\mathfrak{g}_x c_0^x]\, b_0 = V - A a_0 - B b_0 \\ G &= [\mathfrak{g}_x c_0^x y_x] - [\mathfrak{g}_x c_0^x] a_0 - [\mathfrak{g}_x c_x^{2x}] b_0 = W - B a_0 - E b_0 \\ K &= [\mathfrak{g}_x x c_0^x y_x] - [\mathfrak{g}_x x c_0^x] a_0 - [\mathfrak{g}_x x c_0^{2x}] b_0 = Z - C a_0 - F b_0, \end{aligned} \tag{8}$$

und die Berechnung der neu auftretenden Summen

$$\begin{aligned} V &= [\mathfrak{g}_x y_x] \\ W &= [\mathfrak{g}_x c_0^x y_x] \\ Z &= [\mathfrak{g}_x x c_0^x y_x] \end{aligned} \tag{9}$$

geschieht mit Hilfe derselben Logarithmen wie jene von $A, B, \cdots$ und bietet wegen des gleichen Vorzeichens aller Glieder keine Schwierigkeit; zugleich ist die Berechnung der $y_x^{(0)}$ und Δ_x dadurch erspart.

Aus dem System der Normalgleichungen ermittelt man nun α, β, γ, aus letzterem γ' und hat nun in $a_0 + \alpha$, $b_0 + \beta$, $c_0 + \gamma'$ die endgültigen Koeffizienten der Ausgleichungsformel für $\mathfrak{y}_x$.

II. Noch einfacher aber gestaltet sich die Sache, wenn man an einem im voraus bestimmten Näherungswert c_0 von c festhält und die Fehlergleichung in der Form

$$y_x + \lambda_x = a + b c_0^x \tag{10}$$

ansetzt, in der sie bezüglich a, b linear ist[1]); dann ergeben sich zur Bestimmung von a, b mit Benutzung derselben Gewichte wie vorhin Normalgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b &= \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B} a + \mathfrak{E} b &= \mathfrak{G} \end{aligned} \tag{11}$$

und zwar ist:

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{g}_x] = A \qquad \mathfrak{B} = [\mathfrak{g}_x c_0^x] = B, \qquad \mathfrak{D} = [\mathfrak{g}_x y_x] = V$$
$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{g}_x c_0^{2x}] = E \qquad \mathfrak{G} = [\mathfrak{g}_x c_0^x y_x] = W,$$

so daß die Normalgleichungen mit den vorhin eingeführten Bezeichnungen lauten:

$$\begin{aligned} Aa + Bb &= V \\ Ba + Eb &= W \end{aligned} \tag{11*}$$

Benutzt man die hieraus gerechneten

$$a = \frac{EV - BW}{AE - B^2} \qquad b = \frac{AW - BV}{AE - B^2} \tag{12}$$

als Näherungswerte a_0, b_0 unter Beibehaltung des c_0, so kann nun eine zweite Näherung nach dem Verfahren I gerechnet werden; dabei behalten A, B, C, E, F, H ihre Werte bei, während sich, wie ein Blick auf die ersten zwei Gleichungen (8) und auf (11*) lehrt, D, G auf Null reduzieren, so daß nunmehr das Normalgleichungssystem für α, β, γ lautet:

---

1) Den Gedanken, vorerst die Konstante c zu bestimmen und dann zur Ermittlung der beiden andern die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, hat auch J. Graf methodisch entwickelt; seine Arbeit beschäftigt sich überdies mit der Empfindlichkeit der Formel in bezug auf die Konstanten s, g, c. Die Methode ist dann mit allen Details rechnerisch durchgeführt an dem Material der französischen Tafel AF (Ableben). Versicherungswissensch. Mitteil. I, Wien 1905. — Noch sei bemerkt, daß das Grafsche Verfahren auch bei der Herleitung der neuen Sterbetafel der „Generali“, die in Nr. 233 unter Fußnote 8), p. 142, angeführt ist, benutzt wurde.

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= 0 \\ B\alpha + E\beta + F\gamma &= 0 \\ C\alpha + F\beta + H\gamma &= K. \end{aligned} \tag{13}$$

Seine Auflösung geht am zweckmäßigsten so vor sich, daß man zuerst γ rechnet; es ist

$$\gamma = K \begin{vmatrix} A & B \\ B & E \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & E & F \\ C & F & H \end{vmatrix} = \Gamma K \quad \text{mit} \quad \Gamma = -\frac{A}{\frac{(AF - BC)^2}{AE - B^2} - (AH - C^2)}.$$

Das erste Gleichungspaar liefert dann

$$\beta = -\gamma \begin{vmatrix} A & C \\ B & F \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ B & E \end{vmatrix} = -\frac{AF - BC}{AE - B^2}\gamma,$$

und schließlich gibt die erste Gleichung

$$\alpha = -\frac{B\beta + C\gamma}{A}.$$

Die Rechnung bewegt sich also schließlich in einigen wenigen Zahlenkomplexen.

Wie man bemerkt, hängt die an c_0 anzubringende Korrektion von K ab; je kleiner K dem absoluten Betrage nach ausfällt, um so kleiner ist γ und schließlich γ'. Ergäbe sich insbesondere $K = 0$, so fände auch $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$ statt, d. h. der Prozeß II gäbe dann schon die definitive Ausgleichung. Man hat also in K eine Größe, die über die Güte der mit c_0 getroffenen Wahl Aufschluß gibt.

Nach dem eben entwickelten Verfahren, dessen Ausbildung von G. Rosmanith[1]) stammt, ist bei der österreichischen Sterblichkeitsmessung die Herstellung der ausgeglichenen Tafeln ausgeführt worden, und auch die ungarische Messung wird sich desselben bedienen. Für die Tafel M^S, der das umfangreichste Beobachtungsmaterial zugrunde liegt, ergaben sich die folgenden Parameterwerte:

[$k = 105\,979{,}9$, entsprechend der Grundzahl 100 000 bei dem Alter 20]

$$\begin{aligned} s &= 0{,}998\,070 \\ g &= 0{,}995\,894 \\ c &= 1{,}08074. \end{aligned}$$

1) Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten, I. Band, Wien 1907, p. 70—74; Versicherungswissensch. Mitteil. II, Wien 1906. An der letztgenannten Stelle hat G. Rosmanith eine kritische Vergleichung der verschiedenen Anwendungsarten der Makehamschen Formel zum Zwecke der Ausgleichung von Sterbetafeln gegeben; insbesondere ist dort die oben entwickelte Methode mit allen Einzelheiten an dem Material der Tafel $O^{M(5)}$ erläutert.

Der Anschluß der Formel an das Urmaterial möge nach der folgenden Tabelle beurteilt werden.

Altersgruppe	Erwartungsmäßige Todesfälle	Wirkliche Todesfälle	Abweichung
28—34	3252,4	3281	— 28,6
35—39	4601,3	4565	+ 36,3
40—44	6225,4	6229	— 3,6
45—49	7420,7	7448	— 27,3
50—54	8032,2	8083	— 50,8
55—59	8141,6	8327	— 185,4
60—64	7735,0	7482	+ 253,0
65—69	6835,0	6885	— 50,0
70—74	5147,2	5113	+ 34,2
75—79	3115,4	3161	— 45,6
80—84	1284,4	1337	— 52,6
85—90	238,1	242	— 3,9
Im ganzen	62028,7	62153	+ 323,5 — 447,8

244. Mechanische Ausgleichungsmethoden. Die mechanischen Ausgleichungsmethoden gehen von der Erwägung aus, daß die Störung eines Einzelwertes in einer Beobachtungsreihe sich auch noch in den beiderseits benachbarten Gliedern bemerkbar mache, daß jedoch eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit dafür bestehe, es werde eine längere Folge von Einzelwerten in gleichem Sinne beeinflußt sein; viel eher sei zu erwarten, daß sich durch den Wechsel des Sinnes auch in kürzeren oder längeren Abschnitten ein Ausgleich im Verlaufe der Erscheinung vollziehe. Auf den Fall des Absterbens angewendet heißt dies etwa folgendes: Wenn in einer Altersklasse zufällig mehr Personen gestorben sind, als es dem „normalen" Verhältnisse entspräche, so kann diese Übersterblichkeit wohl auch noch in den nächst benachbarten Altersklassen anhalten; es ist aber nicht anzunehmen, daß sie sich über eine längere Folge von Altersklassen beiderseits erstrecke, vielmehr ist zu erwarten, daß sie sehr bald wieder durch eine entsprechende Untersterblichkeit wett gemacht werde.

Aus diesen Erwägungen sind die verschiedenen Methoden hervorgegangen, die an der Bestimmung eines Einzelwertes der Reihe nicht bloß die ihm selbst entsprechende Beobachtung, sondern auch die zu beiden Seiten benachbarten Beobachtungen mitwirken lassen. Von diesem Verfahren verspricht man sich einerseits einen Ausgleich der zufälligen Störungen und ein besseres Hervortreten des Zusammenhanges der Erscheinung, andererseits eine größere Regelmäßigkeit in der Wertreihe. Wie weit das erste Ziel erreicht ist, darüber ist kein Aufschluß zu erlangen; über das Maß der Erreichung des zweiten Zieles belehrt der äußere Erfolg. Mag dieser aber noch so günstig sein, so kann er doch nur dann befriedigen, wenn der Gang der Be-

obachtungswerte gut gewahrt wird; die Entscheidung darüber ist allerdings bis zu einem gewissen Grade subjektiv.

Im folgenden werden einige mechanische Ausgleichungsmethoden vorgeführt, die sich in der Anwendung bewährt haben; im übrigen muß auf die Spezialliteratur verwiesen werden.[1])

a) Wittstein[2]) hat zum Zwecke der Ausgleichung einer Beobachtungsreihe $u_0, u_1, u_2, \cdots u_x, \cdots$ den Vorschlag gemacht, durch die ganze Reihe von je fünf aufeinander folgenden Gliedern das arithmetische Mittel zu nehmen und dieses an die Stelle des mittleren Gliedes der betreffenden Gruppe zu setzen; wird also das an die Stelle von u_x tretende „ausgeglichene" Glied mit u_x' bezeichnet, so setzt Wittstein:

$$u_x' = \frac{u_{x-2} + u_{x-1} + u_x + u_{x+1} + u_{x+2}}{5}. \tag{1}$$

Auf diese neue Reihe ist, wenn sie nicht befriedigen sollte, dasselbe Verfahren nochmals anzuwenden; dadurch ergibt sich der definitive Wert:

$$u_x'' = \frac{u'_{x-2} + u'_{x-1} + u'_x + u'_{x+1} + u'_{x+2}}{5}$$

$$= \frac{u_{x-4} + 2u_{x-3} + 3u_{x-2} + 4u_{x-1} + 5u_x + 4u_{x+1} + 3u_{x+2} + 2u_{x+3} + u_{x+4}}{25} \tag{2}$$

$$= 0{,}2u_x + 0{,}16(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}12(u_{x-2} + u_{x+2}) + 0{,}08(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}04(u_{x-4} + u_{x+4}).$$

Die Formel (1) verwendet fünf Werte und schreibt ihnen gleiche Gewichte zu; die Formel (2) rechnet mit neun Werten, denen sie ungleiche Gewichte beilegt und zwar um so kleinere, je weiter sie vom zentralen Werte abstehen. Die praktische Durchführung gestaltet sich einfach; (1) erfordert Summenbildung an der ursprünglichen Reihe

---

1) Siehe insbesondere die zusammenfassende Darstellung E. Blaschkes „Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen", Wien 1893; ferner des Verfs. „Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie", l. c., p. 243ff. — Eine von allgemeinen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der mechanischen Ausgleichungsmethoden, aus der sich die verschiedenen Ausgleichungsformeln als spezielle Fälle eines Grundproblems ergeben und die auch den Versuch macht, den Effekt einer solchen Ausgleichung mathematisch zu beurteilen, hat J. Altenburger in den Versicherungswissensch. Mitteil. III, Wien 1907 entwickelt. — Einen neuen analytischen Gedanken hat W. Wirtinger in die Auffassung und Darstellung der mechanischen Ausgleichungsmethoden eingeführt, indem er sie mit der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen in Verbindung brachte; dieser Gesichtspunkt von hohem Grade der Allgemeinheit gestattet auch die Berücksichtigung von Nebenbedingungen, die man den ausgeglichenen Werten aus praktischen Gründen etwa auferlegen will. Versicherungswissenschaftliche Mitteil. III, Wien 1907, p. 89—98.

2) Mathematische Statistik, Hannover 1867, p. 30.

allein, (2) verlangt nochmalige Summenbildung an der Reihe der Summen. Wittstein hat das Verfahren (l. c. p. 44—48) zur Ausgleichung der Bruneschen Erfahrungen[1]) verwendet.

Man beachte, daß bei einmaliger Anwendung der Wittsteinschen Regel (1) zwei Werte vom Anfang und vom Ende unausgeglichen bleiben und darum einer besonderen Behandlung bedürfen; bei zweimaliger Anwendung bleiben je vier Werte unerledigt, wovon aber je zwei schon eine erstmalige Ausgleichung erfahren haben.

b) Große Beachtung und Verbreitung hat das von W. S. Woolhouse[2]) angegebene Ausgleichungsverfahren gefunden. Es kann ebensowohl auf die Zahlen der Überlebenden, wie auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten wie überhaupt auf jede statistisch festgestellte Reihe angewendet werden; wir wollen daher allgemein von einer Reihe $u_0, u_1, u_2, \cdots u_x, \cdots$ sprechen und uns dieselbe graphisch aufgetragen denken.

Die Grundidee besteht in folgendem. Man konstruiere mittels der Reihe fünf Tafeln, die man auf nachstehende Beobachtungswerte stützt:

$$\begin{array}{llllll} u_0, & u_5, & u_{10}, & u_{15}, & \cdots & \text{die erste,} \\ u_1, & u_6, & u_{11}, & u_{16}, & \cdots & \text{die zweite,} \\ u_2, & u_7, & u_{12}, & u_{17}, & \cdots & \text{die dritte,} \\ u_3, & u_8, & u_{13}, & u_{18}, & \cdots & \text{die vierte,} \\ u_4, & u_9, & u_{14}, & u_{19}, & \cdots & \text{die fünfte,} \end{array}$$

die Zwischenwerte jedesmal interpolierend. Dadurch gewinnt man für jedes u_x fünf Werte, wovon einer der aus der Beobachtung selbst hervorgegangene ist, während die vier anderen der Interpolation entstammen. Das arithmetische Mittel dieser fünf Werte gilt als der „ausgeglichene" Wert.

Was die Interpolation anlangt, so wird sie auf Grund der Annahme durchgeführt, daß je drei aufeinander folgende Werte, wie u_0, u_5, u_{10}; u_5, u_{10}, u_{15} usw. eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden; geometrisch gesprochen heißt dies, die Interpolation geschieht nach einer Parabel

$$u = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \tag{3}$$

die durch die Endpunkte von drei aufeinander folgenden Ordinaten gelegt wird.

Um den ausgeglichenen Wert für u_x zu erhalten, werden solche Parabeln durch die fünf Punktetripel

---

1) Siehe Nr. 231.

2) Lond. Journ. Inst. Actuar. 15 (1870), p. 392 und ibid. 21 (1878), p. 37.

$$\begin{matrix} u_{x-7} & u_{x-2} & u_{x+3} \\ u_{x-6} & u_{x-1} & u_{x+4} \\ u_{x-5} & u_x & u_{x+5} \\ u_{x-4} & u_{x+1} & u_{x+6} \\ u_{x-3} & u_{x+2} & u_{x+7} \end{matrix}$$

gelegt; ordnet man das Koordinatensystem derart an, daß die Ordinatenachse mit u_x sich deckt, so sind diese Parabeln in der allgemeinen Gleichung:

$$u = \alpha_\nu x^2 + \beta_\nu x + \gamma_\nu \tag{4}$$

enthalten, wenn α_ν, β_ν, γ_ν aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_{x+\nu-5} &= \alpha_\nu(\nu-5)^2 + \beta_\nu(\nu-5) + \gamma_\nu \\ u_{x+\nu} &= \alpha_\nu \nu^2 + \beta_\nu \nu + \gamma_\nu \\ u_{x+\nu+5} &= \alpha_\nu(\nu+5)^2 + \beta_\nu(\nu+5) + \gamma_\nu \end{aligned} \tag{5}$$

bestimmt werden; für ν sind der Reihe nach die Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ zu setzen. Da nun γ_ν jeweilen die Ursprungsordinate der Parabel vorstellt, so stellt sich der ausgeglichene Wert von u_x dar durch:

$$u_x' = \frac{\gamma_{-2} + \gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{5}.$$

Aus dem System (5) erhält man aber

$$\gamma_\nu = \frac{\nu(\nu+5)}{50} u_{x+\nu-5} + \frac{(5-\nu)(5+\nu)}{25} u_{x+\nu} + \frac{\nu(\nu-5)}{50} u_{x+\nu+5},$$

und die Einführung dieses Wertes in die voranstehende Formel liefert:

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{1}{125}[25u_x + 24(u_{x-1}+u_{x+1}) + 21(u_{x-2}+u_{x+2}) + 7(u_{x-3}+u_{x+3}) \\ &\qquad + 3(u_{x-4}+u_{x+4}) - 2(u_{x-6}+u_{x+6}) - 3(u_{x-7}+u_{x+7})] \\ &= \frac{1}{5}[u_x + 0{,}96(u_{x-1}+u_{x+1}) + 0{,}84(u_{x-2}+u_{x+2}) \\ &\qquad + 0{,}28(u_{x-3}+u_{x+3}) + 0{,}12(u_{x-4}+u_{x+4}) \\ &\qquad - 0{,}08(u_{x-6}+u_{x+6}) - 0{,}12(u_{x-7}+u_{x+7})]; \end{aligned} \tag{6}$$

die Formel bezieht, mit Überspringung von u_{x-5} und u_{x+5}, 13 Werte in die Rechnung ein.

Bezeichnet man die Ordinaten der drei Punkte, durch welche die Parabel (3) gelegt wird, der Einfachheit halber mit y_{-1}, y_0, y_1 (so daß beispielsweise $y_{-1} = u_{x-5}$, $y_0 = u_x$, $y_1 = u_{x+5}$ ist), ihre ersten Differenzen mit Δy_{-1}, Δy_0, die zweite Differenz mit $\Delta^2 y_{-1}$, wird ferner y_0 in die Ordinatenachse verlegt und der Abstand zwischen y_{-1} und y_0 y_0 und y_1 als Einheit angenommen, so ergibt sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \alpha - \beta + \gamma \\ y_0 &= \gamma \\ y_1 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

durch Bildung von Differenzen und Auflösung:

$$\alpha = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}, \quad \beta = \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}, \quad \gamma = y_0;$$

in dieser Darstellung lautet also die von Woolhouse benützte Interpolationsformel:

$$y = y_0 + x \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2} \Delta^2 y_{-1}. \tag{7}$$

Das Woolhousesche Verfahren stellt den ausgeglichenen Wert als Zentralwert von 15 Gliedern der Reihe dar, läßt also je sieben Glieder vom Anfang und vom Ende unausgeglichen, für die in anderer Weise gesorgt werden muß; man hilft sich in verschiedener Weise, z. B. durch die Supposition, daß die fehlenden Glieder eine arithmetische Progression bilden, die sich an die ausgeglichenen Glieder mit derselben Differenz höchster Ordnung anschließt; durch Berechnung nach einer der Sterblichkeitsformeln, wenn es sich eben um die Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln handelt; durch Unterlegung einer ganzen Funktion entsprechend hohen Grades u. dgl. m.

G. Schaertlin[1]) hat den Gedanken des Verfahrens beibehalten, aber dahin vereinfacht, daß er statt nach Quinquennal- nach Triennalpunkten fortschreitet, den ausgeglichenen Wert also mittels der Parabeln aus den Punktetripeln

$$\begin{matrix} u_{x-4} & u_{x-1} & u_{x+2} \\ u_{x-3} & u_x & u_{x+3} \\ u_{x-2} & u_{x+1} & u_{x+4} \end{matrix}$$

bestimmt. Die Durchführung der Rechnung führt zu der Formel:

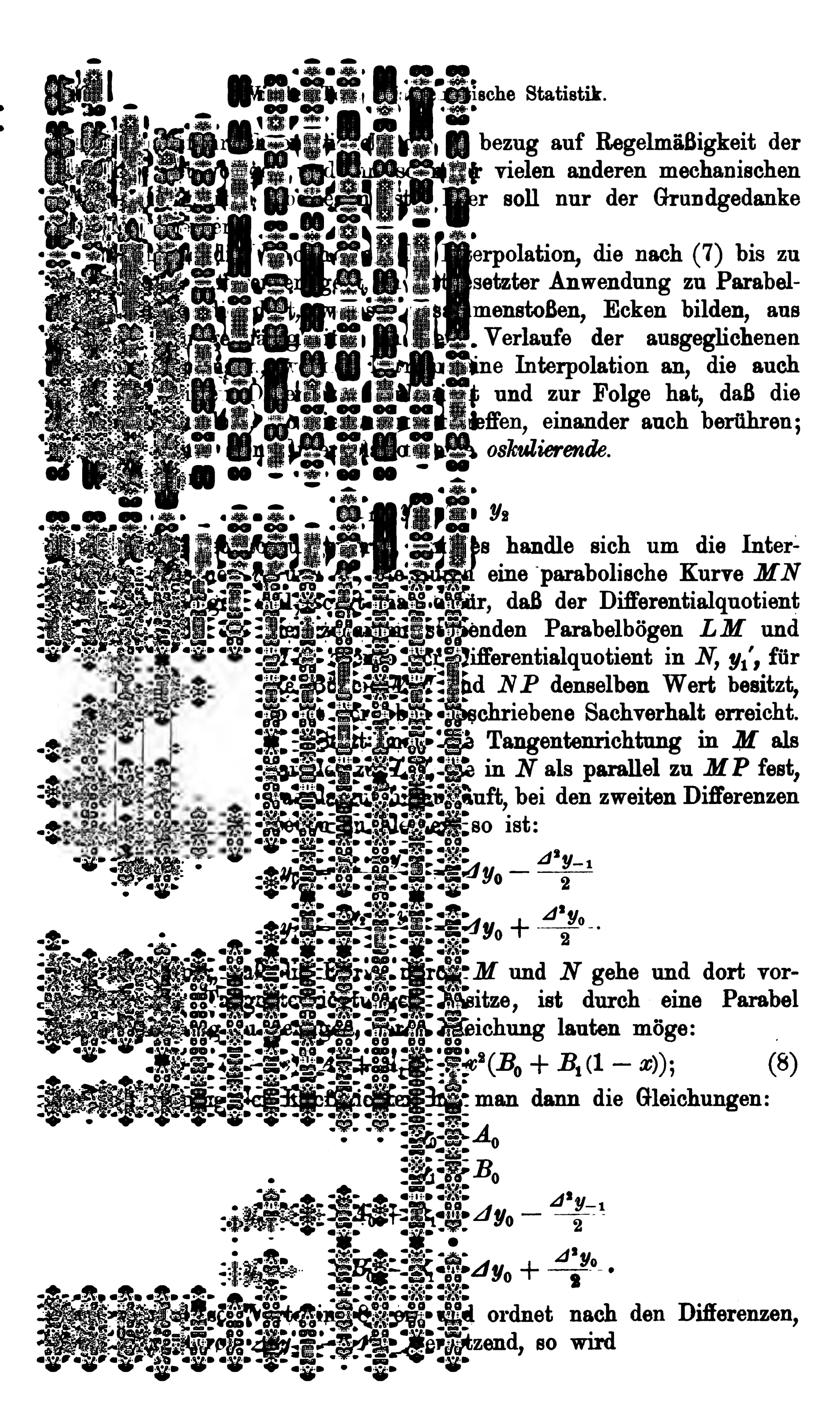
$$\left.\begin{aligned} u_x' &= \frac{1}{27}[9u_x + 8(u_{x-1} + u_{x+1}) + 2(u_{x-2} + u_{x+2}) - (u_{x-4} + u_{x+4})] \\ &= \frac{1}{3}[u_x + 0{,}\dot{8}(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}\dot{2}(u_{x-2} + u_{x+2}) - 0{,}\dot{1}(u_{x-4} + u_{x+4})]. \end{aligned}\right\} \tag{6*}$$

Dieselbe rechnet mit 7 Werten, indem sie die beiden u_{x-3}, u_{x+3} überspringt, und bietet den Vorteil, an beiden Enden nur vier unausgeglichene Werte übrig zu lassen; bei breiter Beobachtungsgrundlage dürfte sie genügende Gleichmäßigkeit herbeiführen.

c) In jüngster Zeit hat J. Karup[2]) eine neue Ausgleichungs-

1) Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77—1880/81 und 1880/81. Zeitschr. f. Schweizer. Statist. XXIII (1887), p. 332—333.

2) Transactions of the second Internat. Actuar. Congr. London 1898, p. 31 ff.



… bezug auf Regelmäßigkeit der … vielen anderen mechanischen … er soll nur der Grundgedanke …

… erpolation, die nach (7) bis zu … setzter Anwendung zu Parabel… menstoßen, Ecken bilden, aus … Verlaufe der ausgeglichenen … ine Interpolation an, die auch … und zur Folge hat, daß die … effen, einander auch berühren; … *oskulierende.*

… y_2

… es handle sich um die Inter… eine parabolische Kurve MN … ür, daß der Differentialquotient … enden Parabelbögen LM und … Differentialquotient in N, y_1', für … d NP denselben Wert besitzt, … schriebene Sachverhalt erreicht. … Tangentenrichtung in M als … in N als parallel zu MP fest, … uft, bei den zweiten Differenzen … so ist:

$$\ldots \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$\ldots \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}.$$

… M und N gehe und dort vor… sitze, ist durch eine Parabel … eichung lauten möge:

$$\ldots x^2(B_0 + B_1(1 - x)); \qquad (8)$$

… man dann die Gleichungen:

$$\ldots A_0$$

$$\ldots B_0$$

$$\ldots \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2}$$

$$\ldots \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}.$$

… d ordnet nach den Differenzen, … tzend, so wird

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{x^2(x-1)}{2}\Delta^3 y_{-1}. \qquad (9)$$

Von dieser Interpolationsformel, die mit ihrem letzten Gliede über (7) hinausgeht, macht Karup Gebrauch, im übrigen dem Gedankengange Woolhouse folgend. Es werden, um den ausgeglichenen Wert für u_x zu erlangen, auf Grund folgender Punktequadrupel Interpolationen nach Maßgabe der Formel (9) vollzogen:

$$\begin{array}{cccc} u_{x-6} & u_{x-1} & u_{x+4} & u_{x+9} \\ u_{x-7} & u_{x-2} & u_{x+3} & u_{x+8} \\ u_{x-8} & u_{x-3} & u_{x+2} & u_{x+7} \\ u_{x-9} & u_{x-4} & u_{x+1} & u_{x+6}; \end{array}$$

zwischen das mittlere Paar eines jeden Quadrupels wird der Wert von u_x eingeschaltet, und aus den vier so *berechneten* und dem *beobachteten* u_x wird das arithmetische Mittel als „ausgeglichener" Wert angenommen. Bei der Einschaltung in das erste Quadrupel treten an die Stelle von

$$y_{-1} \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2$$

und ihrer Differenzen

$$\begin{array}{ccccc} \Delta y_{-1} & & \Delta y_0 & & \Delta y_1 \\ & \Delta^2 y_{-1} & & \Delta^2 y_0 & \\ & & \Delta^3 y_{-1} & & \end{array}$$

die Werte u_{x-6}, u_{x-1}, u_{x+4}, u_{x+9} nebst ihren Differenzen, und aus y geht der erste eingeschaltete Wert von u_x hervor, indem man $x = \frac{1}{5}$ setzt, so daß er sich ausdrückt durch:

$$u_{x-1} + \frac{1}{5}\Delta u_{x-1} - \frac{2}{25}\Delta^2 u_{x-6} - \frac{2}{125}\Delta^3 u_{x-6};$$

ähnlich ergibt sich aus dem zweiten Quadrupel $\left(\text{mit } x = \frac{2}{5}\right)$ der zweite interpolierte Wert:

$$u_{x-2} + \frac{2}{5}\Delta u_{x-2} - \frac{3}{25}\Delta^2 u_{x-7} - \frac{6}{125}\Delta^3 u_{x-7},$$

weiter der dritte und vierte:

$$u_{x-3} + \frac{3}{5}\Delta u_{x-3} - \frac{3}{25}\Delta^2 u_{x-8} - \frac{9}{125}\Delta^3 u_{x-8}$$

$$u_{x-4} + \frac{4}{5}\Delta u_{x-4} - \frac{2}{25}\Delta^2 u_{x-9} - \frac{8}{125}\Delta^3 u_{x-9}.$$

Drückt man die Differenzen durch die Glieder der ursprünglichen

Reihe aus, so ergibt sich schließlich die Karupsche Formel[1]) für den ausgeglichenen Wert:

$$\begin{aligned} u_x' = 0{,}2000 u_x &+ 0{,}1824(u_{x-1} + u_{x+1}) + 0{,}1392(u_{x-2} + u_{x+2}) \\ &+ 0{,}0848(u_{x-3} + u_{x+3}) + 0{,}0336(u_{x-4} + u_{x+4}) \\ &- 0{,}0128(u_{x-6} + u_{x+6}) + 0{,}0144(u_{x-7} + u_{x+7}) \\ &- 0{,}0096(u_{x-8} + u_{x+8}) - 0{,}0032(u_{x-9} + u_{x+9}). \end{aligned} \tag{10}$$

Dieselbe greift auf neun Altersklassen vor und zurück mit Übergehung der Alter $x - 5$ und $x + 5$, benutzt also 17 Zahlen der Orignalreihe, ihnen nach außen hin abnehmende und schließlich sehr kleine Gewichte beilegend.

Über den äußeren Erfolg der Ausgleichung belehrt das graphische Auftragen der ausgeglichenen Werte oder die Bildung der Differenzenreihen.

Nachstehend ist eine Probe der Anwendung der bisher vorgeführten mechanischen Methoden auf eine Beobachtungsreihe, bestehend in Sterblichkeitsprozentsätzen (100-fachen Sterbenswahrscheinlichkeiten) mitgeteilt.

Beobachtungen: $H^{M(5)}$.[2])

Alter	Unausgeglichener Sterblichkeitsprozentsatz	Ausgeglichener Sterblichkeitsprozentsatz nach			
		Wittstein		Woolhouse	Karup
		Formel (1)	Formel (2)	Formel (6)	Formel (10)
20	0,51			0,833	0,827
21	0,90			0,966	0,944
22	1,11	0,938		1,028	1,024
23	1,71	1,048		1,071	1,064
24	0,46	1,092	1,014	1,082	1,068
25	1,06	1,084	1,026	1,051	1,051
26	1,12	0,906	1,017	1,006	1,023
27	1,07	1,002	0,990	0,994	0,993
28	0,82	1,000	0,995	0,970	0,968
29	0,94	0,958	0,959	0,946	0,946
30	1,05	0,910	0,947	0,920	0,927
31	0,91	0,924	0,929	0,917	0,917
32	0,83	0,944	0,926	0,926	0,918
33	0,89	0,908	0,944	0,923	0,930
34	1,04	0,942	0,969	0,943	0,956
35	0,87	1,000		1,000	0,994
36	1,08	1,052		1,035	1,035
37	1,12			1,070	1,072
38	1,15			1,107	1,099

1) Das von Karup l. c. angegebene neue Verfahren besteht aber nicht in einer Anwendung dieser Formel allein, sondern setzt sich aus drei Prozessen zusammen, und erst bei dem letzten kommt die Formel zur Geltung.

2) Über die Bedeutung dieses Zeichens vgl. man Nr. 231.

d) Eine eigenartige mechanische Ausgleichungsmethode, die sich durch besondere Einfachheit der Formeln auszeichnet und nach durchgeführten Proben zu sehr befriedigenden Resultaten führt, hat in letzter Zeit G. King[1]) angegeben. Der wesentliche Gang derselben besteht in Folgendem:

Durch ein Vorverfahren, das jetzt entwickelt werden soll und in dem das Neue der Methode liegt, werden Quinquennalglieder der auszugleichenden Reihe festgelegt, d. h. Glieder, deren Zeiger in bezug auf 5 kongruent sind. Nachdem dies geschehen, erfolgt die Einschaltung der übrigen Glieder durch oskulatorische Interpolation (siehe unter c), Formel (9)).

Das Vorverfahren gestaltet sich wie folgt.

Es sei

$$(u_x), \quad x = 0, 1, 2, \cdots \omega$$

die auszugleichende Reihe von äquidistanten Einzelwerten der Funktion u. Setzt man

$$\sum_x^{\omega} u_x = -y_x, \quad \text{also} \quad \sum_{x+1}^{\omega} u_x = -y_{x+1},$$

so wird

$$u_x = y_{x+1} - y_x. \tag{1}$$

Aus der so konstruierten Reihe der y_x hebe man Quinquennalglieder heraus[2]) und bilde dazu die aufeinanderfolgenden Differenzenreihen, etwa:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0, & & y_5, & & y_{10}, & & y_{15}, \cdots \\ & \Delta y_0, & & \Delta y_5, & & \Delta y_{10}, \cdots & \\ & & \Delta^2 y_0, & & \Delta^2 y_5, \cdots & & \\ & & & \Delta^3 y_0, \cdots & & & \\ \end{array}$$

. . . .

Dann ergibt sich, wenn man bei Differenzen fünfter Ordnung stehen bleibt:

$$y_{13} = y_0 + \binom{\frac{13}{5}}{1} \Delta y_0 + \binom{\frac{13}{5}}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\frac{13}{5}}{3} \Delta^3 y_0 + \binom{\frac{13}{5}}{4} \Delta^4 y_0 + \binom{\frac{13}{5}}{5} \Delta^5 y_0$$

$$= y_0 + 13 \frac{\Delta y_0}{5} + 52 \frac{\Delta^2 y_0}{5^2} + 52 \frac{\Delta^3 y_0}{5^3} - 26 \frac{\Delta^4 y_0}{5^4} + 36{,}4 \frac{\Delta^5 y_0}{5^5},$$

ebenso

---

1) Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VI. intern. Kongr. f. Versicher.-Wissensch., Wien 1909, I. 2, p. 1469—1488.

2) Die Wahl kann je nach dem Ausgangswerte in fünf Arten erfolgen, deren Ergebnisse sich im allgemeinen wenig von einander unterscheiden; sonst müßte der Erfolg entscheiden.

$$y_{12} = y_0 + 12\frac{\Delta y_0}{5} + 42\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} + 28\frac{\Delta^3 y_0}{5^3} - 21\frac{\Delta^4 y_0}{5^4} + 33{,}6\frac{\Delta^5 y_0}{5^5}$$

und daraus im Sinne der Gleichung (1)

$$u_{12} = \frac{\Delta y_0}{5} + 10\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} + 24\frac{\Delta^3 y_0}{5^3} - 5\frac{\Delta^4 y_0}{5^4} + 2{,}8\frac{\Delta^5 y_0}{5^5}.$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_0 &= \sum_0^\omega u_x - \sum_5^\omega u_x = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = w_0, \\ \Delta y_5 &= \sum_5^\omega u_x - \sum_{10}^\omega u_x = u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = w_5 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

so ist des weiteren

$$\Delta^2 y_0 = \Delta w_0, \cdots; \qquad \Delta^3 y_0 = \Delta^2 w_0, \cdots$$

und u_{12} schreibt sich dann:

$$\begin{aligned} u_{12} &= \frac{w_0}{5} + 10\frac{\Delta w_0}{5^2} + 24\frac{\Delta^2 w_0}{5^3} - 5\frac{\Delta^3 w_0}{5^4} + 2{,}8\frac{\Delta^4 w_0}{5^5} \\ &= 0{,}2 w_0 + 0{,}4\Delta w_0 + 0{,}192\Delta^2 w_0 - 0{,}008\Delta^3 w_0 + 0{,}000896\Delta^4 w_0; \end{aligned}$$

diese Formel erfährt eine beträchtliche Vereinfachung, wenn man darin w_0 und $\Delta^3 w_0$ ersetzt durch $w_{10} - 2\Delta w_0 - \Delta^2 w_0$, bzw. $\Delta^2 w_5 - \Delta^2 w_0$; es wird dann

$$u_{12} = 0{,}2 w_{10} - 0{,}008\Delta^2 w_5 + 0{,}000896\Delta^4 w_0,$$

was ohne nennenswerte Einbuße an Schärfe ersetzt werden kann durch den für die numerische Durchführung bequemeren Ausdruck

$$u_{12} = 0{,}2 w_{10} - 0{,}008\Delta^2 w_5 + 0{,}0009\Delta^4 w_0. \qquad (3)$$

Noch einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man bei der Entwicklung von y nur bis den Differenzen 3., also in den w nur bis zu den Differenzen 2. Ordnung fortschreitet; die dabei erzielte Genauigkeit ist völlig ausreichend bei außerordentlicher Vereinfachung der Rechnung. Es wird nämlich nunmehr

$$\begin{aligned} y_8 &= y_0 + \binom{\frac{8}{5}}{1}\Delta y_0 + \binom{\frac{8}{5}}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\frac{8}{5}}{3}\Delta^3 y_0 \\ &= y_0 + 8\frac{\Delta y_0}{5} + 12\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} - 8\frac{\Delta^3 y_0}{5^3}, \end{aligned}$$

ebenso

$$y_7 = y_0 + 7\frac{\Delta y_0}{5} + 7\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} - 7\frac{\Delta^3 x_0}{5^3},$$

woraus mit Rücksicht auf (1)

$$u_7 = \frac{\Delta y_0}{5} + 5\frac{\Delta^2 y_0}{5^2} - \frac{\Delta^3 x_0}{5^3} = \frac{w_0}{5} + 5\frac{\Delta w_0}{5^2} - \frac{\Delta^2 w_0}{5^3}$$

$$= 0{,}2 w_0 + 0{,}2 \Delta w_0 - 0{,}008 \Delta^2 w_0$$

und schließlich wegen $w_0 + \Delta w_0 = w_5$

$$u_7 = 0{,}2 w_5 - 0{,}008 \Delta^2 w_0 \tag{4}$$

folgt. Diese Formel, an der im folgenden festgehalten werden soll, läßt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Das Vorverfahren besteht also, wenn wir das Ergebnis zusammenfassen, in dem folgenden Prozeß: Man bildet durch Summierung fünfgliedriger Gruppen der u nach Vorschrift von (2) die w, nimmt von diesen die ersten und zweiten Differenzen und berechnet mit deren Hilfe nach Formel (4) die Quinquennalwerte der u.

An diese schließt sich dann die oskulatorische Interpolation nach Formel (9) unter c) an; damit ist die Ausgleichung beendet. Nur der Anfang und das Ende bedürfen einer besonderen Bearbeitung; denn die Formel (4) stellt einen Wert von u als Zentralwert von 15 Gliedern dar, das erste u, das nach ihr berechnet werden kann, ist also das achte vom Anfang, das letzte das achte vom Ende.

Zur Erprobung hat King das Verfahren auf das Material der Tafel O^M auf zwei Arten angewendet, die vom gewöhnlichen Wege derart abweichen, daß es sich empfiehlt, sie hier anzuführen.

Bei dem *ersten* Verfahren werden nicht die Sterbenswahrscheinlichkeiten, sondern ihre Elemente, die Zahlen der unter einjährigem Risiko gestandenen und der Toten, je für sich ausgeglichen und interpoliert, und aus den so gefundenen Werten erfolgt die Bestimmung der endgültigen q. Die Sache stellt sich also praktisch wie folgt dar: Aus der Reihe der rohen

$$E_{11}, E_{12}, E_{13}, \cdots E_{100}$$
$$\Theta_{11}, \Theta_{12}, \Theta_{13}, \cdots \Theta_{100}$$

werden die Summen

$$(E_{11} + \cdots + E_{15}),\ (E_{16} + \cdots + E_{20}),\ \cdots (E_{96} + \cdots + E_{100}),$$
$$(\Theta_{11} + \cdots + \Theta_{15}),\ (\Theta_{16} + \cdots + \Theta_{20}),\ \cdots (\Theta_{96} + \cdots + \Theta_{100})$$

gebildet, die in beiden Fällen mit $w_{11}, w_{16}, \cdots w_{96}$ bezeichnet sein mögen; an diesen Größen erfolgt die Differenzenbildung, wie dies aus dem folgenden Bruchstück zu ersehen ist.

E_x

x	w_x	Δw_x	$\Delta^2 w_x$
11	4683	+ 34115	+ 161386
16	38798	+ 195501	+ 145859
21	234299	+ 341360	⋮
26	575659	⋮	
⋮	⋮		

Θ_x

x	w_x	Δw_x	$\Delta^2 w_x$
11	15	+ 139	+ 819
16	154	+ 958	+ 1005
21	1112	+ 1963	⋮
26	3075	⋮	
⋮	⋮		

Daraus berechnet sich nach (4):

$$E_{18} = 0{,}2 \cdot 38798 - 0{,}008 \cdot 161386 = 6468{,}51$$
$$\Theta_{18} = 0{,}2 \cdot 154 - 0{,}008 \cdot 819 = 24{,}25$$

und hieraus schließlich

$$q_{18} = \frac{24{,}25}{6468{,}51} = 0{,}0037489;$$

auf diesem Wege findet man die Quinquennalreihen:

$$E_{18},\ E_{23},\ E_{28},\ \cdots E_{93}$$
$$\Theta_{18},\ \Theta_{23},\ \Theta_{28},\ \cdots \Theta_{93}$$
$$q_{18},\ q_{23},\ q_{28},\ \cdots q_{93}.$$

Um den Abschluß zu erhalten, macht King die Annahme, es sei 103 das höchste in ganzen Zahlen ausgedrückte Alter, das erreicht werden kann, also $q_{103} = 1$; alsdann handelt es sich noch um die Einschaltung von q_{98}. Aus der Entwicklung

$$q_{103} = q_{83} + \binom{4}{1} \Delta q_{83} + \binom{4}{2} \Delta^2 q_{83} + \binom{4}{3} \Delta^3 q_{83}$$

ergibt sich

$$\Delta^3 q_{83} = \frac{1}{4} \{q_{103} - q_{83} - 4\Delta q_{83} - 6\Delta^2 q_{83}\}$$

und alle Elemente zur Ausführung der rechten Seite sind bekannt; dann aber findet sich q_{98} nach der Formel

$$q_{98} = q_{83} + \binom{3}{1} \Delta q_{83} + \binom{3}{2} \Delta^2 q_{83} + \Delta^3 q_{83}. \tag{5}$$

Die Rechnung ergab (in Einheiten der 7. Dezimale geschrieben):

$10^7 q_{83} = 1773777 \quad 10^7 \Delta q_{83} = 677408 \quad 10^7 \Delta^2 q_{83} = 432185$

$10^7 q_{88} = 2451185 \quad 10^7 \Delta q_{88} = 1109593$

$10^7 q_{93} = 3560778$

$$10^7 \Delta^3 q_{83} = \frac{1}{4}\{10000000 - 1773777 - 4 \cdot 677408 - 6 \cdot 432185\} = 730870$$

$$10^7 q_{98} = 1773777 + 3 \cdot 677408 + 3 \cdot 432185 + 730870 = 5833426$$

$$q_{98} = 0{,}5833426.$$

Die Interpolation hat King nicht an den q_x selbst, sondern an deren Logarithmen vorgenommen; sie ergab die Werte q_{28} bis q_{98}; auf die Ergänzung am Anfang und Ende soll hier nicht eingegangen werden, nur über den Erfolg sei noch berichtet.

Die Vergleichung der nach den berechneten q_x zu erwartenden und der wirklich eingetretenen Todesfälle von $x = 10$ bis $x = 103$ führte zu Abweichungen (= Erwartung — Beobachtung), deren absolute Summe 4,5 beträgt, so daß die Rechnung 140909,5 Sterbefälle statt der 140905 beobachteten ergibt; die größte akkumulierte Abweichung tritt bei dem Alter 63 ein und beträgt 106,0, d. i. 0,13% der bis zu diesem Alter reichenden 80402 rechnungsmäßigen Todesfälle.

Das *zweite* von King eingeschlagene Verfahren stützt sich auf die unausgeglichenen q_x, deren Berechnung bei dem vorangeführten Vorgange gar nicht erforderlich ist, operiert aber wieder nicht an diesen selbst, sondern an den $\log (q_x + 0{,}1)$. Diese eigenartige Wahl ist deshalb getroffen, weil bei einigen Altern das rohe q_x gleich Null ist — $\log q_x$ wäre also ungeeignet — und weil bei ihr die Charakteristik, mit Ausschluß von $x = 103$, durchwegs -1 ist, so daß man nur mit den Mantissen zu operieren hat. Der Erfolg ist ein minder befriedigender, wenn auch an sich gut zu nennen; denn die absolute Summe der Abweichungen beträgt 18,0, und die größte akkumulierte Abweichung $-122{,}1$ bei dem Alter 38 macht $-0{,}85\%$ der bis zu diesem Alter reichenden 14570,9 rechnungsmäßigen Todesfälle aus.

245. Graphische Ausgleichung. Ein in der gesamten Beobachtungstechnik vielfach geübtes Verfahren, um den Zusammenhang zwischen zwei variabeln Größen x, y, über den eine Reihe von Beobachtungen vorliegt, zu tabellarisieren, besteht darin, daß man die zusammengehörigen Wertepaare durch Punkte in einem Koordinatensystem darstellt und nun eine Kurve verzeichnet, die dem Zuge der Punkte möglichst getreu folgt und ihnen „möglichst nahe“ liegt (s. Nr. 164). Die Kurve bewirkt dann nicht bloß eine „Ausgleichung“ der Beobachtungsfehler, sondern zugleich eine Interpolation des Zusammenhanges. Der Vorgang gründet sich einerseits auf die Voraussetzung, daß den Werten y, die aus der Beobachtung hervorgingen, zufällige Fehler anhaften, die also bald in dem einen, bald in dem andern Sinne wirken, andererseits auf die Vorstellung, daß zwischen x, y ein analytischer Zusammenhang bestehe, dem geometrisch eine Kurve entspricht.

Das graphische Verfahren ist nun auch zur Ausgleichung von Sterblichkeitsbeobachtungen benutzt worden, und man kann nicht sagen, daß es durch die fortschreitende Ausbildung der andern, zumal der mechanischen, Methoden zurückgedrängt wurde; es ist im Gegenteil in jüngster Zeit wieder stärker in Aufnahme gekommen, und zwar nicht nur bei kleineren Beobachtungszahlen, wo es das

allein passende ist, sondern auch bei breit angelegten Beobachtungen [Spragues[1]) Ausgleichung der Tafel $H^{M(5)}$].

Als Schattenseite des Verfahrens wird der Umstand hervorgehoben, daß es zeichnerische Geschicklichkeit und gute Beurteilungsgabe erfordere; ferner weist man darauf hin, daß ihm das Merkmal einer eigentlichen Methode insofern abgehe, als ein subjektives Moment zwischen Beobachtung und endgültiges Resultat trete: verschiedene Personen werden durch das Verfahren zu verschiedenen Ergebnissen gelangen. Diesem Einwurf könnte entgegengehalten werden, daß die Wahl unter den verschiedenen mechanischen Methoden auch ein subjektives Moment bedeute; nachdem sie getroffen, hängt das Resultat allerdings von der Person des Ausführenden nicht mehr ab.

Ein Vorteil der graphischen Ausgleichung muß aber darin erblickt werden, daß sie die Verwertung vorausgehender Erfahrungen gestattet und dadurch oftmals die Wiedergabe charakteristischer Nüancen in dem Verlaufe der Erscheinung ermöglicht, die durch eine mechanische Methode leicht verwischt werden können. Wo also Erfahrung und Geschicklichkeit vorhanden sind, kann das graphische Verfahren zu besseren Resultaten führen als irgend eine andere Methode.

Es sind auch verschiedene Vorschläge gemacht worden, welche darauf hinzielen, die Sicherheit des Verfahrens zu erhöhen, den Spielraum der Willkür zu begrenzen. Ein Mittel, von dem Gebrauch gemacht werden sollte, besteht darin, zu jedem empirischen Werte — als solchen denken wir uns die Sterbenswahrscheinlichkeit oder den Sterblichkeitsprozentsatz als die bisher bei der graphischen Ausgleichung ausnahmslos benutzte Funktion — ein Genauigkeitsmaß, etwa den mittleren oder den wahrscheinlichen Fehler (s. Nr. 164), zu berechnen und in das Diagramm zu beiden Seiten des zugehörigen Punktes einzutragen; durch Verbindung der einer- und anderseits gelegenen Punkte ergibt sich eine sogenannte Fehlerzone, über welche die Ausgleichskurve nicht hinaustreten soll, wenn bei keinem der ausgeglichenen Werte eine über jene Grenze hinausgehende Abweichung von dem wahren (oder normalen) Werte mit der hierzu gehörigen Wahrscheinlichkeit erwartet werden soll.

Ein anderes Mittel, von dem jedoch wegen der damit verbundenen Vermehrung der Beobachtungsarbeit nicht leicht Gebrauch gemacht werden dürfte, bestünde in einer Vermehrung der Altersabstufungen, für welche die Sterbenswahrscheinlichkeit (immer pro Jahr gerechnet) bestimmt wird. So sind bei der Konstruktion der Beamtenvereins-

1) Bezüglich seiner Ausbildung des graphischen Verfahrens vgl. London Journ. Inst. Actuar. 21 (1879), p. 445; ibid. 26 (1886), p. 77; ibid. 29 (1891), p. 59, 282.

tafel die Alter nach Monaten abgestuft und innerhalb eines Altersjahres zwölf Werte der Sterbenswahrscheinlichkeit bestimmt worden.[1])

Liegen über eine Beobachtungsreihe mehrere graphische Ausgleichungen vor, so läßt sich auch ein objektives Urteil über ihre relative Güte *im ganzen*, über den Grad ihrer Annäherung an die Beobachtungswerte gewinnen, und zwar durch die Bildung der Quadratsummen aus den Differenzen zwischen den rohen und den ausgeglichenen Werten, unter Berücksichtigung der Gewichte der der Ausgleichung unterworfenen Größen: Jenes Resultat, das zu der kleinsten Summe führt, darf unter den verglichenen als das beste bezeichnet werden [s. Nr. 164].[2]) Dieser Vorgang wird auch zu befolgen sein, wenn es sich um die Vergleichung der Ergebnisse analytischer und mechanischer Ausgleichungen an ein und demselben Beobachtungsmaterial handeln sollte.[3])

---

1) Siehe die Literaturnachweise in Nr. 233.

2) Vorgang J. Kaans, vgl. E. Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung etc., p. 51.

3) In zwei Abhandlungen, betitelt „Die Ausgleichung der doppelt abgestuften Tafel *LM* (Leipziger Gesellschaft, s. Nr. 246) vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Assekuranz-Jahrb. XXX (1909), p. 125—144, und „Ausgleichung und Wahrscheinlichkeitstheorie“, ibid. XXXI (1910), p. 160—185, hat F. Möller einen Weg zur Kritik der Ausgleichung von Sterbetafeln entwickelt, auf dem darüber entschieden werden soll, ob man sich durch eine vorgenommene Ausgleichung „der Wahrheit genähert“ habe, mit anderen Worten, ob nur die zufälligen Störungen der beobachteten Werte beseitigt worden seien. Zu dieser Prüfung werden die Abweichungen λ_x der unmittelbaren Sterblichkeitsquotienten $\mathfrak{q}_x$ von den ausgeglichenen q_x und die Gewichte g_x der ersteren verwendet; aus den auf das Gewicht 1 reduzierten Abweichungen $\lambda_x\sqrt{g_x}$ bestimmt Möller den mittleren Fehler der Gewichtseinheit nach einer der Formeln

$$\sqrt{\frac{[g_x\lambda_x\lambda_x]}{n-1}}, \qquad \sqrt{\frac{[g_x\lambda_x\lambda_x]}{n-u}},$$

wobei die erste dann gelten soll, wenn es sich um mechanische oder graphische Ausgleichung handelt, die zweite, wenn eine analytische Ausgleichung nach einer Funktion mit u Parametern vorliegt. Als theoretischen Wert dieses mittleren Fehlers findet er 1, das einemal aus der Annahme, die λ_x folgten dem Gaußschen Gesetz; das anderemal kommt er zu diesem Ergebnis dadurch, daß er in der Formel

$$\sqrt{\frac{[g_x\lambda_x\lambda_x]}{n}}$$

jedes λ_x durch die mittlere Abweichung $\sqrt{\frac{\mathfrak{q}_x(1-\mathfrak{q}_x)}{s}}$, g_x durch deren reziprokes Quadrat $\frac{s}{\mathfrak{q}_x(1-\mathfrak{q}_x)}$ ersetzt; beide Male hat das Resultat seinen Grund in dieser Art der Gewichtsbestimmung. Da die Gewichte bloße Relativzahlen sind, kann dem letzten Ausdruck für g_x ein beliebiger konstanter Faktor hinzugefügt werden; damit würde sich das Resultat ändern und bei gleicher Schlußfolgerung eben diesem Proportionalitätsfaktor gleich sein.

Der wesentlichste Einwand, der gegen die Arbeit zu erheben ist, bezieht

246. Ausgleichung zweifach abgestufter Tafeln. Durch die Einführung zweifach abgestufter Sterbetafeln ist die Aufgabe der Ausgleichung von Wertkomplexen, die nach zwei Argumenten geordnet sind, in den Vordergrund getreten.

Von den Methoden ihrer Lösung ist die eine, der analytischen Methode bei einfach abgestuften Reihen analog, zunächst ausgeschlossen. Sie bestände darin, für die Funktion

$$q_{[x-t]+t} = f(x, t),$$

die den Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeit nach erreichtem Alter und zurückgelegter Versicherungsdauer darstellen soll, einen analytischen Ausdruck zu supponieren und seine Parameter nach einem geeigneten Verfahren auf Grund der beobachteten Einzelwerte zu bestimmen. Die Auffindung einer Funktion, die dies im ganzen Bereiche von x und t, wie er gewöhnlich vorliegt, zu leisten imstande wäre, ist noch gar nicht versucht worden. Auch der Weg, den Bereich in entsprechende Teile zu zerlegen und für jeden Teil gesondert nach einer möglichst einfachen, etwa nach einer linearen (Ebene) oder quadratischen Funktion (Paraboloid) auszugleichen, verspricht wenig

---

sich auf die Auffassung des Problems der Ausgleichung. Welche Methode auch man wählen mag, bei keiner kann von einem Prinzip gesprochen werden, das auf eine Annäherung an die Wahrheit, auf Eliminierung der zufälligen Störungen allein hinwirken würde; man hegt die Erwartung, daß es so kommen werde, hat aber kein Mittel, darauf abzuzielen. Die einzige positive Basis für die Herstellung eines Endresultates sind die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse, von einer Ausgleichung muß daher in erster Linie gefordert werden, daß sie diese so gut als möglich wiedergibt, so weit dies mit der angestrebten Herstellung eines glatten Verlaufs verträglich ist. Ein Mittel, eine Annäherung an die mehr geahnte als definierbare Wahrheit zu erweisen, kann auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht geben.

Das Operieren mit mittleren Fehlern in dem oben verwendeten Sinne verbietet sich bei der Materie deshalb, weil es sich bei der Sterblichkeitsmessung nach der ganzen Art der Gewinnung des Materials — die Personen, die man in einer Altersklasse zusammenfaßt, stammen aus verschiedenen Geburtszeiten, unterscheiden sich auch in andern maßgebenden Umständen — nicht allein um zufällige, sondern sicher auch um systematische Störungen handelt.

Um noch auf ein weiteres Detail hinzuweisen: die Formel $\sqrt{\frac{[g_x \lambda_x \lambda_x]}{n-1}}$ hat hier keine Berechtigung; sie bezieht sich auf den Fall, wo zur Bestimmung *einer* wohldefinierten Größe n Beobachtungen verschiedenen Gewichts angestellt worden sind und wo man weiß oder mit Grund annehmen kann, daß die begangenen Fehler frei sind von einem systematischen Teil. Gegen die Formel $\sqrt{\frac{[g_x \lambda_x \lambda_x]}{n-u}}$ bei analytischer Ausgleichung wäre formal nichts einzuwenden.

Trotz der Abweisung, die Möller meiner Auffassung der Ausgleichung empirischer Zahlenreihen zuteil werden läßt, glaube ich von meiner Darstellung in Nr. 164 des I. Bandes und in diesem Paragraphen nicht abgehen zu sollen.

Erfolg. Bei einem so gearteten Vorgang wäre von einer eigentlichen *Flächenausgleichung* zu sprechen.

Ein der einfachsten mechanischen Methode, jener von Wittstein (Nr. 244, a)), nachgebildeter Vorgang besteht in Folgendem. Ist

$$u_{xy}; \quad x = 1, 2, \cdots m; \quad y = 1, 2, \cdots n$$

das auszugleichende System von Einzelwerten, so bestimme man den ausgeglichenen Wert u'_{xy} als arithmetisches Mittel aus dem beobachteten und den ihm in beiden Richtungen beiderseits benachbarten, also nach der Formel:

$$u'_{xy} = \frac{1}{5}\left\{u_{xy} + u_{x-1,y} + u_{x+1,y} + u_{x,y-1} + u_{x,y+1}\right\}. \qquad (1)$$

Unausgeglichen bleiben dabei die Randwerte, d. i. alle $u_{1,y}$, $u_{m,y}$, $u_{x,1}$, $u_{x,n}$.

Um eine Vorstellung von der Wirkung dieses einfachen Verfahrens zu geben, sei dasselbe angewendet auf den nachstehenden Ausschnitt aus der österreichischen Tafel $M^{[S]}$; es handelt sich dabei um Sterbenswahrscheinlichkeiten, die in Einheiten der 5. Dezimale ausgedrückt sind.

$10^5 q_{[x-t]+t}$

x	$t = 0$	1	2	3	4	5
30	310	426	584	678	563	608
31	383	544	733	661	636	653
32	344	499	618	593	691	678
33	337	553	649	759	754	869
34	398	603	780	692	728	687
35	409	638	610	721	773	869.

Die Ausgleichung gibt:

$10^5 q'_{[x-t]+t}$

x	$t = 1$	2	3	4
31	517	628	650	641
32	512	518	654	670
33	528	672	689	760
34	594	667	736	727.

Ein gleichmäßigeres Fortschreiten ist unverkennbar.

Die bisher an zweifach abgestuften Sterbetafeln ausgeführten Ausgleichungen können als *Ausgleichungen nach Kurven* bezeichnet werden; unter Bezugnahme auf die in Nr. 228 besprochene Fläche sind es die Kurven konstanter Versicherungsdauer, an welchen die Operation vorgenommen wurde *unter Bedachtnahme auf die Vorstellung,* daß die zu $t = 0, 1, 2, \cdots 9$ gehörigen Kurven auf einer stetig

ansteigenden Fläche zu liegen haben, die schließlich an der Kurve $q_x^{(10)}$ in eine Zylinderfläche übergeht — vorausgesetzt, daß man mit dem Ablauf von 10 Jahren die Wirkung der Auslese als erloschen annimmt.

In dieser Art ist die Ausgleichung der neuen Gothaer Bankliste von J. Karup[1]) ausgeführt, die die Auslesewirkung mit dem Ablauf von 7 Jahren als erloschen ansieht, ebenso die der neuen Tafeln der Leipziger Gesellschaft durch G. Höckner[2]); im übrigen ist in beiden Fällen von mechanischen (und graphischen) Ausgleichungsmethoden Gebrauch gemacht worden.

Bei der Ausgleichung der Tafeln $O^{[am]}$, $O^{[af]}$, $O^{[M]}$ der englischen Messung 1863—1893 hat Hardy aufs neue von der Makehamschen Formel Gebrauch gemacht, indem er die Schnittkurven, von welchen eben die Rede war, dieser Formel anpaßte; er mußte jedoch zu diesem Zwecke an der Formel eine Modifikation vornehmen, um den glatten, der Vorstellung vom Wachsen der Sterbenswahrscheinlichkeit mit der Zunahme der Versicherungsdauer entsprechenden Übergang von einer Kurve zur nächsten zu erzielen; denn die *unabhängige* Ausgleichung kann dies nicht leisten vermöge der großen Unregelmäßigkeiten, die mit der Zersplitterung des Materials notwendig verbunden sind. Die Modifikation kommt schließlich derart zum Ausdruck, daß in der Formel (3), Nr. 242, die Koeffizienten A', B' nicht mehr als Konstanten, sondern als Funktionen der Versicherungsdauer auftreten, so daß an die Stelle dieser Formel eine neue:

$$E \log p_{[x]+t} = A_t' + B_t' c^{x+t} \qquad (3^*)$$

kommt.[3])

1) Fußnote 6) zu Nr. 233, p. 142.

2) Fußnote 7) zu Nr. 233, p. 142.

3) Unter dem Titel: „Die exakte Ausgleichung der englischen Selekttafeln" hat A. Patzig in der Zeitschr. f. d. ges. Versich.-Wissensch., VIII (1908), p. 320 bis 369, eine Arbeit veröffentlicht, welche die Anwendung der Makehamschen Formel auf die Ausgleichung von zweifach abgestuften Tafeln behandelt, an dem von Hardy eingeschlagenen Verfahren Kritik übt und seinen wesentlichen Mangel in der Außerachtlassung der Gewichte erblickt, wodurch eine systematische Beeinflussung der ausgeglichenen Werte gegenüber den rohen Werten bewirkt werde. Der Verfasser nimmt nun die Rechnung von neuem auf, operiert ebenfalls an der Funktion (3*), führt die Ausgleichung an den einzelnen Kurven zuerst *unabhängig* aus und sucht schließlich die so berechneten A_0', A_1', $\cdots A_q'$; B_0', B_1', $\cdots B_q'$ durch eine Interpolationsformel zusammenzufassen, die er in der Gestalt einer ganzen Funktion zweiten Grades annimmt: $A_t' = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $B_t' = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$; dadurch soll ein Zusammenhang unter den Kurven und ein glatter Übergang von der einen zur andern erzielt werden. Alle Rechnungen werden nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Heranziehung *angenäherter* Gewichte ausgeführt. Der Erfolg der Ausgleichung ist durch die nachfolgende Tabelle nach demselben Prinzip dargestellt wie oben, die eingetragenen Zahlen bedeuten Einheiten der vierten Dezimale. Er ist ein wesentlich anderer

Um den Effekt der Ausgleichung an der Tafel $O^{[M]}$ zu zeigen, ist die folgende Tabelle bestimmt; sie gibt an, um wie viel die Sterbenswahrscheinlichkeit bei den Altern 25, 30, ⋯ 75 zunimmt, wenn diese Alter vom 1. zum 2., vom 2. zum 3., ⋯ vom 9. zum 10. Versicherungsjahr überschritten werden, und um wie viel sie dann noch wächst, wenn man nach Ablauf von 10 Jahren zu der um 10 Jahre abgestutzten Aggregattafel fortschreitet, die den Abschluß der zweifach abgestuften Tafel bildet. Aus der Tabelle ist einmal zu ersehen, wie allmählich und glatt die Kurven $q_{[x-t]+t}$ $(t = 0, 1, \cdots 9)$ ineinander und schließlich in die Kurve $q_x^{(10)}$ übergehen und wie in allen Altern mit fortschreitender Versicherungsdauer die Wirkung der Auslese sich abschwächt. Die Zahlen der Tabelle bedeuten Einheiten der fünften Dezimale.

$O^{[M]}$

Erreichtes Alter	$q_{[x-t]+t} - q_{[x-t+1]+t-1}$ für $t =$									$q_x^{(10)} - q_{[x-9]+9}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
25	176	61	34	26	24	23	22	22	21	10
30	181	65	37	30	26	25	24	24	22	11
35	188	72	43	34	30	29	27	26	24	12
40	199	82	51	42	37	34	32	30	28	13
45	217	98	65	53	47	43	39	36	33	16
50	245	122	86	71	63	56	51	45	42	19
55	288	160	119	100	87	77	68	61	54	25
60	356	218	170	144	124	110	95	84	74	33
65	461	309	248	211	183	159	138	119	104	47
70	621	448	368	315	270	234	202	174	149	66
75	864	659	548	469	403	346	297	254	217	96

und widerspricht den Vorstellungen, die man sich aus den unmittelbaren Beobachtungsdaten von der Sache bildet, hauptsächlich dadurch, daß der starke Einfluß der Selektion im Anfangsstadium der Versicherung fast völlig verwischt ist

$O^{[M]}$

Erreichtes Alter	$q_{[x-t]+t} - q_{[x-t+1]+t-1}$ für $t =$									$q_x^{(10)} - q_{[x-9]+9}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	8	8	6	5	5	.	.	.	.	.
35	9	7	7	6	4	4	3	1	1	0
40	10	8	7	6	5	4	3	2	2	0
45	10	8	8	7	5	5	4	3	2	1
50	11	10	9	8	6	6	5	4	3	2
55	13	11	10	10	9	7	7	6	4	4
60	15	14	12	12	12	10	9	9	7	7
65	.	.	.	.	.	15	13	13	12	11

III. Abschnitt. Invalidität und Sterblichkeit.

247. Begriff der Invalidität. Der Begriff der *Invalidität* ist kein an sich gegebener. Im Gebiete des Versicherungswesens hat er eine weitgehende Ausbildung erfahren. Die Begleiterscheinung, welche hier die Invalidität kennzeichnet, nach der sie geradezu beurteilt wird und auf die sich das wirtschaftliche Interesse richtet, ist die Herabminderung oder die gänzliche Aufhebung der *Erwerbsfähigkeit.*

Nach der *Verursachung* unterscheidet man *Unfallsinvalidität* und *Invalidität* schlechtweg; die letztere tritt als Folge des Alters oder von Krankheiten oder beider die Kräfte und Fähigkeiten herabmindernder Umstände ein. Bei der ersten Form bildet der Unfall den Anlaß zur Frage nach dem Vorhandensein der Invalidität; der Zeitpunkt seines Eintrittes dient zur Feststellung des Beginnes der Invalidität. Bei der zweiten Form bedarf es eines Willensaktes entweder von Seite der unmittelbar betroffenen oder seitens einer ihr übergeordneten Person, um die Frage nach der Invalidität hervorzurufen; die Beantwortung ist dann Sache einer im voraus festgesetzten Prozedur.

Nach dem *Zeitausmaße* kann die Invalidität eine *dauernde* oder eine *vorübergehende* sein. Sie kann gleich bei ihrer Feststellung als dauernd angenommen werden, gleichgültig, ob und in welchem Maße sich der Zustand der Person in bezug auf ihre Erwerbsfähigkeit im weiteren Verlaufe ändert. Die Invaliderklärung kann aber auch unter dem Vorbehalt geschehen, daß späterhin eine Einschränkung oder völlige Einstellung der an die Invalidität geknüpften Leistungen erfolgen kann, wenn gewisse Bedingungen sich einstellen.

Bei der Unfallsinvalidität wird zumeist auch der *Grad* unterschieden und nach der Einbuße an Erwerbsfähigkeit bemessen, welche Einbuße eben den von dem Unfall verursachten Schaden darstellt. Man spricht dann von *Vollinvalidität* und *Teilinvalidität*, je nachdem der Unfall den Verlust der ganzen vorher vorhanden gewesenen Erwerbsfähigkeit oder bloß eines Teiles derselben nach sich zog.

Nach der *Art des Erwerbes* werden zwei Formen der Invalidität unterschieden. Man spricht von *Berufsinvalidität*, wenn der Erwerb aus der Ausübung eines qualifizierten Berufs fließt, der eine besondere Ausbildung oder bestimmte Fähigkeiten erfordert; geht die Eignung für den Beruf durch irgendwelche Ursachen verloren, so tritt Berufsinvalidität ein, auch wenn die Voraussetzungen für eine andere Art des Erwerbes vorhanden sein sollten. Anders steht es um die *Arbeitsinvalidität*; diese gilt erst dann als eingetreten, wenn die Möglichkeit des Erwerbs durch irgendeine Arbeit, die man der Person nach ihrer ganzen Beschaffenheit zumuten kann, unter ein Mindestmaß herabgedrückt ist. Erfordert also die Feststellung der Berufsinvalidität lediglich die Beantwortung der Frage, ob die Fähigkeiten zu einer

klaglosen Erfüllung der Berufspflichten noch vorhanden sind oder nicht, so ist bei der Arbeitsinvalidität auch die Erwägung anderer Erwerbsmöglichkeiten notwendig als derjenigen, aus der die betreffende Person eben ausscheiden soll.

Ob es sich um Unfallsinvalidität oder um Invalidität aus andern Ursachen handelt, immer bleiben gewisse Entscheidungen zu treffen, die, mögen für sie noch so detailierte Bestimmungen getroffen sein, schließlich auch dem *freien Ermessen* einen gewissen Spielraum lassen. Hierin liegt eine Schwierigkeit für die Durchführung von Versicherungen, bei denen Invalidität mit im Spiele ist; all die angeführten Umstände erschweren es auch, Erfahrungen über Invalidität, die in einem bestimmten Personenkreise gemacht worden sind, auf einen andern, anscheinend unter analogen Verhältnissen stehenden Personenkreis zu übertragen. Da aber die Anwendung fremder Erfahrungen wenigstens in der Anfangsperiode eines Unternehmens unausweichlich ist, so ist sorgfältige Vergleichung des wirklichen Verlaufs der Ereignisse mit dem auf Grund jener Erfahrungen zu erwartenden unerläßlich.

Zur besseren Beleuchtung des Vorgeführten mögen einige gesetzliche Bestimmungen und Definitionen über Invalidität vorgeführt werden.

Das deutsche und das österreichische Unfallversicherungsgesetz unterscheiden nach einem Unfall, wenn er nicht tötlich verlaufen oder wegen Heilung der Folgen innerhalb einer bestimmten Frist aus der Entschädigungspflicht ausgeschieden ist, völlige Erwerbsunfähigkeit und teilweise Erwerbsunfähigkeit; der Grad der letzteren ist nach dem Maße der durch den Unfall herbeigeführten Einbuße an Erwerbsfähigkeit zu beurteilen. Zu vergleichen ist dabei die Erwerbsfähigkeit nach dem Unfalle mit jener, welche die betreffende Person vor dem Unfalle besaß, nicht also mit der eines „Normalarbeiters“. Die Taxierung soll, im Sinne des deutschen Gesetzes, nicht nach gewissen Normen für die einzelnen Arten vorkommender Verletzungen, sondern stets unter Würdigung der individuellen Verhältnisse des betreffenden Arbeiters geschehen. Der Erfolg dieser Bestimmungen richtet sich nach der Praxis ihrer Durchführung, die mit der Zeit und den ausführenden Personen sich ändern wird.

Das deutsche Invalidenversicherungsgesetz (vom 13. VII. 1899) definiert die Invalidität durch die sie begleitende Erwerbsunfähigkeit wie folgt: Als invalid gilt ohne Rücksicht auf das Alter derjenige Versicherte, „dessen Erwerbsfähigkeit infolge von Alter, Krankheit und anderen Gebrechen dauernd auf weniger als ein Drittel herabgesetzt ist. Dies ist dann anzunehmen, wenn er nicht mehr im Stande ist, durch eine seinen Kräften und Fähigkeiten entsprechende Tätigkeit, die ihm unter billiger Berücksichtigung seiner Ausbildung und seines bisherigen Berufs zugemutet werden kann, ein Drittel desjenigen

zu erwerben, was körperlich und geistig gesunde Personen derselben Art mit ähnlicher Ausbildung in derselben Gegend durch Arbeit zu verdienen pflegen."

Wie man sieht, läßt diese an Bestimmungen, deren jede ihre Tragweite hat, reiche Definition, die auf *Arbeits*invalidität hinzielt, ohne doch den Beruf ganz außer acht zu lassen, trotz aller ihrer Schärfe doch einen gewissen Spielraum bei der Entscheidung über das Vorhandensein von Invalidität.

Der österreichische Entwurf eines Gesetzes betreffend die Sozialversicherung rezipiert die deutsche Definition mit der Abänderung, daß dem Worte „dauernd" die nähere Bestimmung „voraussichtlich" vorangestellt und statt von „Tätigkeit" von „Lohnarbeit" gesprochen wird. Was den ersten Punkt anlangt, so entspricht er der weiteren, auch im deutschen Gesetz vertretenen Absicht, die Invalidität als erloschen zu betrachten, wenn wieder der entsprechende Grad von Erwerbsfähigkeit eingetreten ist. Was die zweite Divergenz anlangt, so scheint Tätigkeit umfassender zu sein als Lohnarbeit.

Das österreichische Privatbeamtengesetz bestimmt wie folgt: „Als erwerbsunfähig (invalid) ist derjenige anzusehen, welcher infolge eines körperlichen oder geistigen Gebrechens seinen bisherigen Berufspflichten nicht weiter zu obliegen vermag." Das wäre reine *Berufs*invalidität, wenn nicht die Einschränkung hinzukäme: „Auf Invaliditätsrente hat jedoch derjenige keinen Anspruch, welcher durch eine seinen *Arbeits*kräften entsprechende Beschäftigung einen die Invaliditätsrente übersteigenden Betrag, mindestens jedoch 600 K verdient".[1])

248. Wahrscheinlichkeiten, die aus Invalidität und Sterblichkeit hervorgehen. Eine Gesamtheit von Personen, die sich in den Dienst eines Berufes gestellt haben, erfährt im Laufe der Zeit durch verschiedene Ursachen Änderungen ihres Umfanges und ihrer Zusammensetzung, und zwar:

durch den Beitritt neuer Personen zu dem Berufe;

durch Entlassung und freiwilligen Austritt von Personen aus demselben;

durch den Eintritt der Dienstuntauglichkeit oder Invalidität;

durch Tod.

Fälle, wo infolge Aufhörens der Unfähigkeit Reaktivierung für den ursprünglichen Beruf erfolgt, sollen als Neueintritte behandelt werden.

Die Ursachen, welche Invalidität und Tod herbeiführen, sind un-

1) Eine sehr eingehende, alle Seiten der Materie beleuchtende Darstellung des Begriffs der Erwerbsunfähigkeit und mit ihm zusammenhängender Begriffe, wie sie sich im Gebiete der öffentlichen und der Privatversicherung ausgebildet haben, bietet die Schrift: H. Siefart, Der Begriff der Erwerbsunfähigkeit auf dem Gebiete des Versicherungswesens. 3. Aufl., Berlin 1908.

trennbar miteinander verbunden; Umstände, unter welchen in dem einen Falle Berufsunfähigkeit sich einstellt, können in einem andern Falle den Tod zur Folge haben; dieselben Ursachen, die die Kräfte für die Berufsausübung aufzehren, mindern auch die Lebenskraft herab und haben daher Einfluß auf die Sterblichkeit; ihre Wirkung macht sich also auch noch geltend, wenn nach erfolgter Invalidisierung der weitere Einfluß des Berufes aufhört.

Die Todesfälle sind zu unterscheiden in solche, die im Zustande der Aktivität eintraten, und in solche, von welchen Invalide betroffen worden sind. Die Unterscheidung kann mitunter von formalen Momenten abhängen. Es kann einem Todesfalle tatsächlich Invalidität vorangehen, ohne daß er der Kategorie der Invaliden beigezählt würde, weil die Dienstuntauglichkeit nicht ausgesprochen und die Ausscheidung aus dem Berufe nicht vollzogen wurde.

Wenn man sich vorstellt, daß mit der Beobachtung in einem Augenblicke begonnen wurde, wo nur Berufsfähige, Aktive, vorhanden waren, so wird nach Ablauf einer Zeit der Bestand sich trennen in Diensttaugliche und in Dienstuntaugliche, *Aktive* und *Invalide.* Die weitere Beobachtung kann sich dann beziehen auf den ganzen *gemischten* Bestand, auf die Aktiven allein und auf die Invaliden allein.

Auf den gemischten Bestand und die Aktiven wirken Invalidisierung und Sterblichkeit zugleich; auf die Invaliden nur (die ihnen eigentümliche) Sterblichkeit. Daß zwischen der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden unterschieden werden muß, geht aus der Erwägung hervor, daß aus der Tatsache des Eintrittes der Berufsunfähigkeit auf einen höheren Grad der Verminderung der Lebenskraft zu schließen ist als bei den Aktiven desselben Alters.

Die Erscheinungen, welche sich bei der Beobachtung nach (einjährigen) Altersklassen dem Vorausgeschickten zufolge einstellen können, führen zu einer Reihe von Wahrscheinlichkeitsbegriffen, unter der Voraussetzung allerdings, daß die Bedingungen, welche dem ganzen Erscheinungskomplex zugrunde liegen, den Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt zulassen (s. Nr. 192 u. 202). Weitgehende Erwartungen nach dieser Richtung sind bei der Natur der Materie wohl nicht am Platze.[1])

Die für das betrachtete Erscheinungsgebiet maßgebenden Wahrscheinlichkeiten sind nun die folgenden:

p_x^{aa} die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, das Alter $x+1$ aktiv zu erleben;

1) Ein Ansatz zur Untersuchung der Dispersion von Invaliditätsquotienten findet sich bei E. Blaschke, Vorles. über math. Statist., p. 144—145; darnach kommt die Dispersion einiger der bekannten Erfahrungsdaten in den Altern von 20 bis etwa 55 der normalen ziemlich nahe.

q_x^{aa} die Wahrscheinlichkeit für denselben, vor Erreichung dieses Alters als Aktiver zu sterben;

p_x^{ai} die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, das Alter $x+1$ als Invalide zu erleben;

q_x^{ai} die Wahrscheinlichkeit für denselben, vor Erreichung dieses Alters nach eingetretener Invalidität zu sterben;

w_x die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, vor Erreichung des Alters $x+1$ dienstuntauglich zu werden (*Invaliditätswahrscheinlichkeit*);

α_x die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, vor Erreichung des Alters $x+1$ aus der Gruppe der Aktiven, sei es durch Invalidität, sei es durch Tod, auszuscheiden (*Ausscheidewahrscheinlichkeit*);

p_x^{ii}, q_x^{ii} die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen Invaliden;

p_x^{a}, q_x^{a} die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit schlechtweg eines x-jährigen Aktiven;

p_x, q_x die Lebens-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen aus dem gemischten Bestande (*allgemeine* Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit).

Von diesen Wahrscheinlichkeiten bedürfen die beiden ersten einer näheren Erklärung, weil ihnen verschiedene Deutung zu Teil wurde. Hier soll q_x^{aa} das Verhältnis der Sterbefälle unter den Aktiven auf der Altersstufe $(x, x+1)$ zu der Zahl der Aktiven des Alters x, und p_x^{aa} das Verhältnis der Zahl der Aktiven, welche das Alter $x+1$ erleben, zur Zahl der Aktiven des Alters x bedeuten, von Ein- und Austritten abgesehen. G. Behm[1]) hingegen dachte im Sinne einer von Wittstein[2]) zuerst entwickelten Anschauung bei q_x^{aa} an eine Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven, die sich einstellen würde, wenn deren Herabminderung nur durch den Tod und nicht auch durch Invalidisierung erfolgte, unter der künstlichen Vorstellung also, daß jeder wegen Dienstuntauglichkeit aus der Gruppe der Aktiven Ausscheidende durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt werde.

249. Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeiten und Gewinnung der letzteren aus den Beobachtungen. Die auf Invalidität und Sterblichkeit bezüglichen Wahrscheinlichkeitsgrößen, ihre gegenseitige Abhängigkeit und ihre Ableitung aus Beobachtungen waren in den letzten Dezennien Gegenstand vielfacher Studien und lebhafter Kontroversen. Bot es schon Schwierigkeiten, alle hier maßgebenden Größen zu erkennen und so zu definieren, daß

1) Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverh. bei dem Beamtenpersonal der Deutschen Eisenbahnverwaltungen. Berlin 1876, p. 14.

2) Archiv f. Math. u. Phys. 39 (1862), p. 267 ff.

sie der empirischen Bestimmung zugänglich werden, so blieb noch die Aufdeckung der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen und ihre richtige Einfügung in das System der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine Arbeit übrig, die nicht gleich gelingen konnte[1]).

Die folgende Darstellung folgt dem Gedankengange H. Zimmermanns (l. c.), der seiner Natürlichkeit wegen und vermöge des Anschlusses an die Beobachtungsdaten sich besonders empfiehlt.

An Beobachtungsdaten werden vorausgesetzt:

A Anzahl der Aktiven eines bestimmten Alters x,
P Anzahl der Invaliden desselben Alters

am Beginne des Beobachtungsjahres;

J Anzahl der aus A hervorgegangenen Invaliden;
S_1 Anzahl der im aktiven,
S_2 Anzahl der im invaliden Zustande Gestorbenen

im Laufe des Beobachtungsjahres.

Bei A und P ist bereits die Einbeziehung der im Laufe des Jahres erfolgten Ein- und Austritte (s. Nr. 232) vorausgesetzt, so daß A, P *rechnungsmäßige* Größen bedeuten (die hierfür übliche Ausdrucksweise: unter einjähriger Beobachtung gestandene Aktive, respektive Invalide).

---

1) Es seien hier angeführt:

A. Wiegand, Mathematische Grundlagen der Eisenbahnpensionskassen. Halle 1859.

A. Wiegand, Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheitsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten in den Jahren 1868—1869. Journ. d. Colleg. für Lebensvers.-Wissensch. 2 (1861), p. 67.

G. Behm, Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der Deutschen Eisenbahnverwaltungen 1868 bis 1873. Berlin 1876.

H. Zimmermann, Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Im Auftrage des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen. Berlin 1886—1889. (Von 1887 ab unter dem Titel: Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, und unter diesem Titel 1890 fortgesetzt von A. Zillmer.)

Die letztgenannten drei Publikationen haben wesentlich beigetragen zur Entwicklung der hierher gehörigen Theorien und zur Schaffung wertvoller Erfahrungsresultate.

Einen bemerkenswerten Ansatz zur Begründung der Theorie der Invalidität hat G. Zeuner, Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik, Leipzig 1869, zweite Abhandl., gemacht; zum Ausgangspunkte nahm er die in Nr. 232 abgeleitete Formel (11), den Vorgang der Invalidisierung als Austritt aus einer geschlossenen Gesellschaft auffassend, zu der keine Beitritte erfolgen. Gleich seinen Vorgängern unterscheidet er nicht zwischen der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden, identifiziert vielmehr beide mit der allgemeinen Sterblichkeit, ohne es aber zu unterlassen, auf diesen Umstand aufmerksam zu machen, zu dessen Beachtung damals eine praktische Möglichkeit nicht vorhanden war. Zeuners Formeln sind aufs neue abgeleitet und mit jenen G. Behms in Vergleich gestellt worden von W. Küttner, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 25 (1880), p. 11—24, woselbst auch die J. Karupschen Anschauungen über den Gegenstand zur Sprache gebracht werden.

Ohne weitere Erklärung ist zu erkennen, daß das Verhältnis $\frac{S_1}{A}$ eine empirische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, als Aktiver zu sterben, und das Verhältnis $\frac{J}{A}$ eine Bestimmung der Invaliditätswahrscheinlichkeit ergibt; wir setzen daher

$$q_x^{aa} = \frac{S_1}{A}, \tag{1}$$

$$w_x = \frac{J}{A}. \tag{2}$$

Da von den A Aktiven des Alters x im Laufe des Jahres S_1 durch Tod, J infolge von Dienstuntauglichkeit abgehen, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen, das Alter $x+1$ aktiv zu erleben:

$$p_x^{aa} = \frac{A - S_1 - J}{A} = 1 - q_x^{aa} - w_x; \tag{3}$$

mithin ist $p_x^{aa} + q_x^{aa} = 1 - w_x$.

Die S_2 Todesfälle unter den Invaliden stammen nicht allein aus den P Invaliden, die am Beginne des Jahres vorhanden waren, sondern teilweise auch aus den J im Laufe des Jahres invalid gewordenen; diese, als allmählich hinzutretend, können für den Beginn des Jahres nur mit einem Bruchteile, θJ, angesetzt werden, so daß

$$q_x^{ii} = \frac{S_2}{P + \theta J}; \qquad (0 < \theta < 1) \tag{4}$$

da bei den Invaliden neben leben oder sterben ein drittes ausgeschlossen ist (von dem Falle der Reaktivierung für den ursprünglichen Beruf wird abgesehen), so ist

$$p_x^{ii} = \frac{P + \theta J - S_2}{P + \theta J} = 1 - q_x^{ii}. \tag{5}$$

Daraus ergibt sich

$$S_2 = P q_x^{ii} + \theta J q_x^{ii}.$$

Beachtet man in dieser Formel, daß $P q_x^{ii}$ die aus den ursprünglich vorhandenen Invaliden hervorgegangenen Sterbefälle bedeutet, so folgt daraus, daß $\theta J q_x^{ii}$ die Sterbefälle unter den im Laufe des Jahres invalid gewordenen vorstellt; diese Sterbefälle drücken sich aber auch durch $A q_x^{ai}$ aus; folglich ist

$$A q_x^{ai} = \theta J q_x^{ii},$$

woraus

$$q_x^{ai} = \theta w_x q_x^{ii}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist wie folgt als Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses zu deuten: w_x ist die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des Jahres invalid zu werden, und θq_x^{ii} die Wahrscheinlichkeit, nach dem Invalidwerden und vor Schluß des Jahres zu sterben.

Da von den J dienstuntauglich erklärten $\theta J q_x^{ii}$ noch vor Ablauf des Jahres starben, so verblieben $J - \theta J q_x^{ii}$ am Leben; diese Anzahl ist aber auch durch $A p_x^{ai}$ gegeben, so daß

$$A p_x^{ai} = J(1 - \theta q_x^{ii});$$

daraus bestimmt sich

$$p_x^{ai} = w_x(1 - \theta q_x^{ii}) = w_x - q_x^{ai}, \tag{7}$$

weshalb $p_x^{ai} + q_x^{ai} = w_x$ und vermöge (3): $p_x^{aa} + q_x^{aa} + p_x^{ai} + q_x^{ai} = 1$ ist.

Von den A Aktiven zu Jahresanfang sterben $A q_x^{an}$ als Aktive, $A q_x^{ai}$ als Invalide; die Anzahl aller dieser Todesfälle kommt auch gleich dem Produkt $A q_x^a$; daher ist

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai} = q_x^{aa} + \theta w_x q_x^{ii}. \tag{8}$$

In den Beobachtungsgrößen ausgedrückt ist also

$$p_x^a = \frac{S_1}{A} + \theta \frac{J}{A} \frac{S_2}{P + \theta J} = \frac{P S_1 + \theta J (S_1 + S_2)}{A(P + \theta J)}.$$

Durch einen ähnlichen Schluß ergibt sich

$$p_x^a = p_x^{aa} + p_x^{ai} = 1 - q_x^{aa} - w_x + w_x(1 - \theta q_x^{ii}) = 1 - q_x^a, \tag{9}$$

wie es sein muß, weil es außer den zwei Ereignissen, auf die sich p_x^a, q_x^a beziehen, eine dritte Möglichkeit nicht gibt.

Für die Ausscheidewahrscheinlichkeit α_x gilt der Definition gemäß der Ansatz:

$$\alpha_x = q_x^{aa} + w_x = 1 - p_x^{aa} = \frac{S_1 + J}{A}. \tag{10}$$

Um endlich die Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit für den gemischten Bestand zu erhalten, hat man zu beachten, daß dieser Sterbenswahrscheinlichkeit q_x die Gesamtheit der beobachteten Sterbefälle entspricht, daß also

$$\begin{aligned}(A + P) q_x &= S_1 + S_2 \\ &= A q_x^{aa} + P q_x^{ii} + \theta A w_x q_x^{ii} \\ &= A q_x^a + P q_x^{ii};\end{aligned}$$

daraus bestimmt sich

$$q_x = \frac{A q_x^a + P q_x^{ii}}{A + P}; \tag{11}$$

p_x, als Komplement hierzu, erhält zufolge (5) und (9) den Ausdruck:

$$p_x = \frac{A p_x^a + P p_x^{ii}}{A + P}. \tag{12}$$

Es stellt sich sonach q_x als arithmetisches Mittel aus q_x^a und q_x^{ii}, ebenso p_x als arithmetisches Mittel aus p_x^a und p_x^{ii} dar, wenn man diesen Zahlen die Gewichte A, P beilegt.

In den Formeln befindet sich noch der unbestimmt gelassene echte Bruch θ, dessen Einführung gelegentlich der Aufstellung von q_x^{ii} erfolgte. Man gelangt nun mit Hilfe der folgenden Hypothese zu einer zureichenden Approximation dieses Bruches: Sowohl die Sterbefälle unter den Invaliden, wie auch die Invalidisierungen der Aktiven bilden einen stetigen Vorgang, der sich über die Altersstufe gleichförmig verteilt. Danach drückt sich die Anzahl der in dem Altersintervall $(x+t,\, x+t+dt)$, wobei t und $t+dt$ zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten, erfolgenden Invalidisierungen durch Jdt, die Anzahl der aus diesen Invaliden bis zum Schlusse des Jahres resultierenden Sterbefälle durch $(1-t)\, q_x^{ii} Jdt$ aus; folglich sterben von den im Altersjahre $(x, x+1)$ invalid gewordenen noch im Laufe desselben im ganzen

$$\int_0^1 (1-t)\, q_x^{ii} J dt = q_x^{ii} J \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2}\, q_x^{ii} J;$$

hierzu die $q_x^{ii} P$ Sterbefälle aus den anfänglich vorhandenen Invaliden, gibt

$$S_2 = q_x^{ii} P + \frac{1}{2} q_x^{ii} J,$$

woraus

$$q_x^{ii} = \frac{S_2}{P + \frac{1}{2} J}. \tag{4*}$$

Die Hypothese führt also zu $\theta = \frac{1}{2}$, und diesen Wert kann man auch beibehalten. Hiermit lautet insbesondere die Formel (6):

$$q_x^{ai} = \frac{1}{2}\, w_x q_x^{ii}. \tag{6*}$$

250. Tafeln, in welchen Invalidität und Sterblichkeit zum Ausdruck kommen. Aus statistischen Erhebungen, wie sie zu Beginn der vorigen Nummer vorausgesetzt worden sind, können verschiedene Tabellen konstruiert werden, in welchen die Wirkung der Invalidität oder der Sterblichkeit oder beider Momente zugleich zum Ausdruck kommt. Solche Tafeln sind namentlich aus den statistischen Erhebungen, die der Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen in betreff seines großen Personales in dem Zeitraume 1868—1889 vornehmen ließ, wiederholt abgeleitet worden; neben der wirtschaftlich-praktischen Bedeutung kommt diesen Tafeln auch ein hervorragendes allgemeines Interesse zu. Da sie bereits vielfache Verwendung gefunden haben und die Grundlage für neue Tabellenarbeiten geworden sind, wird es nicht unzweckmäßig sein, sie hier anzuführen und den Gang ihrer Konstruktion anzudeuten.

a) *Invalidensterbetafel.* Ist P die rechnungsmäßige Anzahl der Dienstunfähigen eines bestimmten Alters x, abgeleitet aus denjenigen, welche dieses Alter unter Beobachtung überschritten, und jenen, welche nach Erreichung dieses Alters und vor dem Alter $x+1$ in die Beobachtung eintraten, sowie jenen, welche auf dieser Altersstufe aus der Beobachtung ausschieden; ist ferner S_2 die Anzahl der zwischen diesen Altersgrenzen unter den Dienstunfähigen beobachteten Todesfälle, so berechnet sich aus diesen Daten:

$$q_x^{ii} = \frac{S_2}{P}.$$

Mit Hilfe der Reihe dieser Wahrscheinlichkeiten wird eine Abfallsordnung der Invaliden gebildet, welche bei einem Alter x, wo von Invaliden bereits gesprochen werden kann, mit einer willkürlich gewählten runden Zahl l_x^i beginnt; ihre Zahlen ergeben sich nach dem Schema:

$$\begin{aligned} &l_x^i, \\ &l_{x+1}^i = l_x^i - q_x^{ii} l_x^i \\ &l_{x+2}^i = l_{x+1}^i - q_{x+1}^{ii} l_{x+1}^i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

die Subtrahenden bezeichnen dabei die sukzessiven Sterbefälle unter den Invaliden. Nach dieser Arbeit erübrigt die Ausgleichung der Tafel und eine womöglich auf begründete Erfahrung gestützte Beseitigung offenkundiger, aus der Unvollkommenheit der Beobachtungen zu erklärender Unregelmäßigkeiten.

Aus den Erfahrungen des Zeitraumes 1868—1884 hat H. Zimmermann[1]) eine Invalidensterbetafel abgeleitet, die sich auf

109778 Personen unter einjähriger Beobachtung und
6594 Todesfälle

stützt. Die Erfahrungen das Zeitraumes 1868—1889 mit

209548 Personen unter einjähriger Beoachtung und
12375 Todesfällen

haben wiederholte Bearbeitung gefunden u. zw. durch H. Bentzien[2]) C. Kihm[3]) und A. Riedel.[4])

Die Daten der Zimmermannschen Bearbeitung, die u. a. auch dem österreichischen Privatbeamten-Versicherungsgesetz von 1906 zugrundegelegt wurde, sind aus den ersten drei Kolonnen der Tafel X am Ende des Buches zu entnehmen.

1) Über die Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Berlin 1886, p. 100—101.

2) Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen 20 (1892), p. 119—127.

3) Zeitschr. f. schweizerische Statistik, Jahrg. 1896.

4) Assekuranzjahrbuch XXVIII, Wien 1907, p. 217—219.

Zu bemerken ist noch, daß diese Tafeln strenge genommen das Absterben von Pensionierten statt von Invaliden darstellen, da auch solche Fälle einbezogen wurden, wo die Pensionierung aus andern Gründen als wegen Dienstunfähigkeit erfolgte. Der Prozentsatz dieser Personen ist aber ein so geringer (etwa 6%), daß sie die Bedeutung der Tafel wenig alterieren.

Bei der Invalidensterblichkeit macht sich der Einfluß der seit der Invalidisierung verstrichenen Zeit geltend, aber in entgegengesetztem Sinne als die Versicherungsdauer bei der Sterblichkeit von Versicherten: es findet nämlich eine *Abnahme* der Sterblichkeit statt, die nach den hierüber in neuerer Zeit, seit Einführung der reichsdeutschen Invalidenversicherung, angestellten Untersuchungen auf den Abfall der durch Krankheit geschwächten Individuen zurückzuführen ist, der sich insbesondere in den jüngeren Altersklassen in stärkerem Maße einstellt. An einer späteren Stelle, in Nr. 294, wird auf die Abhängigkeit der Invalidensterblichkeit von der Invaliditätsdauer näher eingegangen.

Eine Zusammenstellung der in Deutschland in dem Zeitraume 1871—1903 hergestellten Invalidensterbetafeln hat J. Eggenberger[1]) veröffentlicht; es sind dabei in erster Linie Eisenbahnbedienstete, dann Berg-, Hütten- und Salinenarbeiter und schließlich die nach dem reichsdeutschen Invalidengesetz Versicherten vertreten.

b) *Ausscheideordnung der Diensttauglichen.* Die Tafel hat zur Darstellung zu bringen, wie eine Grundmenge von Diensttauglichen sich mit dem fortschreitenden Alter vermindert; ihre zwei Zahlenkolonnen, welche den Überlebenden und Gestorbenen einer Sterbetafel entsprechen, geben die Anzahlen der noch vorhandenen Aktiven und die Anzahlen der auf den einzelnen Altersstufen Ausscheidenden. Man kann daher eine solche Tafel auch wohl Aktivitäts- oder Diensttauglichkeitstafel nennen.

Hat man für jedes Alter x die rechnungsmäßige Anzahl der vorhandenen Aktiven, zu deren Bildung außer denen, die dieses Alter unter Beobachtung überschritten, auch die auf der Altersstufe $(x, x+1)$ Eingetretenen und die wegen Invalidität oder aus andern Gründen Ausgetretenen heranzuziehen sind; ferner die Anzahl S_1 der auf der eben bezeichneten Altersstufe Gestorbenen und die Anzahl J der invalid gewordenen, so berechnet sich daraus die Ausscheidewahrscheinlichkeit

$$\alpha_x = \frac{S_1 + J}{A},$$

deren Komplement p_x^{aa} ist.

Mit Hilfe der Reihe der Zahlen p_x^{aa} wird nun, bei einem Alter x

1) Assekuranzjahrbuch XXV, Wien 1904, p. 77—98.

mit einer runden Zahl l_x^a beginnend, von dem man annehmen kann, daß es nur Aktive aufweist, die Abfallsordnung der Diensttauglichen nach dem Schema:

$$l_x^a$$
$$l_{x+1}^a = l_x^{aa} p_x^{aa}$$
$$l_{x+2}^a = l_{x+1}^a p_{x+1}^{aa}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

konstruiert; die ersten Differenzen dieser Reihe geben die aus der Aktivität Ausscheidenden. Dieser Arbeit folgt die Ausgleichung.

Ausscheideordnungen sind von Zimmermann, Bentzien und Kihm für das gesamte Personal[1]), von Zimmermann auch gesondert für Zugbeamte, für das Nichtzugpersonal und für das Bahnbewachungspersonal[2]) berechnet worden. Was die auf das gesamte Personal bezüglichen Tafeln betrifft, so bezieht sich die Zimmermannsche auf die Zeit 1868—1884 mit

2125154 Personen unter einjähriger Beobachtung und
42734 Ausscheidungen;

die Bentziensche und die Kihmsche auf die Zeit 1868—1889 mit

3074513 Personen unter einjähriger Beobachtung und
66935 Ausscheidungen;

die Daten der Zimmermannschen Bearbeitung, bei der österreichischen Privatbeamtenversicherung gleichfalls in Verwendung genommen, sind in den ersten zwei Kolonnen der Tafel IX am Ende des Buches mitgeteilt.

c) *Invaliditätstafel.* Hierunter wird eine Tafel der Wahrscheinlichkeiten verstanden, auf den einzelnen einjährigen Altersstufen aus dem Zustande der Aktivität in den der Dienstuntauglichkeit überzugehen.

Sind für die einzelnen Alter die Zahlen A wie in b) und für die anschließenden Altersklassen die Anzahlen J der eingetretenen Dienstuntauglichkeitsfälle erhoben worden, so ergeben sich daraus unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten

$$w_x = \frac{J}{A},$$

die noch der Ausgleichung zu unterziehen sind.

Zimmermann hat mehrere Dienstuntauglichkeitstafeln berechnet; die eine für das gesamte Personal[3]) gründet sich auf die Beobachtungen des Zeitraumes 1868—1884 mit

1) Zimmermann, l. c., p. 102—103; Bentzien, l. c. 22 (1894), p. 5—26.

2) Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik. Berlin 1887, p. 172—175; ibid. 1888, 164—165.

3) Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältn. 1886, p. 104—105.

2125154 Personen unter einjähriger Beobachtung und

19780 Invalidisierungen;

von den andern[1]), aus demselben Zeitraume abgeleitet, bezieht sich die eine auf Zugbeamte, eine andere auf das Nichtzugpersonal, eine dritte und vierte auf das Bahnbewachungspersonal und auf Bureau- usw. Beamte. Für den ganzen Zeitraum von 1868—1889 haben Bentzien[2]) und Kihm[3]) das Gesamtpersonal betreffende Invaliditätstafeln konstruiert, die auf

3074513 einjährig Beobachteten und

33808 Dienstunfähigkeitsfällen

beruhen; die Zimmermannschen Ergebnisse sind durch die Zahlen der dritten bis sechsten Kolonne der Tafel IX am Ende des Buches wiedergegeben; auch sie gehören zu den Grundlagen der österreichischen Privatbeamtenversicherung.

d) *Sterbetafel des gemischten Bestandes.* Diese Tafel soll das Absterben der aus Diensttauglichen und Invaliden zusammengesetzten Gesamtheit, wie sie sich unter der Einwirkung der Berufsausübung entwickelt, zur Darstellung bringen. Ihr Vergleich mit einer für eine ganze Bevölkerung konstruierten Tafel kann dann über die Frage Aufschluß geben, ob der Beruf gegenüber der Gesamtheit eine ungünstige Beeinflussung der Sterblichkeit zur Folge habe.

Ist $A + P$ die rechnungsmäßige Anzahl der Aktiven und Invaliden eines Alters x, $S_1 + S_2$ die Anzahl der auf der folgenden Altersstufe beobachteten Todesfälle unter den Aktiven wie unter den Invaliden, so ergibt sich aus diesen Daten:

$$q_x = \frac{S_1 + S_2}{A + P}.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen ist nun aus einer Basis l_x für das Anfangsalter x die Abfallsordnung

$$\begin{aligned} &l_x \\ &l_{x+1} = l_x - q_x l_x \\ &l_{x+2} = l_{x+1} - q_{x+1} l_{x+1} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

abzuleiten; daran schließt sich die Ausgleichung.

Die von Zimmermann einerseits, von Bentzien und Kihm andererseits verfaßten Tafeln für das gesamte diensttaugliche und invalide Dienstpersonal der Eisenbahnen gründen sich auf die Beobachtungen von 1868—1884, bzw. 1868—1889, und rechnen mit

1) Beiträge etc. 1887, p. 176—179; ibid. 1888, p. 164—169.
2) l. c. 22 (1894).
3) Zeitschr. f. schweizerische Statistik, Jahrg. 1896.

2225332, resp. 3267862 einjährig beobachteten Personen und
29548, resp. 45402 Todesfällen.

Was die angewendeten Ausgleichungsmethoden betrifft, so sei Folgendes bemerkt. Zimmermann wandte auf den Hauptteil der Tafeln das Verfahren von Woolhouse an und nahm die Ausgleichung bei a), b), d) beziehungsweise an den rohen Zahlen l_x^i, l_x^a, l_x vor. Bei c) wurde der Weg eingeschlagen, daß man aus den ausgeglichenen l_x^a und den rohen w_x die Zahlen der Invalidisierungen berechnete und an diesen die Ausgleichung ausübte; die ausgeglichenen Zahlen der Invalidisierungen mit den ausgeglichenen l_x^a ergaben die ausgeglichenen w_x. Einzelne unbefriedigende Teile der Tafeln machten eine Detailausgleichung notwendig, die in einer Interpolation nach einer Parabel oder nach der auf das erste Glied reduzierten Wittsteinschen Sterblichkeitsformel (s. Fußnote zu Nr. 240) bestand.

Kihm wandte das vereinfachte Woolhousesche Verfahren (Nr. 241, b) Schluß) an und half sich bei minder befriedigenden Partien mit der Interpolation nach ganzen Funktionen.

Riedel endlich machte von der Karupschen Methode Gebrauch, deren Leistungsfähigkeit er dabei mit der Woolhouseschen verglich.

Riedel[1]) hat mit Rücksicht auf einen speziellen Zweck eine Bearbeitung jener Erfahrungen aus dem Komplex der vom Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen gesammelten Beobachtungen ausgeführt, die sich auf Bedienstete beziehen, deren Arbeit ausschließlich oder doch hauptsächlich im Kanzleidienst besteht und die darum unter dem Sammelnamen von Bureaubeamten zusammengefaßt werden können. Das Material, aus den Beobachtungsperioden 1882—1884 und 1885—1889 stammend, umfaßt

238546 Personen unter einjähriger Beobachtung,
1776 Invalidisierungen,
4765 Ausscheidungen.

Die Ausgleichung erfolgte nach der Highamschen Methode.[2])

Um eine Vergleichung seiner Ergebnisse mit den auf das Gesamtpersonal bezüglichen Daten zu ermöglichen, ist nachstehend (S. 218) ein Auszug aus Riedels Tafeln mitgeteilt.

Als Anfangsalter ist in allen Tafeln $n = 20$ angenommen.

Zwischen den Bearbeitungen von Zimmermann einerseits und denjenigen von Bentzien und Kihm andererseits besteht jedoch nicht bloß der Unterschied, daß sie sich auf Beobachtungsdaten ungleichen *Umfangs*, speziell die letzteren auf eine viel breitere Basis stützen;

1) Assekuranzjahrbuch XXVIII, Wien 1907, p. 175—238.
2) Ein mechanisches Verfahren, beschrieben u. a. bei E. Blaschke, Vorles. über Mathem. Statist., 1906, p. 235ff.

Bureaubeamte.

Alter	Invaliditätspromille 1000 w_x	Sterblichkeitspromille d. Akt. 1000 q_x^{aa}	Ausscheidepromille d. Akt. 1000 α_x
20	0,34	6,07	6,41
25	0,57	7,98	8,55
30	0,80	8,16	8,66
35	1,93	8,63	10,56
40	3,40	10,65	14,05
45	4,71	12,07	16,78
50	9,24	16,40	25,64
55	17,94	23,71	41,65
60	36,31	27,77	64,08
65	78,34	39,23	117,59
70	133,39	47,05	180,44
75	252,03	49,30	301,33
80	560,21	70,22	630,43

das Material, aus dem die beiderseitigen Tabellen hervorgegangen sind, zeigt auch eine erhebliche *Inhomogenität.* Da dies für die Beurteilung der Tabellen und für die Entscheidung bei einer eventuell zu treffenden Wahl von Bedeutung ist, soll darauf näher eingegangen werden.

Zimmermann hatte mit Hilfe seiner aus den Beobachtungen des Zeitraums 1868—1884 abgeleiteten und ausgeglichenen Tafeln eine Prüfung der Erfahrungen aus den Jahren 1885—1889 vorgenommen und war zu der Erkenntnis gekommen, daß es sich keineswegs um stabile Verhältnisse handelt, daß vielmehr diese Erfahrungen von jenen Tabellen in erheblicher und systematischer Weise abweichen. Wenn man nämlich die wirklichen Beobachtungszahlen in Prozenten der erwartungsmäßigen ausdrückt, so ergibt sich für die Jahre 1885—1889 folgendes Bild.

Beobachtung in % der Erwartung

Beobachtetes Ereignis	bei Zugbeamten					bei Nichtzugbeamten				
	1885	1886	1887	1888	1889	1885	1886	1887	1888	1889
Invalidität ...	113,3	131,4	128,5	132,0	103,3	127,4	138,6	140,9	128,3	121,0
Tod in der Aktivität ...	89,8	86,6	86,1	84,2	86,0	95,8	98,2	87,4	91,0	86,5
Ausscheiden a. d. Aktivität	101,6	109,3	107,7	108,8	95,0	111,0	117,9	113,5	109,2	103,4

Bezüglich der Sterbefälle unter den Invaliden stellen sich die Prozente so:

1885	1886	1887	1888	1889
95,3	97,3	88,7	94,0	90,1

Hieraus geht der Hauptsache nach folgendes hervor: Da die Veränderungen nicht plötzlich mit dem Jahre 1885 begannen, so ist anzunehmen, daß die Invalidisierungsfälle im Zunehmen, die Sterbe-

fälle im aktiven Stande sowie unter den Invaliden in Abnahme begriffen waren, und zwar die beiden ersteren in solchem Verhältnis, daß auch die Ausscheidungen noch in einer mäßigen Steigerung sich befanden; doch scheint, daß die erstgedachte Zunahme in dem Zeitraume 1885—1889 einen Höhepunkt erreicht und überschritten hat. Wird also das Erfahrungsmaterial dieser letzten Periode zu dem aus 1868—1884 stammenden hinzugefügt, so werden daraus im ganzen strengere Invaliditäts- und strengere Ausscheidewahrscheinlichkeiten, hingegen etwas leichtere Sterbenswahrscheinlichkeiten der Aktiven sowohl als der Invaliden hervorgehen. C. Kihm[1]) hat hierüber eine Überschlagsrechnung ausgeführt, deren Ergebnissen nachstehende Zusammenstellung entnommen ist.

Alter	Invaliditäts-promille		Sterblichkeits-promille der Aktiven		Ausscheide-promille der Aktiven		Sterblichkeits-promille der Invaliden	
	1868/84	1868/89	1868/84	1868/89	1868/84	1868/89	1868/84	1868/89
14—20	0,1	0,3	7,2	6,2	7,8	6,5	247,5	247,5
21—25	0,6	0,6	7,4	7,1	8,0	7,7	140,2	148,2
26—30	1,3	1,2	6,8	6,7	8,1	7,9	64,8	63,8
31—35	2,2	2,2	7,5	7,3	9,7	9,5	62,2	63,0
36—40	3,9	4,3	9,1	8,8	13,0	13,1	64,6	57,0
41—45	6,5	7,5	10,9	10,6	17,4	18,0	55,5	54,2
46—50	11,8	12,7	13,5	13,2	25,3	25,9	52,7	49,8
51—55	22,8	24,5	18,0	17,1	40,8	41,6	48,4	47,0
56—60	42,4	47,1	21,8	22,0	64,2	69,1	49,8	47,9
61—65	79,8	92,9	30,1	29,0	109,9	121,9	57,5	55,1
66—70	126,8	145,2	40,2	38,2	166,9	183,4	71,2	66,4
71—75	189,3	206,2	50,0	47,7	239,3	253,9	91,2	93,4
76—80	217,3	232,6	87,4	75,7	304,7	308,4	182,3	135,2
81—85	175,8	209,5	44,0	38,1	219,8	247,6	178,9	193,5
86—90	.	.	125,0	111,1	125,0	111,1	278,8	257,5
91—95	.	.	.	.	.	1000,0	333,3	333,3
14—95	9,3	11,0	10,8	10,8	20,1	21,8	60,1	59,1

Wie sich die Dinge im einzelnen gestalten, möge der nachstehenden Tabelle entnommen werden, welche die ausgeglichenen 1000fachen w_x und q_x^{aa} nach den drei Bearbeitungen für die Dezimalalter zur Anschauung bringt.

1) Kihm hat seine Tabellen vornehmlich für die Bedürfnisse der Pensionskassen der schweizerischen Eisenbahnen gerechnet. Da nun in der Schweiz die durch Unfall herbeigeführten Invaliditäts- und Todesfälle der Aktiven auf grund eines Haftpflichtgesetzes entschädigt werden, den Pensionskassen also nicht zur Last fallen, so hat er neben den Wahrscheinlichkeiten w_x, q_x^{aa}, q_x^{ai} auch die Wahrscheinlichkeiten w_x^u, q_x^{aau}, q_x^{aiu} aus den Erfahrungen des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen bestimmt, wobei der Buchstabe u auf die Verursachung durch Unfall hinweist, um eben diese Verursachung ausscheiden zu können; denn es bedeutet dann $w_x - w_x^u$ die Wahrscheinlichkeit, durch andere Ursachen als Unfall invalid zu werden; analoges gilt von $q_x^{aa} - q_x^{aau}$ usw.

Alter x	$1000\, w_x$			$1000\, q_x^{aa}$		
	Zimmermann	Bentzien	Kihm [1]	Zimmermann	Bentzien	Kihm [1]
20	0,21	0,14	0,31	8,89	8,02	6,93
30	1,53	1,45	1,46	6,85	6,68	6,65
40	4,74	5,34	5,34	10,81	9,58	9,60
50	15,57	16,66	16,69	15,32	14,72	14,75
60	57,28	64,65	64,58	24,95	24,71	24,66
70	160,23	179,06	179,70	44,21	43,79	43,56
80	231,34	264,43	252,78	91,66	77,62	80,65
90	800,00	800,00	442,22	200,00	200,00	161,31

251. Abhängigkeit der Invaliditätswahrscheinlichkeit von der Dienstdauer. Überlegungen allgemeiner Art führen zu der Annahme, daß die Invaliditätswahrscheinlichkeit bei einem bestimmten Alter nicht bloß von diesem, sondern auch von der bis zu seiner Erreichung zurückgelegten Dienstdauer abhängen werde. Einmal sprechen Gründe dafür, die außerhalb des Willens der beteiligten Personen liegen; mit der Leistung des Dienstes ist eine Abnutzung der Fähigkeiten und Kräfte verbunden, die sich zu den allgemeinen Wirkungen des fortschreitenden Alters gesellt und stärker werden kann als diese; insbesondere ist anzunehmen, daß ein jüngerer Organismus, zumal unter starker Inanspruchnahme, verhältnismäßig mehr leidet als ein älterer, der sich den Ansprüchen des Dienstes bereits angepaßt hat. Dazu kommen Umstände, die als Betätigungen des Willens aufzufassen sind; das Bestreben des Bediensteten, den Zeitpunkt des Eintrittes der Dienstunfähigkeit wegen Erlangung größerer Vorteile möglichst hinauszuschieben, kann ihn zu einer Schonung der Kräfte, zur Überwindung von Anwandlungen nach Ruhe veranlassen; aber auch der Dienstgeber kann sich, um die guten Qualitäten, die Verläßlichkeit eines Bediensteten möglichst lange zu erhalten, zu einer schonenden Inanspruchnahme seiner Kräfte veranlaßt sehen. Ähnlich wie bei der Sterbenswahrscheinlichkeit versicherter Personen kann man also die Invaliditätswahrscheinlichkeit einer bestimmten Berufskategorie als von zwei Argumenten, dem erreichten Alter x und der bis dahin zurückgelegten Dienstdauer t, abhängig ansehen und demgemäß die Bezeichnung $w_{[x-t]+t}$ dafür verwenden; ja man kann a priori die Vermutung aussprechen, es werde im allgemeinen $w_{[x-t]+t} < w_{[x-t']+t'}$ sein, wenn $t < t'$ ist.

Die Erforschung der angedeuteten Abhängigkeit begegnet aber mancherlei Schwierigkeiten, vor allem der, daß sie ein sehr reiches Beobachtungsmaterial erfordert, um bis zu einer solchen Detailierung der Resultate vorzudringen, daß man darauf versicherungstechnische Rechnungen stützen könnte. Dazu kommt, daß dem Eintritt in einen

1) Siehe Fußnote auf S. 219.

Beruf, an welchem die Untersuchung erfolgen soll, möglicherweise verschiedene andere Beschäftigungen vorangingen, die ihre Wirkung geübt haben. Handelt es sich also darum, einen ersten Blick in das Maß der Abhängigkeit zu erlangen, so wird sich eine möglichst in sich geschlossene Berufskategorie am besten dazu eignen.

Einen Ansatz in dieser Richtung hat E. Blaschke[1]) unternommen an den Mitgliedern des Pensionsfonds der Kaiser Ferdinand-Nordbahn. Um auch das Verhalten der verschiedenen Dienstkategorien zu prüfen, schied er die Mitglieder in drei Gruppen: Beamte, Diener und Fahrpersonal. Das aus der 12-jährigen Periode 1893—1904 stammende Beobachtungsmaterial ist durch folgende Daten gekennzeichnet:

Kategorie	Anzahl der Beobachtungsjahre	Invalidisierungen
Beamte	22 284,25	229
Diener	38 891,50	483
Fahrpersonal	20 772,00	323

Sein geringer Umfang machte eine Zusammenfassung der Alter und Dienstdauern notwendig, sollten wenigstens die Hauptzüge des Sachverhalts hervortreten. Die rohen Verhältniszahlen wurden schließlich einer mechanischen Ausgleichung (Nr. 246) unterzogen.

Als Hauptergebnis darf die Tatsache hingestellt werden, daß bei dem untersuchten Dienstpersonal der Einfluß der Dienstdauer auf die Invaliditätswahrscheinlichkeit ein sehr erheblicher ist dermaßen, daß aus der Zunahme der Dienstdauer um eine bestimmte Anzahl vor Jahren in manchen Positionen eine größere Steigerung der Invaliditätswahrscheinlichkeit zu resultieren scheint als aus einer äquivalenten Alterszunahme. Ein Ausschnitt aus den gewonnenen ausgeglichenen Zahlen, betreffend die erste und dritte Kategorie, zeigt folgendes Bild.

Invalidisierungspromille.

Kategorie	Alter	Dienstdauer in Jahren							
		3—7	8—12	13—17	18—22	23—27	28—32	33—37	38—42
Beamte	45			7,63	6,55	8,06	.	.	.
	50			7,23	9,55	8,77	19,80	.	.
	55			10,82	8,29	9,91	20,29	32,41	.
	60			.	11,99	22,93	25,98	50,05	70,26
	65			.	.	54,10	52,44	75,41	119,37
Fahrpersonal	35	0,99	2,95	.	.	.	.	.	.
	40	2,39	3,34	7,18	.	.	.	.	.
	45	2,02	6,68	10,47	15,21	.	.	.	.
	50	.	10,41	15,67	22,46	50,94	74,44	.	.
	55	.	16,18	18,02	31,96	55,11	114,47	136,83	.
	60	.	.	38,97	41,92	113,88	175,82	258,04	451,50

1) VII. intern. Arbeiterversicherungskongr. 1905, Wien, 1906, p. 129—144.

Es weist darauf hin, daß ein sehr erheblicher Unterschied in der Frequenz der Invalidisierungen bei einem bestimmten Alter besteht, je nachdem dasselbe nach kurzer oder langer Dienstdauer erreicht wurde; so entfallen auf 1000 aktive Beamte des Alters 55 der Reihe nach

10,82, 20,29, 32,41

Invaliditätsfälle, je nachdem sie

13—17, 28—32 33—37 Jahre

im Dienste stehen, und bei dem Fahrpersonal unter gleichen Verhältnissen

38,97, 114,47, 136,83

Invaliditätsfälle.

Die bisher vorhandenen Invaliditätstafeln, die von der Dienstdauer absehen und Personen gleichen Alters zusammenfassen, mag die abgelaufene Dienstdauer welche immer sein, sind sonach Durchschnittstafeln und können unter Umständen zu Ergebnissen führen, die mit der Wirklichkeit wenig harmonieren. Von zweifach abgestuften Invaliditätstafeln wäre eine vollkommenere Abwicklung zu erhoffen. Von der Gewinnung solcher Tafeln mögen aber Erwägungen anderer Art, auf die im Laufe der früheren Ausführungen (insbesonders Nr. 247) hingewiesen wurde, abgehalten haben. Große Unternehmungen, insbesondere Eisenbahnen, die für die Invalidität ihrer Angestellten vorsorgen, suchen dem Einfluß ungleicher Dienstdauer bei demselben Alter dadurch zu begegnen, daß sie die Aufnahme neuer Bediensteten auf ein nicht zu weites Altersintervall beschränken.[1])

252. Konstruktion der Ausscheideordnung der Aktiven aus einer allgemeinen Sterbetafel. Auch in einer gemischten Gesamtheit von Personen, wie etwa im Bestande einer Versicherungsanstalt, wo es sich nicht um einen einheitlichen Beruf, sondern um eine Mengung verschiedener Berufsarten handelt, kann von Dienstuntauglichkeitsfällen, daher auch von Aktiven und von einer Ausscheideordnung derselben gesprochen werden. Während der Bestand, wenn von der Invalidität abgesehen wird, in seinem Absterben nach einer für Versicherte geltenden Tafel zu behandeln ist, kommen bei Berücksichtigung der Invalidisierungen auch Invaliditätswahrscheinlichkeiten und die Sterblichkeit unter Invaliden in Rechnung. Diese Daten sind einem Material zu entnehmen, von dem erwartet werden

1) Eine Kritik der Blaschkeschen Arbeit, die zu dem Ergebnis kommt, daß es sich bei dem der Untersuchung unterzogenen Personal um außergewöhnliche Verhältnisse zu handeln scheine und daß nach dem Stande der heute vorliegenden Erfahrungen ein Übergang zu zweifach abgestuften Invaliditätstafeln verfrüht wäre, hat J. Karup gegeben. Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VI. intern. Kongr. f. Versicher.-Wissensch., Wien 1909, II. p. 725—731.

darf, daß es in bezug auf den Eintritt der Dienstuntauglichkeit mit dem in Rede stehenden Bestande nahezu homogen sei.

Es soll nun das Verfahren entwickelt werden, nach welchem aus einer allgemeinen Sterbetafel unter Anwendung von Invaliditätswahrscheinlichkeiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten der Invaliden eine Ausscheideordnung der Aktiven zu konstruieren ist[1]).

Aus der allgemeinen Sterbetafel werden die Werte

$$q_x \quad \text{und} \quad p_x = 1 - q_x$$

entnommen; aus den beiden andern Tafeln die Werte

$$w_x \quad \text{und} \quad q_x^{ii};$$

daraus berechnet man

$$q_x^{ai} = \frac{1}{2} w_x q_x^{ii}$$

$$p_x^{ai} = w_x - q_x^{ii}$$

$$p_x^{ii} = 1 - q_x^{ii}.$$

Angenommen nun, bei einem bestimmten Alter x sei l_x^a die Anzahl der Aktiven, P_x die Anzahl der Invaliden; dann hat man

$$l_{x+1}^a = l_x^a (1 - w_x) - l_x^a q_x^{aa},$$

wobei der erste Teil rechts die Anzahl der nicht invalid werdenden, der zweite Teil die Anzahl der aktiv sterbenden bedeutet. Ferner ist

$$(l_x^a + P_x) q_x = l_x^a (q_x^{aa} + q_x^{ai}) + P_x q_x^{ii};$$

die linke Seite bedeutet die Gesamtzahl der zu erwartenden Sterbefälle, die rechte Seite läßt ihre Aufteilung in die drei durch *aa*, *ai*, *ii*, gekennzeichneten Kategorien erkennen. Berechnet man aus diesem Ansatze $l_x^a q_x^{aa}$ und setzt den Wert in die vorletzte Gleichung ein, so wird

$$\begin{aligned} l_{x+1}^a &= l_x^a (1 - q_x - w_x + q_x^{ai}) + P_x (q_x^{ii} - q_x) \\ &= l_x^a (p_x - p_x^{ai}) + P_x (p_x - p_x^{ii}). \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits ist

$$P_{x+1} = l_x^a p_x^{ai} + P_x p_x^{ii}, \tag{2}$$

oder mit Rücksicht auf (1):

$$P_{x+1} = (l_x^a + P_x) p_x - l_{x+1}^a. \tag{2*}$$

Mithin kann für (1) auch geschrieben werden:

$$l_{x+1}^a = (l_x^a + P_x) p_x - P_{x+1}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Formeln (2) und (3) läßt sich die Ausscheideordnung wie folgt berechnen. Man geht von einem Alter n, das noch keine Invaliden aufweist, so daß $P_n = 0$ ist, mit einer beliebig gewählten (runden) Zahl l_n^a aus, bestimmt nach (2):

1) Vgl. Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeit etc. 1888, p. 5 ff.

$$P_{x+1} = l_x^a p_x^{ai}$$

und nach (3):

$$l_{x+1}^a = l_x^a p_x - P_{x+1};$$

hiermit weiter nach denselben Formeln:

$$P_{x+2} = l_{x+1}^a p_{x+1}^{ai} + P_{x+1} p_{x+1}^{ii}$$

$$l_{x+2}^a = (l_{x+1}^a + P_{x+1}) p_{x+1} - P_{x+2}$$

usw. bis zum höchsten Alter, das noch Aktive zählt.

In der nachstehenden Tabelle ist der Anfang einer solchen Rechnung dargestellt. Dabei sind die Grundzahlen:

p_x der Tafel MI. der 23 deutschen Gesellschaften (s. Nr. 235),

w_x der Dienstuntauglichkeitstafel für Bureau- usw. Beamte (s. Nr. 250),

q_x^{ii} der Sterbetafel für invalides Eisenbahnpersonal (s. Nr. 250)

entnommen. Der weitere Gang der Rechnung ist aus den Überschriften der Kolumnen und aus den Formeln leicht zu erkennen.

x	l_x^a	p_x	w_x	q_x^{ii}	p_x^{ii}	$q_x^{ai} = \frac{1}{2} w_x q_x^{ii}$	$p_x^{ai} = w_x - q_x^{ai}$	$(l_x^a + P_x) \times p_x$	$l_x^a p_x^{ai}$	P_x	$P_x p_x^{ii}$
20	100 000	0,99375	0,00020	0,1020	0,8980	0,00001	0,00019	99 375	19	0	0
21	99 356	0,99381	0,00023	0,0981	0,9019	0,00001	0,00022	98 760	22	19	17
22	98 721	0,99387	0,00026	0,0943	0,9057	0,00001	0,00025	98 155	25	39	35
23	98 095	0,99374	0,00030	0,0905	0,9095	0,00001	0,00029	97 541	28	60	55
24	97 458	0,99365	0,00034	0,0868	0,9132	0,00001	0,00033	96 922	32	83	76
25	96 814									108	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Fünfter Teil.

Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung.

I. Abschnitt. Versicherungswerte.

§ 1. Grundlagen.

253. Begrenzung der Aufgabe. Die Funktion eines jeden *Versicherungsunternehmens* besteht in letzter Linie darin, die von der Gemeinschaft der *Versicherungsnehmer* (Versicherten) eingezahlten Gelder (Beiträge, Prämien) zu sammeln, fruchtbringend zu verwalten und in anderer, dem *Versicherungszwecke* entsprechender Verteilung den Versicherten wieder zuzuführen.

Der Versicherungszweck besteht in der Gewährung bestimmter, ein- oder mehrmaliger vereinbarter *Leistungen* seitens des Versicherers an die Versicherten, welchen Leistungen in irgend einem Belange das Merkmal der *Ungewißheit* anhaftet. Die Ungewißheit kann sich beziehen auf den Eintritt der Leistungen überhaupt, auf den Zeitpunkt ihres Eintrittes, auf ihre Höhe. Sie ist verknüpft mit dem Vorhandensein eines bestimmten Zustandes oder dem Eintritt einer bestimmten Zustandsänderung der versicherten Person selbst oder einer von dieser abhängigen Sache. Den Zustand oder die Zustandsänderung bezeichnet man als das *versicherte Ereignis.*

Soll das Versicherungsunternehmen eine *wirtschaftliche* Einrichtung sein, so ist erforderlich, daß über das versicherte Ereignis oder die versicherten Ereignisse, die bei einem *Versicherungsfall* in Betracht kommen, *Erfahrungen* vorliegen, die eine zureichend sichere Schätzung der relativen Häufigkeit ihres Vorhandenseins oder Eintreffens gestatten.

Betrifft das versicherte Ereignis die versicherte Person als solche, so spricht man von *Personenversicherung* oder *Lebensversicherung im weiteren Sinne;* betrifft es eine von ihr abhängige Sache, so spricht man von *Sachversicherung.*

Zur *Lebensversicherung im engeren Sinne* zählt man solche Versicherungsformen, bei denen das versicherte Ereignis lediglich mit dem *Leben* der Person zusammenhängt, also die Todesfall-, die Er-

lebens- und als wichtigste Form der letzteren die Rentenversicherung (im engeren Sinne). Im weiteren Sinne faßt man unter jenem Namen alle Versicherungsformen, bei denen das versicherte Ereignis an den Lebenslauf der Person geknüpft ist; es gehören hierher hauptsächlich auch die Kranken-, Unfall- und die Invalidenversicherung.

Das *Versicherungsverhältnis*, das die gegenseitigen Verpflichtungen des Versicherers und des (oder der) Versicherten regelt, kann auf einem *Vertrag* (privatrechtlicher Natur) oder auf einem *Gesetz* (öffentlichrechtlicher Natur) beruhen. Nach dem obersten Zweck, den die Versicherung zu erfüllen hat, unterscheidet man *Sozialversicherung* und *Privatversicherung* und zählt zu ersterer alle jene Versicherungsverhältnisse, die auf sozialpolitischer Grundlage beruhen, d. h. zur Sicherung und Hebung der wirtschaftlichen Lage bestimmter Bevölkerungsschichten berufen sind; ihr wichtigster Zweig ist die *Arbeiterversicherung*. Alle anderen Versicherungsverhältnisse faßt man unter dem Namen Privatversicherung zusammen.

Während bei dieser das Eingehen des Versicherungsverhältnisses der *freien Entschließung* überlassen ist, wird in der sozialen Versicherung häufig ein gesetzlicher *Zwang* zur Versicherung ausgeübt, durch welchen Personen kraft ihrer Zugehörigkeit zu einem gesetzlich umschriebenen Personenkreis zum Eingehen des Versicherungsverhältnisses verhalten sind.

In der *Aufbringung der Mittel* zur Erfüllung des Versicherungszweckes besteht zwischen der privaten und sozialen Versicherung ein wesentlicher Unterschied. Die Privatversicherung geht bei der Bemessung der Beiträge (Prämien) individuell vor, indem sie sich bei der einzelnen Person von der finanziellen Tragweite des mit ihr abzuschließenden Versicherungsverhältnisses leiten läßt. In der Sozialversicherung wird die Gemeinschaft der Versicherten in größere Einheiten aufgelöst und innerhalb dieser wird trotz vorhandener differenzierender Momente nicht mehr unterschieden.

Das eine Hauptproblem, das der *Mathematik* auf dem Gebiete des Versicherungswesens gestellt ist, geht dahin, die Einzahlungen (Beiträge, Prämien) der Versicherten so zu regeln, daß sie in ihrer Gesamtheit und bei fruchtbringender Verwaltung nach den über die versicherten Ereignisse vorliegenden Erfahrungen zur Erfüllung des Versicherungszweckes gerade ausreichen.

Bezieht sich dieses Problem gewissermaßen auf den Beginn des Versicherungsunternehmens, so stellt sich in dessen Verlauf das andere Problem ein, die Größe der Mittel festzustellen, welche der Unternehmer in einem bezeichneten Zeitpunkte besitzen muß, um damit im Verein mit den ferneren Einzahlungen der Versicherten die zukünftigen Verpflichtungen auf Grundlage derselben Erfahrungen gerade einhalten zu können.

Zu diesen Hauptproblemen tritt noch eine Reihe anderer, die sich aus der praktischen Durchführung des Unternehmens und aus verschiedenen Vorkommnissen ergeben, die aus den *Vertragsbedingungen* (oder dem Gesetze) hervorgehen können.

Die *Elementaraufgaben*, aus welchen sich die Lösung dieser Probleme zusammensetzt, sind die gleichen, ob es sich um private oder soziale Versicherung handelt. Diese auf die Lebensversicherung im weiteren Sinne, insbesondere mit Einbeziehung der Invalidität unter die versicherten Ereignisse, bezüglichen Elementaraufgaben bilden den hauptsächlichen Gegenstand dieses Teiles des Buches.

254. Grundlagen und Voraussetzungen der Rechnung.[1]) Die Erfahrungen über die zu versichernden Ereignisse werden, um sie für die Rechnung geeignet zu machen, in die Form von Tafeln gebracht. Über die Anlage und Konstruktion solcher Tafeln ist im vierten Teile gehandelt worden.

Die *statistischen Tafeln* bilden die eine Grundlage der Rechnung.

Das Maß der fruchtbringenden Anlage der vereinnahmten Geldsummen findet im Zinsfuß seinen Ausdruck.

Der *Zinsfuß* bildet die andere Grundlage der Rechnung.

Die Theorie der Lebensversicherung setzt *Stabilität* voraus sowohl in der Intensität des Auftretens der versicherten Ereignisse als auch der des Zinsfußes voraus.

Was die Stabilität in der erstgenannten Beziehung anlangt, so ist jene *relative* Stabilität gemeint, welche die Bildung typischer Wahrscheinlichkeiten und damit zugleich die Anwendung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet (Nr. 192 und 202).

Die Theorie macht die weitere Voraussetzung, daß der zu versichernde oder bereits versicherte Bestand in bezug auf die versicherten Ereignisse jenem Bestande *homogen* sei, durch dessen Beobachtung die zugrunde gelegten statistischen Tafeln gewonnen worden sind.

Wie verhält sich nun die Wirklichkeit zu diesen Voraussetzungen?

Hierzu muß zunächst allgemein bemerkt werden, daß deren strenge Erfüllung ausgeschlossen ist, daß sie vielmehr immer nur in mehr oder weniger hohem Grade der Annäherung zutreffen werden.

Was zunächst die Stabilität anlangt, so sei festgestellt, daß bei keiner menschlichen Massenerscheinung, die für Versicherungszwecke in Betracht kommt, bisher jener höchste Grad von Stabilität streng

1) Über die Annahmen und Sätze, durch deren Vermittlung die Lebensversicherungsrechnung auf die Wahrscheinlichkeitstheorie gestützt wird und die gewissermaßen das Analogon zu den Grundlagen einer rein mathematischen Disziplin bilden, hat sich G. Bohlmann in der Enzykl. d. mathem. Wissensch., Bd. I, 3, Artikel I D 4b und später ausführlicher in den Atti del IV Congr. Intern. dei Matematici, Roma 1909, vol. III, p. 244—288, ausgesprochen. — Man vgl. auch U. Broggi, Traité des Assurances sur la Vie, Paris 1907.

nachgewiesen worden ist, der für die Bildung typischer Wahrscheinlichkeitsgrößen mit normaler Dispersion gefordert wird. Als angenähert vorhanden darf er gelten bei den Sterblichkeitsverhältnissen; die auf diese allein sich gründende Lebensversicherung *im engeren Sinne* darf daher als der bestbegründete Zweig der Personenversicherung bezeichnet werden. Dagegen entbehren manche Erscheinungen, die bei Versicherungen in Betracht kommen, wie Invalidität, Morbidität, Eintritt von Unfällen, nach den bisherigen Erfahrungen des erforderlichen Grades von Beständigkeit, um sie für längere Zeiträume geltenden Rechnungen unterziehen zu dürfen.

Aber selbst wenn der zur Gewinnung der statistischen Unterlage beobachtete Bestand Stabilität zeigte, bliebe noch die Frage offen, ob der versicherte Bestand ihm homogen sei.

Selbst in den nicht gerade häufigen Fällen, wo ein Versicherungsunternehmen die statistischen Grundlagen für die Zukunft aus den der Vergangenheit angehörenden Erfahrungen an seinem eigenen Bestande ableitet, wird von Homogenität in voller Strenge nicht gesprochen werden können; denn die Lebensverhältnisse ändern sich mit der Zeit und die Grundsätze und Methoden der *Auslese* bleiben nicht die gleichen.

In Zusammenfassung dieser Ausführungen sind also nicht allein *zufällige*, sondern auch *systematische* Abweichungen des wirklichen Verlaufes der versicherten Ereignisse von der statistischen Grundlage zu erwarten.

Daß die Voraussetzung, der Zinsfuß bleibe konstant, der Wirklichkeit nicht entspricht, lehrt die tägliche Erfahrung.

Aus all dem geht hervor, daß systematische Vergleichung der wirklichen Entwicklung der Verhältnisse mit der nach den gewählten Grundlagen zu erwartenden ein Gebot der Notwendigkeit ist. Ihr Ergebnis kann unter Umständen zu einer *Änderung der Grundlagen* Veranlassung geben.

Von den Differenzen zwischen den Rechnungsgrundlagen und der Wirklichkeit hängt die *Gebarung* eines Versicherungsunternehmens ab, dessen Gewinne oder Verluste entweder den Versicherten selbst zugute, beziehungsweise zur Last fallen (auf Wechselseitigkeit beruhende Versicherungsanstalten), oder die Träger des Unternehmens treffen (Aktiengesellschaften); indessen ist es gegenwärtig fast zur Regel geworden, daß Unternehmungen der letzteren Art auch den Versicherten eine Anteilnahme an dem erzielten Gewinne einräumen (Gewinnbeteiligung).

255. Wahl der statistischen Grundlagen. Wenn es sich um Lebensversicherung *im engeren Sinne* handelt, bilden *Sterbetafeln* die alleinige statistische Grundlage. Für ihre Wahl sind verschiedene Gesichtspunkte maßgebend; am meisten machen sich geltend und

werden gegenwärtig fast ausschließlich berücksichtigt die Art der Versicherung und die der Auslese.

Bei der Anwerbung für eine bestimmte Versicherungsart macht sich neben der seitens der Unternehmung veranlaßten ärztlichen Untersuchung, soweit eine solche obligatorisch ist, auch die Selbstbeurteilung des Versicherungsuchenden bemerkbar als einflußübend auf den Sterblichkeitsverlauf der betreffenden Gruppe. In dieser Beziehung hat die Erfahrung zur Unterscheidung dreier Hauptgruppen geführt: der reinen Todesfallversicherung, der reinen Erlebens- und der Rentenversicherung und der gemischten Versicherung. Bei der ersten kommt lediglich das Sterben, bei der zweiten das Erleben eines oder einer Reihe von Zeitpunkten, bei der dritten beides zugleich in Betracht. In ihrer Sterblichkeit weisen diese Kategorien erhebliche Unterschiede auf (vgl. Nr. 238), die durch die neueren Sterblichkeitsmessungen auch ziffermäßig genügend festgestellt sind. Es liegt aber in der Natur der Sache, daß neue Tafeln nur langsam, bei Neuerrichtung von Unternehmungen und bei Neueinführung von Versicherungskombinationen, Eingang finden. So werden wohl der gemischten Versicherung, wiewohl bei ihr eine viel mäßigere Sterblichkeit auftritt, doch bisher zumeist Tafeln zugrunde gelegt, die aus Todesfallversicherungen hervorgegangen sind. Hingegen wird zwischen Todesfall- und Rentenversicherung fast allgemein unterschieden.

Die ärztliche Untersuchung, welche dem Abschlusse von Versicherungen vorangeht, bei denen das Sterben zu den versicherten Ereignissen gehört, kann im Sinne eines festgesetzten Umfanges *vollständig* oder *unvollständig* sein, letzteres, wenn sie nur auf einen Teil der auf die Sterblichkeit Einfluß nehmenden Umstände Rücksicht nimmt; es gibt aber auch Versicherungen, wo sie gänzlich unterbleibt (Volksversicherung).

Auf Grund der ärztlichen Untersuchung wird das Leben als ein normales, ein unternormales oder als ein minderwertiges bezeichnet. Ein normales Leben wird unter den Bedingungen, welche für die betreffende Versicherungskombination die Norm bilden, angenommen, ein unternormales unter gewissen erschwerenden Kautelen, ein minderwertiges, d. i. ein solches mit ererbten oder erworbenen Krankheitsanlagen oder mit Krankheitsresiduen in der Regel abgelehnt; doch sind auch schon Anfänge mit der Versicherung solcher Leben, die ja gerade häufig am versicherungsbedürftigsten sind, gemacht worden.[1])

1) Bezüglich des Problems der Versicherung minderwertiger Leben ist zunächst auf E. Blaschkes „Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben", Wien 1895 zu verweisen. Zu einer eingehenden Aussprache hierüber hat der VI. intern. Kongreß für Versicherungswissenschaft (Wien 1909) Anregung gegeben, indem er das Thema unter die Verhandlungsgegenstände aufnahm mit der besonderen Formulierung, ob sich die (von Blaschke

Beispiele von Tafeln, welche Versicherungen auf den Todesfall (und gemischten Versicherungen) bei vollständiger ärztlicher Untersuchung zugrunde gelegt werden, sind die Tafel der 17 englischen Gesellschaften, die Tafel H^M der 20 britischen Gesellschaften, die Tafeln I der 23 deutschen Gesellschaften, die Tafeln A.F. der 4 französischen Gesellschaften, die Tafel O^M u. v. a. Von Tafeln, welche bei Rentenversicherungen Verwendung finden, seien außer der Tafel der 17 englischen Gesellschaften von eigentlichen Rentner-Sterbetafeln genannt die von Deparcieux, die sächsische, die deutsche, die der französischen Gesellschaften.[1]) Für unternormale Leben werden besondere Tafeln (die Tafeln II der 23 deutschen Gesellschaften wären solche) in der Regel nicht benutzt, der Ausgleich vielmehr durch andere Mittel angestrebt. Bei Versicherungsn mit unvollständiger oder fehlender ärztlicher Untersuchung kommen die Tafeln III der 23 deutschen Gesellschaften, zumeist aber Volkstafeln, wie die preußische, die deutsche u. a. zur Verwendung.[2])

Außer den bisher besprochenen Hauptmomenten gibt es noch eine Reihe von Umständen, welche nach den vorliegenden Erfahrungen eine Differentiierung der in eine Gruppe zusammengefaßten Leben bedingen würden; wenn sie heute bei der Wahl der Grundlagen und zu einer detallierteren Gruppierung der Versicherten nur erst sehr ausnahmsweise benutzt werden, so liegt dies in der einen Gruppe der Fälle daran, daß das geringe Maß des Einflusses den komplizierten Apparat getrennter Behandlung nicht rechtfertigen würde, in einer anderen Gruppe an dem Mangel gesicherter Erfahrungsergebnisse. Aus

---

in der erwähnten Denkschrift zum erstenmale versuchte) Lösung durch Bildung von Gefahrenklassen empfehle und wie in solchem Falle die erforderliche Erfahrungsgrundlage zu gewinnen wäre. Die bezüglichen Arbeiten finden sich in den „Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen“ des genannten Kongresses, I. 2, p. 1169—1370.

1) Über die in der Rentenversicherung gebräuchlichen Tafeln, wie überhaupt über das schwierige Thema der Rentenversicherung ist auf dem V. intern. Kongreß für Versicherungswissenschaft (Berlin 1906) verhandelt worden. Die darauf bezüglichen Arbeiten befinden sich in „Berichte, Denkschriften und Verhandlungen usw.“ p. 289—446.

2) Die amtlichen Berichte, welche die staatlichen Aufsichtsämter über die Privatversicherung veröffentlichen (in Deutschland seit 1902, in Österreich seit 1898, in der Schweiz seit 1886), enthalten Angaben über die wenigstens bei den am stärksten vertretenen Kombinationen verwendeten Tafeln. Der österreichische Bericht für das Jahr 1905 (Wien, 1909) zählt bei 25 inländischen Gesellschaften 13 mal Tafeln englischen, 7 mal Tafeln deutschen Ursprungs, in je einem Falle die Brune-Fischersche, die deutsche Volkssterbetafel, die Sterbetafel der Eisenbahnbeamten und eine eigene Tafel auf; bei 21 ausländischen (mit Einschluß der ungarischen) 8 mal Tafeln englischen, 6 mal deutschen, 1 mal französischen, 4 mal amerikanischen Ursprungs, außerdem in 2 Fällen die Verwendung eigener Erfahrungen und in 1 Falle die deutsche Volkssterbetafel.

dem Fortschreiten der Forschung werden sich in Zukunft der Versicherungstechnik mancherlei Aufgaben ergeben.

So hat der wahrgenommene Unterschied im Sterblichkeitsverlaufe der beiden Geschlechter dazu geführt, diese bei der Beobachtung zu trennen und besondere Tafeln für sie aufzustellen; das ist bei den neueren Sterblichkeitsmessungen (Nr. 235—237) und auch schon bei manchen älteren (Nr. 233) geschehen und wird wohl auch in Zukunft so gehalten werden. In der Praxis wird aber dermalen dem Unterschiede des Geschlechts in den Rechnungen nicht durchwegs, ja nicht einmal vorherrschend, Ausdruck gegeben. Es werden auf die Versicherung beider Geschlechter vielfach dieselben Tafeln angewendet, abgeleitet aus Beobachtungen entweder an Personen beiderlei Geschlechts oder nur an männlichen Personen; relativ am häufigsten finden Frauentafeln in der *Renten*versicherung Verwendung.[1])

In eine neue Phase ist die Lebensversicherungsrechnung getreten mit der Berücksichtigung des Einflusses der Versicherungsdauer, mit anderen Worten der Auslese. Damit wird die zweifach abgestufte Sterbetafel (Nr. 230) an Stelle der bisher gebräuchlichen einfach abgestuften zur Grundlage genommen. Doch befindet sich dieser Umwandlungsprozeß vorläufig in seinen ersten Anfängen, nur einige wenige Anstalten haben den neuen Weg betreten (in Deutschland Gotha und Leipzig), noch sind die Anschauungen über seine Berechtigung und seine zu gewärtigenden Erfolge geteilt.[2])

Auch die Höhe der Versicherungssumme, weil mit den Lebensverhältnissen in einem Zusammenhange stehend, übt auf die Sterblichkeit einen Einfluß aus. Das Gleiche gilt von manchen Eigenarten der Lebensführung, vom Beruf, vom Wohnsitz; auch hierüber sind seitens solcher Gesellschaften, bei welchen Personen der betreffenden Lebensführung oder bestimmter Berufsart in stärkerem Maße versichert sind, beziehungsweise welche zahlreichere Versicherungen in tropischen Ländern abschließen, Beobachtungen angestellt worden, um Direktiven für eine richtigere Behandlung solcher Versicherungen zu erlangen.[3])

---

1) Die Frage der Frauenversicherung hat den V. intern. Kongreß (Berlin 1906) beschäftigt, siehe dessen „Berichte, Denkschriften und Verhandlungen usw.", I. Bd., p. 559—630, insbesondere die Arbeit von L. Goldschmidt und K. Samwer (p. 573—582), welche näheres über die dabei in Deutschland gebrauchten Tafeln enthält.

2) Man vergleiche hierzu die Aufsätze von G. Höckner und J. Riem in der Ztschr. f. d. ges. Versicher.-Wissensch. VIII (1908), p. 63—97.

3) Unter den Verhandlungsgegenständen des V. intern. Kongresses für Versicherungswissenschaft (Berlin 1906) befand sich die Frage der Versicherung der Abstinenten und der Versicherung von Personen, welche mit der Herstellung und dem Vertriebe alkoholhaltiger Getränke berufsmäßig in Beziehung stehen. „Berichte, Denkschriften und Verhandlungen usw.", I. Bd., p. 449—554

Die fast allgemeine Annahme, daß Personen eines Alters, die zu einer bestimmten Versicherungsart zugelassen worden sind, eine homogene Gesamtheit oder *gleichwertige Risiken* darstellen, ist demnach streng genommen eine Fiktion. G. Bohlmann[1]) unterscheidet normale Risiken und Extrarisiken; unter den ersteren versteht er männliche Leben, die auf Grund vollständiger ärztlicher Untersuchung unter gewöhnlichen Bedingungen auf den Todesfall versichert sind; alle anderen Leben, welche durch irgendeinen der angeführten Umstände für die Gesellschaft ungünstiger, eventuell auch günstiger erscheinen, faßt er als Extrarisiken zusammen. Häufiger jedoch versteht man unter normalen Risiken solche Leben, die nach vollständiger ärztlicher Untersuchung vorbehaltlos angenommen worden sind.

Zur Lebensversicherung *im weiteren Sinne* zählt man auch die verschiedenen Zweige der Sozialversicherung, die Kranken-, Unfall- und Invalidenversicherung der Arbeiter, die ein ausgedehntes, viel bearbeitetes Gebiet der heutigen Versicherungswissenschaft umfaßt. Das hier angesammelte ungeheuere Beobachtungsmaterial harrt noch zum großen Teil der einheitlichen Bearbeitung, die gewiß wertvolle Resultate für den weiteren Ausbau liefern wird. Die Invalidenversicherung wird auch außerhalb der sozialen Versicherung betrieben, und zwar sowohl als Selbstzweck wie auch als Ergänzung der eigentlichen Lebensversicherung in dem Sinne, daß dadurch der Versicherte für den Fall seines Invalidwerdens und der dadurch verursachten Erwerbsunfähigkeit von der weiteren Zahlung der Beiträge für seine Lebensversicherung enthoben wird. Bezüglich der statistischen Grundlagen dieser Versicherungszweige muß auf die einschlägige Spezialliteratur verwiesen werden; hinsichtlich der Invalidität gibt das vorliegende Buch im III. Abschnitt des vierten Teiles einigen Aufschluß.

256. Wahl des Zinsfußes. Es ist ein wichtiges technisches Erfordernis, den Rechnungen so lange als möglich einen gleichbleibenden Zinsfuß zugrunde zu legen; denn, abgesehen vom Arbeitsaufwand, der mit einer Änderung des Zinsfußes verbunden ist, hat eine solche auch eine Änderung der Vermögenslage des Unternehmens zur Folge. Dem steht die Tatsache gegenüber, daß die aus den gesamten Anlagen resultierende Verzinsung vielfachen Schwankungen unterworfen ist.

Als Grundsatz hat zu gelten, daß der *rechnungsmäßige* Zinsfuß den *effektiv* zu erzielenden nicht überschreiten solle.

Für die Wahl des Rechnungszinsfußes sind verschiedene Umstände maßgebend: die Erfahrungen über den Stand und die Wandlungen der Verzinsung der verschiedenen Anlagearten; die zur Verfügung stehenden Anlagearten selbst; der Geschäftsplan. Die zu be-

1) Encykl. der mathem. Wissensch. I. p. 864—869.

obachtenden Momente sind bei der sozialen Versicherung nicht die gleichen wie bei der privaten.

Aus den Erfahrungen kann wohl ein Bild darüber gewonnen werden, wie sich die Verzinsung der verschiedenen Anlagewerte in der *Vergangenheit* gestaltet hat; bei dem unregelmäßigen Charakter der Variationen, die oft durch lange Zeiträume unmerklich vor sich gehen, um dann plötzlich ein starkes Tempo einzuschlagen, läßt sich ein begründeter Schluß auf die Zukunft schwer ziehen.

Als Hauptanlagearten können bezeichnet werden: Wertpapiere, Hypothekardarlehen, Realitäten, Darlehen auf Policen und Kautionen. Die Wahl derselben ist bei der Privatversicherung innerhalb gewisser Grenzen durch die staatlichen Aufsichtsbestimmungen beschränkt; auch die Rücksicht auf rasche Realisierbarkeit für den Fall des Bedarfs an Barmitteln spielt eine, wenn auch bei der Lebensversicherung nach ihrem heutigen Stande untergeordnete Rolle.

Die Veranlagung der disponiblen Kapitalien. in Wertpapieren stellt sich als die einfachste, bequemste Anlageart dar. Von der Verzinsung, die sie bietet, abgesehen, hat sie den großen Nachteil, daß dabei ein bestimmter Ankaufspreis in eine variable Summe umgesetzt wird wegen den Kursschwankungen, welchen die Wertpapiere unterworfen sind. Wenn auch diese Wertänderungen, so lange die Wertpapiere nicht wieder verkauft werden, nur buchmäßige Bedeutung haben, so beeinflussen sie doch die periodischen Rechnungs- und Bilanzaufstellungen, mitunter in sehr empfindlicher Weise.

Demgegenüber bietet die Anlage in Hypotheken mehrfache Vorteile: die Unveränderlichkeit der Summe, die Beständigkeit der Verzinsung für eine vereinbarte längere Periode, trotz der mit dieser Anlageart verbundenen Kosten eine höhere Verzinsung. Alle diese Umstände fallen so sehr ins Gewicht, daß die Hypotheken in der Lebensversicherung gegenüber den Wertpapieren ständig zugenommen haben und insbesondere in Deutschland unter den Anlagearten weitaus vorwiegen.

Realitäten treten gegenüber den beiden ersten Formen der Kapitalanlage zurück und dienen vielfach vornehmlich den Zwecken der Verwaltung (Anstaltsgebäude).

Auch die Darlehen, eine notwendige Begleiterscheinung der Geschäftsführung, nehmen eine verhältnismäßig untergeordnete Stellung ein.

Um ein Bild dieser Verhältnisse und ihrer zeitlichen Entwicklung zu geben, sind nachstehend die absolute Höhe und der prozentische Anteil der genannten Anlagearten an dem gesamten zinstragenden Vermögen bei der deutschen und der österreichischen Lebensversicherung für eine Reihe von Jahren angegeben; die abso-

luten Beträge sind in Millionen Mark, beziehungsweise Kronen ausgedrückt.[1])

Deutschland.

Jahr	Wertpapiere		Hypotheken		Realitäten		Darlehen	
	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %
1877	22,3	4,3	328,3	62,6	12,3	2,4	18,8	3,6
1887	54,0	5,2	742,5	70,9	29,5	2,8	52,0	5,0
1897	74,6	3,5	1618,9	75,7	48,9	2,3	126,0	5,9
1907	117,4	2,7	3474,7	80,7	82,6	1,9	272,0	6,5

Österreich.

Jahr	Wertpapiere		Hypotheken		Realitäten		Darlehen	
	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %
1898	498,0	59,3	151,4	18,0	69,4	8,3	53,3	6,4
1901	550,0	55,1	206,3	20,7	79,8	8,0	72,9	7,3
1904	714,2	56,8	275,7	21,9	92,9	7,4	80,8	6,4
1907	800,8	52,7	356,5	23,5	114,2	7,5	101,9	6,7

In der *privaten Versicherung* sind Überschüsse über die zur Erfüllung des Versicherungszweckes nötigen Mittel erforderlich zur Bildung von Rücklagen, die der *Sicherung* des Unternehmens dienen sollen, und zur Bestreitung des beträchtlichen Aufwandes zur Erneuerung und Hebung des Versicherungsbestandes; dieser Aufwand, wiewohl unproduktiv für den eigentlichen Zweck der Versicherung, ist unerläßlich für den Fortbestand des Unternehmens. Eine Quelle dieser notwendigen Überschüsse bildet nun auch die Verzinsung.

Es sind daher die Versicherungsanstalten in neuerer Zeit mit dem Rechnungszinsfuß um eine gewisse, mitunter nicht unerhebliche Quote unter den wirklich erreichbaren herabgegangen, ja die staatlichen Aufsichtsämter machen bei Neugründungen und bei Aufstellung neuer Tarife die Nichtüberschreitung eines Maximalsatzes ($3\frac{1}{2}$%) zur Bedingung der Zulassung zum Betriebe. Soweit die dadurch erzielte Mehrverzinsung nicht für die oben bezeichneten Zwecke (und bei Aktienunternehmungen für die Verzinsung des Aktienkapitals) aufgebraucht wird, kommt sie wieder den Versicherten zugute in Form einer *Gewinnbeteiligung.* Diese Art des Versicherungsbetriebes mit Anteil am Gewinne (Dividente, Bonus) ist jetzt, namentlich in Deutschland, England und der Schweiz, die herrschende geworden; man besitzt in der Verteilung des Gewinnes ein mächtiges Mittel zur Anwerbung neuer Versicherter.

Daß indessen der Satz von 4%, der beiläufig den heutigen Zins-

1) Gutachten, Denkschriften etc. des VI. intern. Kongr. f. Versicher.-Wissenschaft, Wien 1909, I, 1, p. 250—252 und 370.

verhältnissen entspricht, und selbst höhere Zinsraten aus dem Geschäftsbetriebe noch nicht ausgeschieden sind, daß aber auch niedrigere Sätze als $3^1/_2$% Verwendung finden, mag aus den folgenden Zusammenstellungen ersehen werden.

Die erste bezieht sich auf österreichische Verhältnisse[1]; die nicht eingeklammerten Zahlen betreffen inländische, die eingeklammerten ausländische Unternehmungen; am Fuße der Tabelle ist der jeweilen erzielte durchschnittliche Zinsfuß angegeben.

In der zweiten Zusammenstellung ist der gegenwärtige Stand der Verhältnisse in der Schweiz dargestellt[2]; man kann daraus die Unterschiede zwischen den Anstalten verschiedener Länder ersehen. Hier beziehen sich die nicht eingeklammerten Zahlen auf die Kapitalversicherung, die eingeklammerten auf die Rentenversicherung.

Rechnungszinsfuß und durchschnittlich erzielter Zinsfuß der in Österreich tätigen Gesellschaften.

%	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905
5	1 —	1 —	1 —	1 —	1 —	1 —	— —	— —
4	13 (5)	14 (6)	14 (6)	14 (6)	13 (6)	13 (16)	11 (5)	11 (5)
$3^3/_4$	— —	— —	— —	— —	— —	— —	1 —	1 —
$3^1/_2$	5 (11)	9 (11)	9 (11)	10 (11)	11 (11)	11 (11)	13 (12)	13 (11)
3	— (5)	— (5)	— (5)	— (5)	— (5)	— (5)	— (5)	— (5)
Erzielt	4,04	4,08	4,21	4,07	4,06	4,05	4,03	4,05

Rechnungszinsfuß und durchschnittlich erzielter Zinsfuß der in der Schweiz tätigen Gesellschaften 1907.

%	Gesellschaften				
	schweizer.	deutsche	französische	englische	amerikan.
	verwenden den nebenstehenden Zinsfuß in ··· Tarifen				
4	3 (3)	2 —	23 (4)	— —	8 (4)
$3^3/_4$	— (2)	— —	— —	— —	— —
$3^1/_2$	10 (3)	8 (10)	5 (13)	— (2)	2 (6)
3	— —	7 (1)	— —	3 (6)	1 —
$2^3/_4$	— —	— —	— —	1 —	— —
$2^1/_2$	— —	— —	— —	1 —	— —
Erzielt	4,15	4,12	3,86	4,00	4,50

Wie schon bemerkt worden, kommen in der *sozialen Versicherung* für die Wahl des Rechnungszinsfußes zum Teil andere Gesichtspunkte in Betracht. Vor allem handelt es sich hier mit Rücksicht auf die

1) Die privaten Versicherungsunternehmungen etc., 1898—1905, Wien 1901 bis 1909.

2) Bericht des eidgen. Versicherungsamtes über die privaten Versicherungsunternehmungen in der Schweiz 1907, Bern 1909.

zu versichernden Bevölkerungskreise darum, die Beiträge möglichst niedrig zu bemessen; hierfür ist aber nicht nur der Versicherungsplan, sondern auch der Zinsfuß maßgebend: je höher die Kapitalien verzinst werden, um so mäßiger fallen die Beiträge aus. Die Gewinnbildung hat hier nur dem Zweck der Ansammlung ausreichender Rücklagen zur Sicherung der Einrichtung gegen außergewöhnliche Störungen zu dienen; besteht Versicherungszwang, so entfallen die Aufwendungen für die Erneuerung des Versichertenbestandes. Da es sich ferner in der sozialen Versicherung um Ereignisse handelt, bei denen auf große Beständigkeit nicht gerechnet werden kann, so lassen schon die statistischen Grundlagen eine Rechnung auf lange Zeit nicht zu und müssen von Zeit zu Zeit revidiert werden; bei solcher Gelegenheit wird auch die Zulässigkeit der Beibehaltung des Zinsfußes zu prüfen sein. So nimmt der Entwurf des österreichischen Gesetzes betreffend die Sozialversicherung den Rechnungszinsfuß mit 4% an, sieht aber eine Revision der Rechnungen vor Ablauf von 12 Jahren vor. Das österreichische Privatbeamtengesetz rechnet mit $3\frac{1}{2}$%, vorläufig für einen Zeitraum von 20 Jahren.

Aus diesen Erwägungen ist der Schluß zu ziehen, daß soziale Versicherungseinrichtungen mit Zwangsprinzip den Rechnungszinsfuß näher an den wirklich erzielbaren heranrücken dürfen.

257. Auf die Verzinsung bezügliche Größen und Formeln. Der einfachste Ausdruck der Verzinsungsstärke eines Kapitals besteht in der Angabe des wirklichen *Zinsfußes*, d. i. des am Ende des Jahres fälligen einjährigen Zinses vom Kapital 1 (beliebige Geldeinheit). Er werde mit i bezeichnet.[1] Dann ist $100i$ der *Prozentsatz*, d. i. der in gleicher Weise definierte Zins vom Kapital 100. Demnach entsprechen die Werte $i = 0{,}03,\ 0{,}035,\ 0{,}04,\ 0{,}045, \cdots$ den Prozentsätzen 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, $\cdots$.

Zu dem Zinsfuße tritt der Verzinsungsmodus. Man unterscheidet *einfache* und *zusammengesetzte* Verzinsung; bei den Lebensversicherungsrechnungen tritt namentlich der letztere Modus in Kraft.

Bei der einfachen Verzinsung wächst der Zinsertrag proportional mit der Anzahl der Jahre, durch welche das Kapital zinstragend angelegt ist, so daß das Kapital 1 bei dem Zinsfuße i in n Jahren den Zins ni abwirft und auf die Höhe $1 + ni$ anwächst.

---

1) In diesem Teile des Buches wird von der durch die englischen Aktuare ausgebildeten Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht, die sich durch einen hohen Grad von Konsequenz auszeichnet und immer weitere Verbreitung findet, wie dies aus den Verhandlungen der bisher abgehaltenen internationalen Aktuarenkongresse und aus der neueren versicherungstechnischen Literatur hervorgeht. Eine Zusammenstellung dieser Bezeichnungen, deren sich auch das Text-Book bedient, befindet sich in den „Transactions of the second International Actuarial Congress, London 1898".

Wird jedoch bedungen, daß von dem jährlichen Zinse i nach jedem m-tel des Jahres die entsprechende Quote $\frac{i}{m}$ fällig, aber nicht ausbezahlt, sondern zum Kapital geschlagen (kapitalisiert) und von da ab in derselben Weise weiter verzinst werde, so tritt zusammengesetzte Verzinsung oder die Ansammlung von Zinseszins ein, und aus dem Kapital 1 wird am Ende des ersten Jahres

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m,$$

so daß der wirkliche Zinsertrag dieses Jahres

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

ist. In n Jahren erreicht das Kapital unter diesen Umständen die Höhe

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \tag{1}$$

und liefert den Zins

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1 .$$

Der Annahme $m = 1$ entspricht *ganzjährliche* Kapitalisierung der Zinsen; bei dieser erreicht 1 in n Jahren die Höhe

$$(1 + i)^n; \tag{2}$$

$1 + i$ heißt der *Aufzinsungsfaktor.*

Der Annahme $m = \infty$ entspricht *kontinuierliche* Verzinsung, also bildlich ein gleichmäßiges Fließen des Zinses, der für jedes Zeitteilchen proportional ist diesem und dem Kapital an seinem Beginne; bei ihr erreicht, weil

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = e^i, \tag{3}$$

wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet, das Kapital 1 im ersten Jahre die Höhe

$$e^i$$

und in n Jahren die Höhe

$$e^{ni},$$

liefert also den Zins $e^i - 1$, beziehungsweise $e^{ni} - 1$.

In dem Ansatze

$$1 + i^{(m)} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \tag{4}$$

bedeutet $i^{(m)}$ den wirklichen Zinsfuß, welcher dem Zinsfuße i bei m-maliger Kapitalisierung während des Jahres äquivalent ist; ein Kapital, zu diesem Zinsfuße mit ganzjähriger Kapitalisierung der Zinsen angelegt, erreicht in einer beliebigen Anzahl von Jahren die-

selbe Höhe, wie wenn es zum Zinsfuße i, bei m-maliger Kapitalisierung der Zinsen während eines Jahres, auf dieselbe Zeit angelegt wäre. In nachstehender Tabelle sind einige Werte von $i^{(m)}$ zusammengestellt.

i	$i^{(m)}$			
	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = \infty$
0,03	0,030225	0,030339	0,030416	0,030455
0,035	0,035306	0,035462	0,035567	0,035620
0,04	0,040400	0,040604	0,040742	0,040811
0,045	0,045506	0,045765	0,045940	0,046028
0,05	0,050625	0,050945	0,051162	0,051271

Zu 4% bei monatlicher Kapitalisierung der Zinsen wächst also ein Kapital ebenso rasch wie zu 4,074% bei ganzjähriger Fälligkeit der Zinsen.

Aus der Gleichung

$$e^{\delta} = 1 + i$$

ergibt sich derjenige Zinsfuß δ, der bei kontinuierlicher Verzinsung dem Zinsfuße i bei ganzjähriger Zinsfälligkeit äquivalent ist; er ist

$$\delta = \operatorname{Log}(1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \cdots \tag{5}$$

und wird die *Verzinsungsintensität* genannt; Log bezeichnet den natürlichen Logarithmus.

In dem Ansatze

$$\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i$$

bezeichnet $j_{(m)}$ jenen *nominellen Zinsfuß*, der bei m-maliger Fälligkeit der Zinsen während eines Jahres dem wirklichen Zinsfuße i entspricht; die Auflösung ergibt

$$j_{(m)} = m\left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = i - \frac{i^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{i^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) - \cdots \tag{6}$$

$(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$ bezeichnet aber den auf einen Kapitalisierungstermin entfallenden Zins, $j_{(m)}$ ist also das m-fache dieses terminlichen Zinses. Insbesondere ist

$$j_{(\infty)} = \lim_{m=\infty} \frac{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} = \operatorname{Log}(1 + i) = \delta; \tag{7}$$

der der kontinuierlichen Verzinsung entsprechende nominelle Zinsfuß ist also gleichbedeutend mit der Verzinsungsintensität.

Der *gegenwärtige* oder *diskontierte Wert* des Kapitals 1, zahlbar nach n Jahren, ist unter der Voraussetzung, daß die Zinsen m-mal im Jahre kapitalisiert werden, gleich

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}, \tag{8}$$

und bei Vereinbarung ganzjähriger Zinsfälligkeit gleich

$$\frac{1}{(1+i)^n}; \tag{9}$$

die Größe

$$v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

heißt der *Abzinsungs-* oder *Diskontierungsfaktor.*

Man kann die Ausdrücke

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}$$

als Verallgemeinerungen der Ausdrücke

$$(1+i)^n \quad \text{und} \quad (1+i)^{-n}$$

ansehen, wenn man $\frac{1}{m}$ Jahr als Zeiteinheit, $\frac{i}{m}$ als den ihr entsprechenden Zinsfuß auffaßt; mn ist dann die Anzahl der in n Jahren enthaltenen Verzinsungstermine. Die Zinstafeln, welche die Endwerte und die Anfangswerte des Kapitals 1 bei gegebenem Zinsfuße und gegebener Anzahl von Zinsperioden angeben, können demnach ebensowohl bei ganzjähriger wie bei ratenweiser Fälligkeit der Zinsen angewendet werden. Will man z. B. den Endwert von 1 bei 5% und $\frac{1}{4}$jähriger Kapitalisierung der Zinsen nach $6\frac{3}{4}$ Jahren wissen, so geht man in die Tafel der Endwerte mit $\frac{5}{4} = 1{,}25\%$ und mit 27 Zeiteinheiten ein; und der gegenwärtige Wert von 1, zahlbar nach 8 Jahren 5 Monaten, bei Anrechnung von 6% Zinseszins und monatlicher Kapitalisierung, ergibt sich aus der Tafel der gegenwärtigen Werte bei $\frac{6}{12} = 0{,}5\%$ und 101 Zeiteinheiten.

Die Differenz zwischen einer künftig zahlbaren Summe und ihrem gegenwärtigen Werte bezeichnet man als *Diskont.*

Der allgemeine Ausdruck für den Diskont ist

$$1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn},$$

wenn i der Zinsfuß, wenn die Zinsen m-mal im Jahre kapitalisiert werden und das Kapital nach n Jahren fällig ist.

Für $m = n = 1$ ergibt sich der *Diskont* d für das Kapital 1, zahlbar nach 1 Jahr bei ganzjähriger Zinsfälligkeit:

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - v = \frac{i}{1+i} = iv; \tag{10}$$

der letzte Ausdruck gibt eine einfache Bedeutung von d: es ist der einjährige Zins des gegenwärtigen Wertes v.

Jede periodisch wiederkehrende Zahlung wird eine *Rente* genannt; ist ihre Dauer im voraus bestimmt, so heißt sie eine *sichere Rente* oder auch eine *Zeitrente.*

Der *Endwert* einer *pränumerando*, d. i. immer am Beginne des Jahres zahlbaren, sofort beginnenden und n Jahre währenden sicheren Rente 1 am Ende des n-ten Jahres beträgt bei ganzjähriger Zinsfälligkeit

$$s_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \tag{11}$$

Der *gegenwärtige Wert* der nämlichen Rente ist

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}; \tag{12}$$

insbesondere ist der gegenwärtige Wert einer immerwährend zahlbaren oder *ewigen Rente* gleich

$$a_\infty = \lim_{n=\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d} = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{iv}; \tag{13}$$

für	$i =$	0,03,	0,035,	0,04	0,045	0,05
ist	$a_\infty =$	34,333,	29,571,	26,000,	23,222,	21,000;

der gegenwärtige Wert einer immerwährenden jährlichen Zahlung von 1 ist also bei 4% Zinseszins rund 26.

Der Endwert und der gegenwärtige Wert einer *postnumerando*, d. i. immer am Ende des Jahres zahlbaren Rente ist unter den gleichen Bestimmungen wie oben beziehungsweise:

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{14}$$

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1-v^n)}{d} = \frac{1-v^n}{i}. \tag{15}$$

Nachstehende Tabelle enthält eine Zusammenstellung einiger wichtigen, auf die Verzinsung bezüglichen Größen und ihrer gemeinen Logarithmen für die gangbaren Prozentsätze.

Größe	3 %		3½ %		4 %	
	num	log	num	log	num	log
i	0,03	$\bar{2}$,4771213	0,035	$\bar{2}$,5440680	0,04	$\bar{2}$,6020600
$1+i$	1,03	0,0128372	1,035	0,0149403	1,04	0,0170333
$(1+i)^{\frac{1}{2}}$	1,0148892	0,0064186	1,0173495	0,0074702	1,0198039	0,0085167
$(1+i)^{\frac{1}{4}}$	1,0074171	0,0032093	1,0086374	0,0037351	1,0098534	0,0042583
v	0,9708738	$\bar{1}$,9871628	0,9661836	$\bar{1}$,9850597	0,9615385	$\bar{1}$,9829667
$v^{\frac{1}{2}}$	0,9853293	$\bar{1}$,9935814	0,9829464	$\bar{1}$,9925298	0,9805807	$\bar{1}$,9914833
$v^{\frac{1}{4}}$	0,9926875	$\bar{1}$,9967907	0,9914365	$\bar{1}$,9962649	0,9902427	$\bar{1}$,9957417
d	0,0291262	$\bar{2}$,4642840	0,0338164	$\bar{2}$,5291277	0,0384615	$\bar{2}$,5850267
δ	0,0295588	$\bar{2}$,4706868	0,0344014	$\bar{2}$,5365765	0,0392207	$\bar{2}$,5935155
$j_{(2)}$	0,0297783	$\bar{2}$,4738999	0,0346990	$\bar{2}$,5403170	0,0396078	$\bar{2}$,5977807
$j_{(4)}$	0,0296683	$\bar{2}$,4722927	0,0345498	$\bar{2}$,5384454	0,0394136	$\bar{2}$,5956464
$j_{(12)}$	0,0295952	$\bar{2}$,4712217	0,0344508	$\bar{2}$,5371992	0,0392848	$\bar{2}$,5942146

Größe	4½ %		5 %	
	num	log	num	log
i	0,045	$\bar{2}$,6532125	0,05	$\bar{2}$,6989700
$1+i$	1,045	0,0191163	1,05	0,0211893
$(1+i)^{\frac{1}{2}}$	1,0222524	0,0095581	1,0246951	0,0105946
$(1+i)^{\frac{1}{4}}$	1,0110650	0,0047791	1,0122722	0,0052973
v	0,9569378	$\bar{1}$,9808837	0,9523810	$\bar{1}$,9788107
$v^{\frac{1}{2}}$	0,9782320	$\bar{1}$,9904419	0,9759002	$\bar{1}$,9894054
$v^{\frac{1}{4}}$	0,9890562	$\bar{1}$,9952209	0,9878767	$\bar{1}$,9947027
d	0,0430622	$\bar{2}$,6340962	0,0476190	$\bar{2}$,6777807
δ	0,0440169	$\bar{2}$,6436194	0,0487902	$\bar{2}$,6883322
$j_{(2)}$	0,0445048	$\bar{2}$,6484072	0,0493902	$\bar{2}$,6936404
$j_{(4)}$	0,0442600	$\bar{2}$,6460110	0,0490889	$\bar{2}$,6909835
$j_{(12)}$	0,0440976	$\bar{2}$,6444149	0,0488892	$\bar{2}$,6892130

§ 2. Erlebensversicherungen und Renten.

258. Wert einer Anwartschaft. Erlebensversicherung. Unter einer *Anwartschaft* versteht man das Anrecht auf eine Geldsumme, die zu einem bestimmten Termine fällig wird unter der Voraussetzung, daß ein bestimmter, an sich ungewisser Tatbestand erfüllt ist.

Die Elementaraufgabe der Versicherungsrechnung besteht in der Wertbemessung von Anwartschaften.

Ist die Wahrscheinlichkeit des Tatbestandes bekannt, so versteht man unter dem gegenwärtigen oder kurzweg dem *Werte der Anwartschaft* die auf die Gegenwart diskontierte auf sie bezügliche mathematische Erwartung, also das Produkt aus drei Faktoren: aus der Summe selbst, der Wahrscheinlichkeit ihrer Realisierung und dem der Zwischenzeit entsprechenden Diskontierungsfaktor.

Dieser Wertbestimmung liegt folgende Erwägung zugrunde: Würde für eine große Anzahl gleicher Anwartschaften eine ihrem Werte gleichkommende Summe deponiert und in der Zwischenzeit zu dem der Rechnung unterlegten Zinsfuße verzinst, so erreichte sie eine Höhe, um die mit größter Wahrscheinlichkeit zu gewärtigende Anzahl „günstig“ verlaufender Fälle gerade zu befriedigen (s. Nr. 113–114).

In der Lebensversicherungsrechnung hat man es mit Anwartschaften zu tun, die vom Leben und Sterben, im weiteren Sinne von bestimmten Zuständen der Menschen abhängen.

Eine Person des Alters x, welcher für den Fall und für den Moment, wo sie das höhere Alter $x+n$ erreicht, eine bestimmte Summe zugesichert ist, befindet sich im Besitze einer Anwartschaft, die man als *Erlebensversicherung*, auch Erlebensfallversicherung bezeichnet; n ist die Dauer derselben.

Ist K das versicherte Kapital, ${}_np_x$ die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Gesamtheit der versicherten Personen eine solche des Alters x das Alter $x+n$ erlebt, v der dem gewählten Zinsfuße entsprechende Abzinsungsfaktor, endlich ${}_nE_x$ der Wert der Versicherung, so gilt der Ansatz:

$$ {}_nE_x = K\,{}_np_x v^n. $$

Weil K in dieser Formel eine von x und n unabhängige Rolle spielt, so wird in den allgemeinen Rechnungen das versicherte Kapital mit 1 angenommen; alsdann ist

$$ {}_nE_x = v^n\,{}_np_x. \qquad (1) $$

Wenn die Absterbeordnung der versicherten Gesamtheit in Form einer Sterbetafel der üblichen Gestalt (s. § 3, Abschnitt II des dritten Teiles) gegeben ist, so drückt sich ${}_np_x$ durch die Zahlen der Lebenden wie folgt aus:

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}; $$

dadurch wird

$$ {}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}. $$

Für die praktische Durchführung der Rechnungen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, aus den Zahlen l_x der Sterbetafel die Zahlen

$$D_x = v^x l_x \tag{2}$$

abzuleiten, die man die *diskontierten Zahlen der Lebenden* nennt. Mittels dieser ergibt sich die fundamentale Formel für die Erlebensversicherung:

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{3}$$

Eine andere Schlußfolgerung zur Ableitung dieser Formel ist die folgende: Von l_x Personen des Alters x, deren jede eine Erlebensversicherung vom Betrage 1 zum Alter $x+n$ abschließt, erleben der wahrscheinlichsten Kombination gemäß l_{x+n} dieses höhere Alter, während $l_x - l_{x+n}$ vorher sterben; an die Überlebenden kommt die Summe l_{x+n} zur Auszahlung, deren gegenwärtiger Wert $v^n l_{x+n}$ ist; der auf eine Person entfallende Anteil dieser Anwartschaft ist somit

$$\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}.$$

Aus der Tafel VIII, welche die Erfahrungen H^M der 20 britischen Gesellschaften in der Ausgleichung des Text-Book wiedergibt und mit $3\frac{1}{2}\,\%$ rechnet, ist beispielsweise

$$D_{30} = 31953, \quad D_{60} = 7469{,}1$$

zu entnehmen; hiernach ist der Wert der Erlebensversicherung 1 einer 30jährigen Person zum vollendeten 60. Lebensjahre

$$_{30}E_{30} = \frac{7469{,}1}{31953} = 0{,}2337,$$

der Wert einer solchen Versicherung auf 100 *M* also 23,37 *M*.

259. Begriff der Rente. Die Pränumerando-Leibrente. Unter einer *Rente* im versicherungstechnischen Sinne versteht man, in des Wortes einfachster Bedeutung, die periodisch wiederkehrende Zahlung eines voraus bestimmten Betrages, deren effektive Dauer von der Dauer eines bestimmten Zustandes der (zahlenden oder empfangenden) Person abhängt. Im gewöhnlichen Falle beträgt die Periode ein Jahr.

Besteht der Zustand darin, daß die Person, an welche die Rente gebunden ist, *lebt*, so nennt man die Rente eine *Leibrente*.

Die *pränumerando* zahlbare oder *vorschüssige Leibrente* 1, deren erste Zahlung sofort, die letzte am Beginne des Sterbejahres der Person (x) erfolgt, stellt sich als eine Summe von Erlebensversicherungen dar, deren erste sofort und sicher, die zweite, dritte, $\cdots$ nur dann zur Auszahlung kommt, wenn die Person nach einem, zwei, $\cdots$ Jahren am Leben ist; bezeichnet man ihren Wert mit a_x, mit $\omega - 1$ das höchste Alter (in ganzen Jahren), das noch vollendet werden kann, so ist

$$\mathfrak{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{\omega-1-x}E_x;$$

drückt man die E nach der Formel (3) aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}, \tag{4}$$

wenn

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots \tag{5}$$

gesetzt und die Summierung bis zum Schlusse der Tafel geführt wird.

Die Zahlen N_x treten unter dem Namen *Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden* als zweite Kolumne zu den Zahlen D_x hinzu.

Aus der Formel (4) ergibt sich durch die folgende Zerlegung einer Rekursionsformel zur Berechnung der Rentenwerte für alle Alter; es ist

$$\mathfrak{a}_x = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x}\,\frac{N_{x+1}}{D_{x+1}}$$

d. i.

$$\mathfrak{a}_x = 1 + v p_x \mathfrak{a}_{x+1}. \tag{4*}$$

Geht man vom höchsten Alter $\omega - 1$ aus, bei dem noch Lebende vorhanden sind und für das $\mathfrak{a}_{\omega-1} = 1$ ist, so kann man mit Hilfe der Lebenswahrscheinlichkeiten und des Abzinsungsfaktors alle Renten berechnen.

Diese Art der Rentenberechnung ist in England von George Barrett 1786 zuerst ersonnen worden; die umfangreichen, danach berechneten Tafeln hat jedoch ihr Verfasser nicht veröffentlicht. Erst durch Francis Baily ist das Verfahren 1812 der Royal Society bekannt gegeben und 1813 in der Schrift: „Doctrine of Life Annuities and Assurances“ veröffentlicht worden. Auf dem Kontinent kam jedoch Johann Nic. Tetens den Engländern zuvor, der schon 1785 das nämliche Verfahren in dem Werke: „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten“ (Leipzig, 2 Bde., 1785—1786) vorführte; ihm gebührt daher die Priorität der Erfindung der diskontierten Zahlen, die so wichtig geworden ist für die Entwicklung der Lebensversicherungsrechnung.[1])

Tafel VIII enthält sowohl die Kolonnen der Zahlen D und N, als auch die Werte der Pränumerando-Leibrente für alle Alter; hiernach ist beispielsweise der Wert der Leibrente 1 einer 30jährigen Person:

$$\mathfrak{a}_{30} = 19{,}441,$$

1) Text-Book II, p. 108 ff.; G. Bohlmann, Encykl. der mathem. Wissenschaften I, p. 876. — Nach einer Bemerkung L. Goldschmidts (Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des V. intern. Kongr. f. Versicher.-Wissensch., Berlin 1906, III, p. 232) steht die Priorität nicht fest und erscheint es nicht ausgeschlossen, daß die Methode doch nach England, vielleicht auf Simpson, zurückführt.

der Wert einer solchen Rente im jährlichen Betrage von 100 gleich 1944,1.

260. Die Postnumerando-Leibrente. Zum Unterschiede von der vorigen ist diese Rente, auch nachschüssige Rente genannt, zahlbar am *Ende* eines jeden Jahres, das die Person (x) durchlebt, zum letztenmale daher am Ende des dem Todesjahre vorangehenden Lebensjahres. Gegenüber der pränumerando zahlbaren Rente entfällt die erste sofortige Zahlung des Betrages 1, im übrigen verhält sich alles wie dort. Bezeichnet man also ihren Wert mit a_x, so ist

$$a_x = \mathfrak{a}_x - 1, \tag{6}$$

und in den Zahlen D, N ausgedrückt:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{7}$$

Man braucht in der Tafel VIII die Zahlen der Kolonne $\mathfrak{a}_x$ nur je um 1 zu vermindern, um die Werte der postnumerando oder nachschüssig zahlbaren Rente zu erhalten. Für eine 30jährige Person z. B. hat eine solche Rente vom Betrage 1 den Wert 18,441.

Man kann mit gleichem Rechte die vorschüssige wie die nachschüssige Rente als das Primäre betrachten. Aus der Voranstellung der nachschüssigen Rente ist die bei den englischen Aktuaren ursprünglich üblich gewesene Definition der Summen N_x, derzufolge unter N_x die Summe $D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$ verstanden wurde, zu erklären, so daß dann $\frac{N_x}{D_x}$ der Ausdruck für die *nachschüssige* Rente war. In den neueren Tabellen, die aus Anlaß der Messung 1863—1893 angelegt worden sind, wird die Summe N_x im obigen Sinne (5) geführt, zum Unterschiede zu der früheren Auffassung aber typographisch anders $(\mathbf{N}_x)$ dargestellt. Auf diesen Umstand muß genau geachtet werden, will man sich vor Verwechslungen bewahren.

261. Aufgeschobene und temporäre Rente. Eine Leibrente heißt *aufgeschoben*, wenn ihr eventueller Beginn auf einen späteren Termin festgesetzt ist. Sie heißt *temporär* oder eine kurze Rente, wenn ihre maximale Dauer nach oben hin begrenzt ist. Beide Merkmale können auch zusammentreffen, und man spricht dann von einer *aufgeschobenen kurzen* Rente.

Die um n Jahre *aufgeschobene* Pränumerando-Leibrente auf die Person (x), zum erstenmal also zahlbar nach n Jahren und dann jedes folgende Lebensjahr bis zum Tode, hat als Summe der Erlebensversicherungen ${}_nE_x$, ${}_{n+1}E_x$, $\cdots$ den Wert

$${}_{n|}\mathfrak{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}; \tag{8}$$

die in gleicher Weise definierte Postnumerando-Rente, die also zum erstenmal am Ende des $n+1$-ten Jahres fällig wird, hätte das Zeichen $_{n|}a_x$ gleichbedeutend mit $_{n+1}\mathfrak{a}_x$ und den Ausdruck $\frac{N_{x+n+1}}{D_x}$. Man bemerkt, daß die Postnumerando-Leibrente gleichbedeutend ist mit der um 1 Jahr aufgeschobenen Rente, daß also $a_x = {}_{1|}\mathfrak{a}_x$.

Zwischen der um n Jahre aufgeschobenen und der Rente einer $x+n$ Jahre alten Person besteht ein einfacher bemerkenswerter Zusammenhang; aus (8) und $\mathfrak{a}_{x+n} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$ folgt nämlich

$$_{n|}\mathfrak{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\mathfrak{a}_{x+n} = {}_nE_x\mathfrak{a}_{x+n} = v^n\,{}_np_x \cdot \mathfrak{a}_{x+n}. \tag{8*}$$

Zu dieser Beziehung gelangt man auch durch folgende Überlegung. In den Bezug der aufgeschobenen Rente kommt (x) nur dann, wenn er das Alter $x+n$ erreicht, wofür $_np_x$ die Wahrscheinlichkeit ist; in diesem Augenblicke hat für ihn die Rente den Wert $\mathfrak{a}_{x+n}$; folglich ist der gegenwärtige Wert seiner Anwartschaft $v^n\,{}_np_x\mathfrak{a}_{x+n}$.

Die auf n Jahre abgekürzte *temporäre* Rente, die also höchstens n-mal zur Auszahlung kommt, ist als Summe der Erlebensversicherungen $_0E_x\,(=1)$, $_1E_x$, $\cdots$ $_{n-1}E_x$ gleich

$$\frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x};$$

bezeichnet man also ihren Wert durch $_{|n}\mathfrak{a}_x$, so ist:

$$_{|n}\mathfrak{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \mathfrak{a}_x - {}_{n|}\mathfrak{a}_x. \tag{9}$$

Der letzte Ansatz bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß die temporäre Rente gleichkommt der lebenslänglichen vermindert um die um ihre Dauer aufgeschobene Rente.[1])

Die um n Jahre *aufgeschobene*, auf m Jahre abgekürzte *temporäre* Rente, die zum erstenmal nach n Jahren und dann höchstens m-mal zur Auszahlung kommt, stellt sich als Summe der Erlebensversicherungen $_nE_x$, $_{n+1}E_x$, $\cdots$ $_{n+m-1}E_x$ dar; bezeichnet man ihren Wert mit $_{n|m}\mathfrak{a}_x$, so ist

$$\begin{aligned} _{n|m}\mathfrak{a}_x &= \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots + D_{x+n+m-1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x} = {}_{n|}\mathfrak{a}_x - {}_{n+m|}\mathfrak{a}_x. \end{aligned} \tag{10}$$

---

1) Neben dem Zeichen $_{|n}\mathfrak{a}_x$ für die temporäre Rente ist auch das Zeichen $\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}$ gebräuchlich.

262. Mittlere Zahlungsdauer einer Leibrente. Beziehungen zwischen der Leibrente und einer Zeitrente. Die Zahlungsdauer einer Leibrente ist unbestimmt und für verschiedene Personen desselben Alters x ungleich. Ihr Mittelwert ist die abgekürzte mittlere Lebensdauer e_x als Durchschnitt der vollen Jahre, welche Personen dieses Alters zu durchleben haben (s. Nr. 214).

Es ist aber ein Irrtum, zu glauben, die Leibrente einer Person (x) könne als sichere Rente für die mittlere Lebensdauer e_x gerechnet werden. Es läßt sich vielmehr erweisen, daß die Leibrente kleiner ist als die so gerechnete Zeitrente.

Beträgt die abgekürzte Lebenserwartung $n + \delta$, wo n die vollen Jahre und δ einen Bruchteil bedeutet, so ist der Wert der Zeitrente

$$\mathfrak{a}_{\overline{n+\delta|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^n + \delta v^{n+1},$$

weil am Beginne des 1., 2., $\cdots \overline{n+1}$-ten Jahres je 1, am Beginne des $\overline{n+2}$-ten Jahres der Betrag δ entsprechend dem durchlebten Bruchteile des letzten Jahres zu bezahlen ist. Hingegen ist die Leibrente

$$\mathfrak{a}_x = 1 + v_1p_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^\varkappa{}_\varkappa p_x,$$

wobei $x + \varkappa = \omega - 1$.

Demzufolge ist

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_{\overline{n+\delta|}} - \mathfrak{a}_x \\
&= v(1 - {}_1p_x) + v^2(1 - {}_2p_x) + \cdots + v^n(1 - {}_np_x) \\
&\qquad + v^{n+1}(\delta - {}_{n+1}p_x) - v^{n+2}{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa{}_\varkappa p_x \\
&> v^{n+1}[1 - {}_1p_x + 1 - {}_2p_x + \cdots + 1 - {}_np_x + \delta - {}_{n+1}p_x] \\
&\qquad - v^{n+2}{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa{}_\varkappa p_x \\
&= v^{n+1}[n + \delta - {}_1p_x - {}_2p_x - \cdots - {}_{n+1}p_x] \\
&\qquad - v^{n+2}{}_{n+2}p_x - \cdots - v^\varkappa{}_\varkappa p_x;
\end{aligned}$$

da nun

$$e_x = n + \delta = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega-1}}{l_x} = {}_1p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_\varkappa p_x,$$

so ist

$$n + \delta - {}_1p_x - {}_2p_x - \cdots - {}_{n+1}p_x = {}_{n+2}p_x + \cdots + {}_\varkappa p_x,$$

daher, wie leicht zu erschließen,

$$\mathfrak{a}_{\overline{n+\delta|}} - \mathfrak{a}_x > 0,$$

also, wie behauptet worden,

$$\mathfrak{a}_x < \mathfrak{a}_{\overline{n+\delta|}}.$$

Der Grund hiervon ist folgender: Wenn man von der Diskontierung absieht, so stellt sich die durchschnittliche Zahlung an einen

Leibrentner (x) auf $1 + {}_1p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_xp_x$, d. i. auf $n + \delta + 1$, als ebenso hoch, als wenn er durch die Zeit e_x die sichere Rente 1 bezogen haben würde. Im Falle der Leibrente erstrecken sich aber die eventuellen Zahlungen über eine längere Dauer, werden daher von der Diskontierung stärker getroffen als bei der Zeitrente.

263. Veränderliche Renten. Bisher ist angenommen worden, daß der Betrag der Rente durch ihre ganze Dauer konstant bleibe. In der Versicherungspraxis kommen aber auch veränderliche, insbesondere in arithmetischer Progression wachsende Renten vor. Einige wichtige Formen veränderlicher Renten sollen im nachfolgenden entwickelt werden.

1) Eine pränumerando zahlbare Leibrente auf das Leben (x), die mit 1 beginnt und jährlich um 1 steigt, ergibt sich als Summe der Erlebensversicherungen

$$(n+1)\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

von $n = 0$ bis $n = \omega - 1 - x$; denn nach Ablauf von n Jahren, am Beginne des $\overline{n+1}$ten, beträgt die Auszahlung $n + 1$. Bezeichnet man den Wert dieser Rente mit $(Ia)_x$, so ist hiernach

$$(Ia)_x = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+1} + \cdots}{D_x}.$$

Dies läßt folgende Darstellung zu. Es ist

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots &= N_x \\ D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots &= N_{x+1} \\ D_{x+2} + \cdots &= N_{x+2} \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

führt man als weitere Hilfszahlen die Summen

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots \tag{11}$$

ein, die sich gegenüber den Zahlen D_x als *Doppelsummen* erweisen, indem $N_x = \Sigma D_x$, $S_x = \Sigma N_x = \Sigma\Sigma D_x$, so schreibt sich

$$(Ia)_x = \frac{S_x}{D_x}. \tag{12}$$

Tafel VIII enthält auch die Kolonne der Zahlen S_x. Danach ist beispielsweise der Wert einer in obiger Weise definierten Leibrente eines 30jährigen

$$(Ia)_{30} = \frac{9\,656\,078}{31\,953} = 302{,}196.$$

Man kann die vorliegende Rente auch als eine Summe von Renten auffassen, deren erste sofort beginnt, während jede folgende gegen die vorangehende um ein Jahr aufgeschoben ist; demnach ist

$$(Ia)_x = a_x + {}_{1|}a_x + {}_{2|}a_x + \cdots,$$

und dies führt mit Benutzung der Formel (8), Nr. 261, unmittelbar zur Formel (11).

2) Allgemeiner: der Wert einer mit k beginnenden, jährlich um h wachsenden, beziehungsweise abnehmenden Leibrente auf das Leben von (x) ist die Summe der Anwartschaften

$$(k \pm nh)\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

von $n = 0$ angefangen bis zum Schlusse der Tafel; gebraucht man das Zeichen $(va)_x$ für eine in dieser allgemeinen Art variierende Rente, so ergibt sich:

$$(va)_x = \frac{kD_x + (k \pm h)D_{x+1} + (k \pm 2h)D_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

$$= \frac{k(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots) \pm h(D_{x+1} + 2D_{x+2} + \cdots)}{D_x}$$

$$= \frac{kN_x \pm hS_{x+1}}{D_x}. \tag{13}$$

Im Falle des unteren Zeichens sind k, h an die Relation $hS_{x+1} < kN_x$ gebunden, soll der Wert der Rente nicht negativ werden.

Für $k = 1$, $h = 1$ und das obere Zeichen geht (13) in (12) über.

3) Die auf n Jahre abgekürzte, mit 1 beginnende und jährlich um 1 steigende Rente auf das Leben (x) werde mit $(Ia)_{x\overline{n}|}$ bezeichnet; zunächst ergibt sich für sie der Ausdruck:

$$(Ia)_{x\overline{n}|} = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + nD_{x+n-1}}{D_x};$$

mit Hilfe der Kolumnen N und S läßt aber der Zähler eine einfachere Berechnung zu; es ist nämlich:

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} &= N_x - N_{x+n} \\ D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} &= N_{x+1} - N_{x+n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ D_{x+n-1} &= N_{x+n-1} - N_{x+n}; \end{aligned}$$

die Summe der linken Seiten ergibt den Zähler, die der rechten ist $S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}$; mithin hat man

$$(Ia)_{x\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}. \tag{14}$$

Mit Hilfe der Tafel VIII ergibt sich beispielsweise die auf 20 Jahre abgekürzte steigende Rente eines 30jährigen

$$(Ia)_{30,\overline{20}|} = \frac{9\,656\,078 - 2\,012\,538 - 20 \cdot 184\,709}{31\,953} = 123{,}599.$$

4) Die mit 1 beginnende, jährlich, jedoch nur $n-1$mal, um 1 steigende und von da ab konstant bleibende Leibrente auf das Leben (x) werde mit $(I_{\overline{n}|}\mathrm{a})_x$ bezeichnet; ihr Wert hat zunächst den Ausdruck:

$$(I_{\overline{n}|}\mathrm{a})_x = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + nD_{x+n-1} + nD_{x+n} + nD_{x+n+1} + \cdots}{D_x};$$

für den Zähler kann aber

$$D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots - (D_{x+n} + 2D_{x+n+1} + 3D_{x+n+2} + \cdots)$$

geschrieben werden; demnach ist

$$(I_{\overline{n}|}\mathrm{a})_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x}. \tag{15}$$

Die durch 20 Jahre, von 1 bis zum Betrage 20, ansteigende und von da ab konstant bleibende Rente eines 30jährigen, mit den Grundlagen der Tafel VIII gerechnet, ist

$$(I_{\overline{20}|}\mathrm{a})_{30} = \frac{9\,656\,078 - 2\,012\,538}{31\,953} = 239{,}212.$$

264. Rentenberechnung aus Selekttafeln. Im vorstehenden ist stillschweigend an vollständige Aggregattafeln gedacht, die im Gebrauche die vorherrschenden sind. Die Formeln können auch für abgestutzte Aggregattafeln als geltend angesehen werden, wenn nur die Zahlen der Lebenden einer solchen entnommen sind. Da eine abgestutzte Tafel strengere Sterbenswahrscheinlichkeiten, also kleinere Lebenswahrscheinlichkeiten aufweist, so werden die nach ihr gerechneten Rentenwerte niedriger ausfallen; doch wird der Unterschied mit steigendem Alter immer geringer werden, weil die zur Ausscheidung gelangenden Beobachtungen an Umfang abnehmen.

Zu einer Bewertung der Renten, bei der die Wirkung der Auslese zum Ausdruck kommt, führen Selekttafeln. Ist x das Beitritts- oder Ankaufsalter, so hat sich die Rechnung auf die Zahlenreihe

$$l_{[x]},\quad l_{[x]+1}, \cdots l_{[x]+9},\quad l_{x+10},\quad l_{x+11}, \cdots$$

zu stützen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Tafel die ersten 10 Versicherungsjahre auseinander hält und daran die Schlußtafel für alle höheren Versicherungsdauern fügt, der die Zahlen von l_{x+10} aufwärts entnommen sind. Aus den diskontierten Zahlen

$$D_{[x]} = v^x l_{[x]},\ D_{[x]+1} = v^{x+1} l_{[x]+1}, \cdots D_{[x]+9} = v^{x+9} l_{[x]+9},$$
$$D_{x+10} = v^{x+10} l_{x+10}, \cdots \tag{16}$$

und ihrer Summe

$$N_{[x]} = D_{[x]} + D_{[x]+1} + \cdots + D_{[x]+9} + D_{x+10} + \cdots \tag{17}$$

ergibt sich der Wert der Leibrente für das Eintrittsalter x:

$$\mathrm{a}_{[x]} = \frac{N_{[x]}}{D_{[x]}}. \tag{18}$$

Mittels der Formeln (16) und (17) berechnen sich zur zweifach abgestuften Sterbetafel analog angeordnete Tafeln der D und der N, nach Erfordernis auch der S.

Bei einer aufgeschobenen Rente, deren Aufschubsdauer $n < 10$ ist, hat man zu schreiben:

$$_{n|}a_{[x]} = \frac{N_{[x]+n}}{D_{[x]}}; \qquad (n < 10) \qquad (19)$$

ist die Aufschubsdauer $n \gtreqless 10$, so stützt sich der Zähler bloß auf die Schlußtafel und die Formel lautet dann:

$$_{n|}a_{[x]} = \frac{N_{x+n}}{D_{[x]}} \qquad (n \gtreqless 10). \qquad (20)$$

Eine temporäre Rente berechnet sich aus einer Selekttafel nach der Formel

$$_{n|}a_{[x]} = \frac{N_{[x]} - N_{[x]+n}}{D_{[x]}}, \qquad (21)$$

in der $N_{[x]+n}$ durch N_{x+n} zu ersetzen ist, sobald n die berücksichtigten Anfangsjahre (z. B. 10) erreicht oder überschritten hat.

Zur Beurteilung der Größenverhältnisse von Renten, die sich auf vollständige und abgestutzte Aggregattafeln und auf Selekttafeln stützen, diene die nachstehende Tabelle, deren Zahlen den British Office Life Tables 1893 entnommen sind.

Alter	O^M	$O^{M(5)}$	Beitritts-alter	$O^{[M]}$	(1)—(2)		(3)—(1)	
x	a_x (1)	a_x (2)	$[x]$	a_x (3)	absol.	in % von (1)	absol.	in % von (1)
20	21,808	21,299	20	21,521	0,509	2,33	— 0,288	— 1,33
30	19,769	19,542	30	19,793	227	1,15	+ 024	+ 0,12
40	17,298	17,204	40	17,511	094	0,54	213	1,23
50	14,330	14,282	50	14,693	048	34	363	2,53
60	10,972	10,953	60	11,525	019	17	553	5,04
70	7,616	7,614	70	8,371	002	03	755	9,93
80	4,771	4,770	.		001	02	.	.
90	2,773	2,773	.		000	00	.	.
100	1,547	1,547	.		000	00	.	.

Bei den Selektwerten der Rente wächst der Einfluß mit dem zunehmenden Beitrittsalter und wird so erheblich, daß er bei dem Alter 70 nahe 10% des Aggregatwertes erreicht.

§ 3. Todesfallversicherung.

265. Darstellung einer normalen, lebenslänglichen Todesfallversicherung durch die Leibrente. Eine Anwartschaft, die von dem Sterben einer bestimmten Person abhängt, wird eine *Todes-*

fallversicherung genannt. Wird das versicherte Kapital ausbezahlt, wann auch der Tod eintreten möge, so daß die Realisierung des Kapitals sicher und nur ihr Zeitpunkt unbestimmt ist, so heißt die Versicherung eine *lebenslängliche* oder vollständige.

Die normalen Bedingungen, unter welchen solche Versicherungen abgeschlossen zu werden pflegen, sind die folgenden. Die Zählung der *Versicherungsjahre* erfolgt vom Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses; in diesem Zeitpunkte wird, wenn er nicht zufällig mit dem Geburtstage der Person, auf deren Ableben die Versicherung abgeschlossen wird, dieser jenes Alter x zugeschrieben, das sie an dem dem Abschlusse nächstliegenden Geburtstage besitzt. Die Auszahlung des versicherten Kapitales erfolgt am Ende jenes Versicherungsjahres, in welchem der Tod von (x) eintritt (an den Überbringer der Police oder an eine in der Police namhaft gemachte Person).

Sowie Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit in einfacher Beziehung zu einander stehen, weisen auch die Werte der Rente und der Ablebensversicherung auf ein und dasselbe Leben einen engen Zusammenhang auf.

Rechnet man den Wert einer Rente 1, zahlbar am *Ende* jedes Jahres, in welches die Person (x) *eintritt* — und das ist offenbar der um ein Jahr diskontierte Wert der auf die Person begründeten Pränumerando-Leibrente — und subtrahiert davon den Wert einer Rente 1, zahlbar am *Ende* jedes Jahres, das die Person *vollendet* — und das ist die ihrem Alter entsprechende Postnumerando-Leibrente —, so heben sich alle Zahlungen auf bis auf die am Ende des Todesjahres zu leistende Zahlung 1, und diese stellt die im obigen Sinne definierte Todesfallversicherung dar; bezeichnet man ihren Wert mit A_x, so ist also:

$$A_x = v\mathbf{a}_x - a_x = v\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x + 1 = 1 - (1-v)\mathbf{a}_x = 1 - d\mathbf{a}_x. \qquad (22)$$

Man hat hiernach, um den Wert der Todesfallversicherung zu erhalten, die mit dem Diskont multiplizierte Leibrente von der Einheit zu subtrahieren.

266. Direkte Bestimmung des Wertes einer Todesfallversicherung. Die Wahrscheinlichkeit, daß die versicherte Person (x) im Laufe des ν-ten Jahres, vom Abschlusse der Versicherung gerechnet, sterben werde, ist

$$_{\nu-1|}q_x = \frac{d_{x+\nu-1}}{l_x};$$

folglich hat die diesen Fall betreffende Anwartschaft auf das Kapital 1 den Wert

$$v^\nu\,_{\nu-1|}q_x = v^\nu \frac{d_{x+\nu-1}}{l_x} = \frac{v^{\nu+x} d_{x+\nu-1}}{v^x l_x};$$

führt man als neue Hilfsgrößen die Zahlen

$$C_x = v^{x+1} d_x \tag{23}$$

unter dem Namen der *diskontierten Zahlen der Toten* ein, so schreibt sich der Wert jener Anwartschaft

$$\frac{C_{x+\nu-1}}{D_x}. \tag{24}$$

Da nun der Tod im ersten, zweiten, $\cdots \overline{\omega - x}$-ten und nur in einem dieser Jahre eintreten kann, so ist die Summe der auf diese Eventualitäten bezüglichen Werte (24) der Wert der ganzen Versicherung, also

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{\omega-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}, \tag{25}$$

wenn zu den Zahlen C_x auch ihre Summenreihe, also die Reihe der Zahlen

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots \tag{26}$$

eingeführt wird.

Tafel VIII enthält die Kolonnen C_x, M_x und auch schon die ausgerechneten Werte A_x. Beispielsweise hat die Todesfallversicherung eines 30-jährigen auf das Kapital 1 nach den Grundlagen dieser Tafel den Wert 0,34257, auf das Kapital von 1000 also 342,57.

Die Übereinstimmung der Formeln (22) und (25) ist leicht zu erweisen. Ersetzt man in (23) d_x durch die Differenz $l_x - l_{x+1}$, so wird

$$C_x = v^{x+1} l_x - v^{x+1} l_{x+1} = v D_x - D_{x+1};$$

daraus ergibt sich durch Summierung:

$$M_x = v N_x - N_{x+1} = v N_x - N_x + D_x$$

und nach Division durch D_x:

$$A_x = v \mathrm{a}_x - \mathrm{a}_x + 1 = 1 - (1 - v)\mathrm{a}_x.$$

267. Aufgeschobene und temporäre Todesfallversicherungen. Summiert man den Ausdruck

$$\frac{C_{x+\nu-1}}{D_x}, \tag{α}$$

welcher den Wert der Anwartschaft 1 der Person (x) für den Fall ihres Ablebens im ν-ten Jahre darstellt, erst von $\nu = n + 1$ an, so heißt dies, daß in den n ersten Jahren nach Abschluß der Versicherung der Tod keine Anwartschaft begründet (Karenzzeit von n Jahren); die Todesfallversicherung heißt dann eine (um n Jahre) *aufgeschobene*, und ihr Wert ist

$${}_{n|}A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} = {}_nE_x A_{x+n}. \tag{27}$$

Nach den Daten der Tafel VIII hat eine um 10 Jahre aufgeschobene Versicherung des Kapitales 1 auf den Todesfall einer 30-jährigen Person den Wert

$$_{10|}A_{30} = \frac{8761,58}{31\,953} = 0,27420$$

gegenüber dem Werte 0,34257 einer sofort beginnenden Versicherung.

Aus der am Schlusse der vorigen Nummer benützten Relation

$$C_x = vD_x - D_{x+1}$$

folgt auch

$$M_{x+n} = vN_{x+n} - N_{x+n+1}$$

und daraus

$$_{n|}A_x = v_{n|}\mathfrak{a}_x - {}_{n+1|}\mathfrak{a}_x, \tag{28}$$

wodurch die aufgeschobene Todesfallversicherung durch aufgeschobene Renten ausgedrückt erscheint.

Summiert man (α) von $\nu = 1$ nur bis $\nu = n$, so heißt dies, daß der Tod, wenn er später als nach n Jahren eintritt, keine Anwartschaft begründet; man nennt die Versicherung eine kurze oder *temporäre* Todesfallversicherung; ihr Wert ist

$$_{|n}A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = A_x - {}_{n|}A_x, \tag{29}$$

oder durch Renten dargestellt, wenn man beachtet, daß $A_x = 1 - d\mathfrak{a}_x$ und $_{n|}A_x = {}_nE_x A_{x+n} = {}_nE_x(1 - d\mathfrak{a}_{x+n})$:

$$_{|n}A_x = 1 - d\left(\mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\mathfrak{a}_{x+n}\right) - {}_nE_x = 1 - d_{|n}\mathfrak{a}_x - {}_nE_x.$$

Beispielsweise ist die nur bis zum 60. Jahre währende Todesfallversicherung auf das Kapital 1 bei einem 30-jährigen

$$_{|30}A_{30} = \frac{10\,946,14 - 4735,38}{31\,953} = 0,19437.$$

Summiert man den Ausdruck (α) von $\nu = n + 1$ bis $\nu = n + m$, so bedeutet dies, daß der Tod keine Anwartschaft begründet, falls er in den n ersten Jahren oder später als nach $n + m$ Jahren eintritt; man spricht dann von einer *aufgeschobenen temporären* Todesfallversicherung, deren Wert gleich ist

$$_{n|m}A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots + C_{x+n+m-1}}{D_x} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}. \tag{30}$$

Eine vom vollendeten 40. bis zum vollendeten 60. Jahre währende Todesfallversicherung eines 30-jährigen hat nach Tafel VIII den Wert

$$_{10|20}A_{30} = \frac{8761,58 - 4735,38}{31\,953} = 0,12600.$$

Mit Rücksicht auf die Formel (27) erscheint ${}_{n|m}A_x$ als Differenz zweier aufgeschobenen Todesfallversicherungen.

268. Variable Todesfallversicherungen. Die Höhe des versicherten Kapitales kann von dem Zeitpunkte abhängig sein, in welchem die Person stirbt, auf welche die Versicherung lautet.

Ein allgemeiner Fall einer derartigen variablen Todesfallversicherung besteht darin, daß das versicherte Kapital k beträgt, wenn der Tod im ersten Versicherungsjahre eintritt, und daß es dann von Jahr zu Jahr um h steigt oder fällt. Der Wert $(vA)_x$ dieser Versicherung ist die Summe der Ausdrücke

$$(k \pm nh)\,\frac{C_{x+n}}{D_x}$$

von $n = 0$ angefangen, so daß

$$(vA)_x = \frac{kC_x + (k \pm h)C_{x+1} + (k \pm 2h)C_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

$$= \frac{k(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots) \pm h(C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots)}{D_x}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots &= M_{x+1} \\ C_{x+2} + \cdots &= M_{x+2} \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots, \end{aligned}$$

folglich

$$C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots = M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots;$$

führt man also die neue Kolumne von Hilfszahlen

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots \tag{31}$$

ein, so schreibt sich

$$(vA)_x = \frac{kM_x \pm hR_{x+1}}{D_x}. \tag{32}$$

Speziell hat die mit 1 beginnende, jährlich um 1 steigende lebenslängliche Todesfallversicherung, da $M_x + R_{x+1} = R_x$ ist, den Wert

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}; \tag{33}$$

in der Form

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x} + \frac{M_{x+2}}{D_x} + \cdots$$

geschrieben erscheint sie als Summe einer sofort beginnenden und der um 1, 2, $\cdots$ Jahre aufgeschobenen Todesfallversicherung.

Nach Tafel VIII ist

$$(IA)_{30} = \frac{294\,665{,}43}{31953} = 9{,}22184;$$

das versicherte Kapital kann hier die Höhe $1 + 71 = 72$ erreichen.

Für die auf n Jahre abgekürzte, mit 1 beginnende und jährlich um 1 steigende Todesfallversicherung ergibt sich der Ausdruck:

$$(IA)_{x\overline{n}|} = \frac{C_x + 2C_{x+1} + \cdots + nC_{x+n-1}}{D_x};$$

da aber

$$\begin{aligned} C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} &= M_x - M_{x+n} \\ C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} &= M_{x+1} - M_{x+n} \\ \cdots\cdots & \\ C_{x+n-1} &= M_{x+n-1} - M_{x+n}, \end{aligned}$$

so drückt sich der Zähler mittels der Zahlen M und R durch

$$R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$$

aus und es wird, wenn diese Zahlen zur Verfügung stehen:

$$(IA)_{x\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}. \qquad (34)$$

Die Tafel VIII gibt als Wert einer auf 20 Jahre abgekürzten steigenden Todesfallversicherung eines 30-jährigen:

$$(IA)_{30,\overline{20}|} = \frac{294\,665{,}43 - 116\,652{,}80 - 20 \cdot 6788{,}01}{31\,953} = 1{,}32233.$$

Die mit 1 beginnende, bis zum n-ten Jahre jährlich um 1 steigende und von da ab unveränderliche Todesfallversicherung hat als ursprünglichen Ausdruck

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \frac{C_x + 2C_{x+1} + \cdots + nC_{x+n-1} + n(C_{x+n} + C_{x+n-1} + \cdots)}{D_x};$$

der Zähler aber ist identisch mit

$$\begin{aligned} C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots - (C_{x+n} + 2C_{x+n+1} + 3C_{x+n+2} + \cdots) \\ = R_x - R_{x+n}, \end{aligned}$$

so daß in einfachster Form

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}. \qquad (35)$$

Beispielsweise hat die mit 1 beginnende, bis 20 steigende und auf dieser Höhe verbleibende lebenslängliche Todesfallversicherung eines 30-jährigen nach Tafel VIII den Wert

$$(I_{\overline{20}|}A)_{30} = \frac{294\,665{,}43 - 116\,652{,}80}{31\,953} = 5{,}57108.$$

269. Todesfallversicherung nach Selekttafeln. Eine vollständige Aggregattafel überschätzt die aus der Todesfallversicherung für die Anfangsperiode resultierenden Belastungen und unterschätzt die der späteren Jahre. Eine abgestutzte Aggregattafel bewertet

wegen der strengeren Sterbenswahrscheinlichkeiten die Todesfallversicherung höher als eine vollständige, doch wird der Unterschied mit wachsendem Abschlußalter immer geringer, weil die Erfahrungen, auf die sich die beiden Tafelformen stützen, einander immer näher kommen, ja in den hohen Altern vollkommen sich decken.

Eine strengere Bewertung, die den Einfluß der Auslese in Rechnung bringt, gewährt eine Selekttafel.

Aus der Tafel der Lebenden $l_{[x]+t}$ berechnet man eine ganz analog angelegte Tafel der Toten:

$$d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}, \tag{36}$$

aus dieser die Tafel der diskontierten Zahlen der Toten:

$$C_{[x]+t} = v^{x+t+1} d_{[x]+t} \tag{37}$$

und aus dieser schließlich die Tafel der Summen:

$$M_{[x]+t} = C_{[x]+t} + C_{[x]+t+1} + C_{[x]+t+2} + \cdots \tag{38}$$

Mit Hilfe dieser Zahlen stellt sich der Wert der Todesfallversicherung für eine Person des Beitrittsalters x auf

$$A_{[x]} = \frac{M_{[x]}}{D_{[x]}}. \tag{39}$$

In gleicher Weise schreiben sich die Formeln für die aufgeschobene und temporäre Todesfallversicherung analog jenen, die sich auf eine Aggregattafel beziehen, und können auch mittels der auf der Selekttafel beruhenden Renten in der früheren Gestalt angeschrieben werden; so z. B. ist

$$A_{[x]} = 1 - d\mathrm{a}_{[x]}$$

$${}_{n|}A_{[x]} = v\,{}_{n|}\mathrm{a}_{[x]} - {}_{n+1|}\mathrm{a}_{[x]}, \text{ usw.}$$

Um ein Bild von dem Unterschiede zu geben, den diese verschiedenen Bewertungsweisen der Todesfallversicherung zur Folge haben, ist die nachstehende Tabelle aus den British Offices Life Tables 1893 konstruiert worden.

$3\frac{1}{2}\%$.

Alter	O^M	$O^{M(5)}$	Beitrittsalter	$O^{[M]}$	(2)—(1)		(1)—(3)	
x	A_x (1)	A_x (2)	$[x]$	$A_{[x]}$ (3)	absol.	in % von (1)	absol.	in % von (1)
20	0,26254	0,27977	20	0,27224	0,01723	6,55	— 0,00970	— 3,69
30	,33150	,33915	30	,33067	,00765	2,30	+ ,00083	+ 0,36
40	,41506	,41823	40	,40784	,00317	0,76	,00722	1,74
50	,51541	,51704	50	,50314	,00163	0,32	,01227	2,38
60	,62897	,62962	60	,61027	,00065	0,10	,01870	2,97
70	,74245	,74252	70	,71691	,00007	0,01	,02554	3,44
80	,83869	,83869	.	.	,00000	0,00	.	.
90	,90623	,90623	.	.	.	.	.	.
100	,94779	,94779	.	.	.	.	.	.

In Bestätigung der allgemeinen Bemerkungen sieht man tatsächlich die Höherbewertung durch die abgestutzte Tafel, die von $6^1/_2\,^0/_0$ beim Alter 20 rasch abnimmt und beim Alter 50 nurmehr $3^0/_{00}$ beträgt.

Hingegen wächst der Einfluß der Auslese auf den Wert der Todesfallversicherung mit zunehmendem Alter und erreicht bei dem Eintrittsalter 70 nahe $3\frac{1}{2}\,^0/_0$ des nach der vollständigen Aggregattafel berechneten Wertes.

§ 4. Gemischte Versicherungen.

270. Die gemischte Versicherung. Während bei der kurzen Todesfallversicherung das versicherte Kapital nur dann ausbezahlt wird, wenn der Tod einer bezeichneten Person innerhalb eines bestimmten Zeitraumes eintritt, und bei der Erlebensversicherung nur dann, wenn die Person ein bestimmtes Alter erreicht, kommt es bei der *gemischten* (alternativen, abgekürzten) Versicherung, welche beide Versicherungsarten in sich vereinigt, unbedingt zur Auszahlung, und zwar, wenn der Tod innerhalb eines festgesetzten Zeitraumes erfolgt, am Ende des Todesjahres, und wenn der Versicherte das Ende jenes Zeitraumes erlebt, an ihn selbst sofort.

Wenn 1 das versicherte Kapital und x das Alter des Versicherten ist, so stellt sich der Wert der auf n Jahre festgesetzten gemischten Versicherung, $A_{x\overline{n}|}$, als Summe aus dem Werte $_{|n}A_x$ der auf n Jahre abgekürzten Todesfallversicherung und dem Werte $_nE_x$ der um n Jahre aufgeschobenen Erlebensversicherung, so daß

$$A_{x\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x. \tag{40}$$

Ersetzt man die Teile der rechten Seite durch ihre Ausdrücke aus (29) und (3), so erhält man:

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{41}$$

Die gemischte Versicherung gestattet aber auch eine der Todesfallversicherung konforme Darstellung durch eine Rente; es ist nämlich (s. Schluß von Nr. 266)

$$\begin{aligned} M_x \quad &= vN_x \quad - N_x \quad + D_x \\ M_{x+n} &= vN_{x+n} - N_{x+n} + D_{x+n}, \end{aligned}$$

daher

$$M_x - M_{x+n} + D_{x+n} = D_x - (1 - v)(N_x - N_{x+n});$$

nach dieser Umformung ergibt sich

$$A_{x,\overline{n}|} = 1 - d_{|n}a_x, \tag{42}$$

eine Formel, die sich von jener (22) für A_x nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der lebenslänglichen Rente die auf n Jahre abgekürzte getreten ist.

Unter der Form der gemischten Versicherung wird mitunter auch die lebenslängliche Todesfallversicherung betrieben, indem das versicherte Kapital bei Erreichung eines festgesetzten sehr hohen Alters zur Auszahlung gelangt; die Erlebensanwartschaft ist dabei so gering, daß sie gegenüber der Todesfallanwartschaft völlig zurücktritt. So folgt die Gothaer Bank das versicherte Kapital bei Vollendung des 90. Lebensjahres aus, und da sie mit einer Selekttafel rechnet, welche die ersten 7 Versicherungsjahre unterscheidet, so hat ihre zu diesen Bedingungen abgeschlossene Todesfallversicherung bei dem Eintrittsalter x den Wert

$$A_{[x],\overline{90-x}|} = \frac{M_{[x]} - M_{90}}{D_{[x]}},$$

wobei

$$M_{[x]} = C_{[x]} + C_{[x]+1} + \cdots + C_{[x]+6} + C_{x+7} + \cdots.$$

In Tafel VII (Fortsetzung) sind auf Grund der österreichisch-ungarischen Tafel für die gemischten Versicherungen und $3^1/_2\%$ Zinsfuß die Werte der zu den Altern 55, 60, 65, 70 abgekürzten Renten und daraus die Werte der zu den gleichen Zielen reichenden gemischten Versicherungen gerechnet.[1]) Hiernach ist beispielsweise der Wert der gemischten Versicherung auf das Kapital 1, die ein 30-jähriger zum 55. Lebensjahre abschließt — Versicherungsdauer oder Distanz 25 Jahre — 0,45995; bei Abschluß auf das 70. Lebensjahr — Versicherungsdauer 40 — beträgt ihr Wert 0,34452.

271. Versicherung mit bestimmter Verfallszeit (à terme fixe). Diese Versicherungsart hat mit der gemischten Versicherung das gemein, daß das Kapital unbedingt zur Auszahlung kommt. Dadurch jedoch, daß die Auszahlung am Ende des festgesetzten Termines erfolgt, gleichgültig ob die versicherte Person ihn erlebt hat oder vorher gestorben ist, wird der Wert der Versicherung unabhängig von den Sterblichkeitsverhältnissen und seine Bestimmung eine Aufgabe der Zinseszinsrechnung; erst durch die Art der Erwerbung kann eine solche Kapitalsbegründung in das eigentliche Gebiet der Lebensversicherungsrechnung gelangen.

Der Wert einer derartigen Versicherung auf das Kapitel 1, zahlbar n Jahre nach Abschluß, ist

$$A_{\overline{n}|} = v^n. \tag{43}$$

Bei $3^1/_2\%$ ist beispielsweise, ohne Rücksicht auf das Alter, $A_{\overline{30}|} = 0{,}3555$, während die gemischte Versicherung bei gleicher Laufzeit je nach dem Alter verschiedene, durchwegs höhere Werte besitzt; so ist mit den Grundlagen der Tafel V, die mit dem gleichen Zinsfuße rechnet, $A_{25,\overline{30}|} = 0{,}4278$, $A_{30,\overline{30}|} = 0{,}4386$, $A_{35,\overline{30}|} = 0{,}4548$, $A_{40,\overline{30}|} = 0{,}4782$, $A_{50,\overline{30}|} = 0{,}5510$.

1) Durch die Freundlichkeit J. Altenburgers.

§ 5. Renten und Todesfallversicherungen von besonderer Zahlungsmodalität.

272. Renten von unterjähriger Fälligkeit. Näherungsformeln. Bei Renten kommt es sehr häufig vor, daß sie nicht jährlich, sondern in kürzeren Terminen ausgezahlt werden. Es handelt sich nun darum, solche Renten von *unterjähriger* Fälligkeit auf normale Renten zurückzuführen.

Eine Rente vom *Jahresbetrage* 1 sei jährlich, bis zum Ableben, pränumerando zahlbar in m Raten vom Betrage $\frac{1}{m}$; ihr Wert werde mit $\mathfrak{a}_x^{(m)}$ bezeichnet. Man nennt sie kurz: eine vorschüssige m-tel-Rente.

Eine sofort beginnende Rente vom Betrage 1 hat den Wert $\mathfrak{a}_x$; eine nach einem Jahre beginnende Rente 1 hat den Wert $\mathfrak{a}_x - 1$ [s. Nr. 260, (6)]; interpoliert man dazwischen die Werte der nach $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}$ Jahren beginnenden Renten vom Betrage 1 nach einer arithmetischen Progression, so ergibt sich die Wertfolge:

$$\mathfrak{a}_x, \quad \mathfrak{a}_x - \frac{1}{m}, \quad \mathfrak{a}_x - \frac{2}{m}, \quad \ldots \mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{m},$$

welche mit der sofort beginnenden Rente anfängt und mit der um $\frac{m-1}{m}$ eines Jahres aufgeschobenen schließt. Die Summe dieser Reihe:

$$m\mathfrak{a}_x - \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \cdots + \frac{m-1}{m}\right) = m\mathfrak{a}_x - \frac{m(m-1)}{2m},$$

würde den Wert einer sogleich beginnenden, nach je $\frac{1}{m}$ Jahre fälligen Rente 1 vorstellen; daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $\frac{1}{m}$ der Werte einer Rente von gleicher Fälligkeit, aber vom Betrage $\frac{1}{m}$; mithin ist

$$\mathfrak{a}_x^{(m)} = \mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m}. \tag{44}$$

Durch Subtraktion der ersten Fälligkeit $\frac{1}{m}$ ergibt sich daraus der Wert einer postnumerando zahlbaren m-tel-Rente, der mit $a_x^{(m)}$ bezeichnet werden soll; folglich ist

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} \\ &= \mathfrak{a}_x - \frac{m+1}{2m} \\ &= \mathfrak{a}_x - 1 + \frac{m-1}{2m} \\ &= a_x + \frac{m-1}{2m}. \end{aligned} \tag{45}$$

Es kommt also zu dem Werte der nachschüssigen, jährlich fälligen Rente derselbe Betrag $\frac{m-1}{2m}$ hinzu, der bei der vorschüssigen in Abzug kommt, um sie auf die analoge m-tel-Rente zurückzuführen.

Diese Ableitung ist frei von allen Annahmen über unterjährige Verzinsung und über den Sterblichkeitsverlauf während eines Altersjahres. Die Näherungsformeln (44), (45), zu denen sie führt, werden in der Praxis in der Regel oder doch sehr häufig angewendet. Für die am häufigsten vorkommenden Fälle $m = 2, 4, 12$ (halbjährige, vierteljährige, monatliche Auszahlung) ergeben sich die speziellen Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_x^{(2)} &= \mathfrak{a}_x - 0{,}25 & a_x^{(2)} &= a_x + 0{,}25 \\ \mathfrak{a}_x^{(4)} &= \mathfrak{a}_x - 0{,}375 & a_x^{(4)} &= a_x + 0{,}375 \\ \mathfrak{a}_x^{(12)} &= \mathfrak{a}_x - 0{,}4583\cdots & a_x^{(12)} &= a_x + 0{,}4583\cdots. \end{aligned} \tag{46}$$

Der Grenzwert für $m = \infty$ entspräche einer gleichmäßig fließenden oder *kontinuierlichen Rente*, deren Zeichen $\bar{\mathfrak{a}}_x$, gleichbedeutend mit $\bar{a}_x$, sein möge; sonach wäre dieser Näherung zufolge

$$\bar{\mathfrak{a}}_x = \mathfrak{a}_x - \frac{1}{2} = a_x + \frac{1}{2}\cdot \tag{47}$$

273. Ableitung einer strengeren Formel. I. Die Sterbetafel gibt die Lebenden bei den vollen Altersjahren; braucht man bei einer Rechnung die Zahl der Lebenden für ein zwischenliegendes Alter, so bedient man sich in der Regel der linearen Interpolation, eines Vorganges, der bei den in der Versicherung in Betracht kommenden Altern als hinreichend genau betrachtet werden kann. Es ist dies gleichbedeutend mit der Annahme, daß sich die Sterbefälle eines Altersjahres gleichmäßig über dasselbe verteilen.

Von dieser Hypothese soll nun auch bei der Berechnung des Wertes der m-tel-Rente, und zwar der *vorschüssigen*, Gebrauch gemacht werden. Danach leben von l_x x-jährigen nach Ablauf von $n + \frac{s}{m}$ Jahren (n eine ganze Zahl, $\frac{s}{m}$ ein echter Bruch)

$$l_{x+n} - \frac{s}{m} d_{x+n} = \frac{m-s}{m} l_{x+n} + \frac{s}{m} l_{x+n+1},$$

folglich ist

$${}_{n+\frac{s}{m}}p_x = \frac{m-s}{m}\,{}_np_x + \frac{s}{m}\,{}_{n+1}p_x;$$

multipliziert man dies mit $\frac{1}{m} v^{n+\frac{s}{m}}$, so entsteht die auf das Alter $x + n + \frac{s}{m}$ bezügliche Anwartschaft auf die Rentenquote $\frac{1}{m}$, nämlich

$$\frac{1}{m} v^{n+\frac{s}{m}}\,{}_{n+\frac{s}{m}}p_x = \frac{v^{\frac{s}{m}}}{m}\left(\frac{m-s}{m} v^n\,{}_np_x + \frac{s}{mv} v^{n+1}\,{}_{n+1}p_x\right);$$

durch Summierung über die Werte $s = 0, 1, \cdots m - 1$ erhält man daraus die Anwartschaft aus dem Altersjahr $x + n$ bis $x + n + 1$:

$$\frac{1}{m^2}\left[v^n{}_np_x \sum_0^{m-1}(m-s)v^{\frac{s}{m}} + \frac{1}{v}\, v^{n+1}{}_{n+1}p_x \sum_0^{m-1} s v^{\frac{s}{m}}\right],$$

und die Summierung über die Werte $n = 0, 1, 2, \cdots$ endlich liefert den Gesamtwert der Rente, der sich mit der Abkürzung $v^{\frac{1}{m}} = c$ schreibt:

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{\mathrm{a}_x}{m^2}\sum_0^{m-1}(m-s)c^s + \frac{a_x}{m^2 v}\sum_0^{m-1} s c^s;$$

berechnet man also

$$\alpha = \frac{1}{m^2}\sum_0^{m-1}(m-s)c^s, \qquad \beta = \frac{1}{m^2}\sum_0^{m-1} s c^s$$

und ersetzt a_x durch $\mathrm{a}_x - 1$, so kommt man zu der Formel

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \left(\alpha + \frac{\beta}{v}\right)\mathrm{a}_x - \frac{\beta}{v} = \mathfrak{A}\mathrm{a}_x - \mathfrak{B}. \tag{48}$$

Durch Subtraktion der ersten Rate $\frac{1}{m}$ geht dies in die *nachschüssige* m-tel-Rente über:

$$a_x^{(m)} = \mathfrak{A}\mathrm{a}_x - \mathfrak{B} - \frac{1}{m} = \mathfrak{A}\, a_x + \left(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \frac{1}{m}\right) = \mathfrak{A}a_x + \mathfrak{B}'. \tag{49}$$

Nachstehende Tabelle gibt die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ für die üblichen Zinssätze und unterjährigen Termine.[1])

i	m	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}'$
	2	1,000 055	0,25875	0,24631
0,03	4	1,000 070	0,37965	0,37042
	12	1,000 075	0,46330	0,45345
	2	1,000 075	0,25434	0,24574
0,035	4	1,000 093	0,38046	0,36963
	12	1,000 098	0,46408	0,45269
	2	1,000 097	0,25495	0,24515
0,04	4	1,000 120	0,38119	0,36893
	12	1,000 127	0,46489	0,45191

In allen praktischen Fällen ist $\mathfrak{A}$ von der Einheit so wenig verschieden, daß man es ohne weiteres durch 1 ersetzen und daher z. B. bei $3^1/_2\,\%$ von den Formeln Gebrauch machen kann:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_x^{(2)} &= \mathrm{a}_x - 0{,}25434 & a_x^{(2)} &= a_x + 0{,}24571 \\ \mathrm{a}_x^{(4)} &= \mathrm{a}_x - 0{,}38046 & a_x^{(4)} &= a_x + 0{,}36967 \\ \mathrm{a}_x^{(12)} &= \mathrm{a}_x - 0{,}46408 & a_x^{(12)} &= a_x + 0{,}45269. \end{aligned}$$

1) Eine ausführlichere Tabelle gibt J. V. Pexider, Zeitschr. f. d. ges. Versicherungs-Wissench. VII (1907), p. 307.

Neben die abgekürzte Formel $a_x^{(m)} = a_x - \mathfrak{B}$ soll noch die Formel für die temporäre m-tel-Rente gestellt werden. Aus

$$_{|n}a_x = a_x - {}_{n|}a_x = a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n}$$

folgt durch den Übergang zu m-tel-Renten:

$$_{|n}a_x^{(m)} = a_x - \mathfrak{B} - \frac{D_{x+n}}{D_x}(a_{x+n} - \mathfrak{B}) = a_x - {}_{n|}a_x - \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\mathfrak{B},$$

also schließlich

$$_{|n}a_x^{(m)} = {}_{|n}a_x - \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\mathfrak{B}. \qquad (48^*)$$

II. Ein genaueres Eindringen in das Wesen der unterjährigen Rente und zugleich eine geschlossene Darstellung der Konstanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ vermittelt die folgende Betrachtung, die von der nämlichen Hypothese ausgeht und zu denselben Schlußergebnissen führt wie die vorige.

Es handle sich um den Wert einer postnumerando zahlbaren m-tel-Rente vom Jahresbetrage 1, also von der Rate $\frac{1}{m}$.

Eine solche Rente hat gegenüber der ganzjährig fälligen aus zwei Gründen einen größeren Wert: 1) weil durch das vorzeitige Zahlen von Raten Zins verloren geht, und 2) weil in dem Jahre, in welchem der Tod des Bezugsberechtigten eintritt, eventuell noch Raten zur Auszahlung gelangen, die bei ganzjähriger Zahlung entfallen würden. Man kann also den Ansatz machen:

$$a_x^{(m)} = a_x + Z_1 + Z_2,$$

wenn man die Wertzunahmen aus den beiden Quellen mit Z_1, Z_2 bezeichnet.

Der erste Teil, Z_1, besteht in dem jährlich, bis zum Ableben von (x) sich wiederholenden Zinsentgang, der daraus entspringt, daß die 1., 2., $\cdots m$-te Rate um $\frac{m-1}{m}, \frac{m-2}{m}, \cdots \frac{m-m}{m}$ Jahre zu früh ausgefolgt wird; sein Wert ist also gleich dem Werte einer Postnumerando-Leibrente vom Betrage dieses Zinsentganges, welcher Betrag gleichkommt:

$$\frac{1}{m}\{(1+i)^{\frac{m-1}{m}} - 1\} + \frac{1}{m}\{(1+i)^{\frac{m-2}{m}} - 1\} + \cdots + \frac{1}{m}\{(1+i)^{\frac{m-m}{m}} - 1\};$$

denn die erste Rate $\frac{1}{m}$ wäre bis zum Jahresschlusse angewachsen auf $\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}$, der Zinsentgang ist also $\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}} - \frac{1}{m}$; in gleicher

Weise stellt das zweite Glied den Zinsentgang dar, der durch die zweite Rate hervorgerufen wird; das letzte Glied, in der Form den andern angepaßt, hat den Wert 0, weil ja die letzte Rate zum selben Zeitpunkte fällig wird wie die ganzjährig zahlbare Rente. Hiernach ist

$$Z_1 = a_x \cdot \frac{1}{m}\left[1 + (1+i)^{\frac{1}{m}} + (1+i)^{\frac{2}{m}} + \cdots + (1+i)^{\frac{m-1}{m}} - m\right]$$
$$= \frac{a_x}{m}\left[\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1} - m\right].$$

Der zweite Teil, Z_2, der nur aus dem Sterbejahre hervorgeht, ist der Wert einer Todesfallversicherung im Betrage jenes Verlustes, der durch die im Sterbejahre eventuell ausbezahlten Raten verursacht wird; nimmt man an, daß die Wahrscheinlichkeit, zu sterben, für jedes m-tel des Sterbejahres dieselbe, also $\frac{1}{m}$ sei, was wieder gleichbedeutend ist mit der Annahme gleichförmiger Verteilung der Sterbefälle über eine einjährige Altersklasse, so ist der auf das Ende des Jahres reduzierte Verlust:

$$\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + \frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{1}{m}},$$

denn die erste Rate $\frac{1}{m}$ kommt zur Auszahlung, wenn der Tod nach dem ersten m-tel-Jahr eintritt, wofür $\frac{m-1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit ist; die zweite Rate $\frac{1}{m}$, wenn der Tod nach dem zweiten m-tel eintritt, wofür $\frac{m-2}{m}$ die Wahrscheinlichkeit ist usw.; es kommt endlich auch die letzte Rate $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung, wenn der Tod im letzten m-tel-Jahre erfolgt, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ zu erwarten ist. Mithin hat man:

$$Z_2 = A_x\cdot\frac{1}{m^2}\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} + 2(1+i)^{\frac{2}{m}} + 3(1+i)^{\frac{3}{m}} + \cdots + (m-1)(1+i)^{\frac{m-1}{m}}\right].$$

Bezeichnet man $(1+i)^{\frac{1}{m}}$ vorübergehend mit c, so bleibt die Reihe

$$c + 2c^2 + 3c^3 + \cdots + (m-1)c^{m-1}$$

zu summieren; multipliziert man sie zu diesem Zwecke mit $c - 1$, so entsteht:

$$\begin{aligned} & c^2 + 2c^3 + 3c^4 + \cdots + (m-2)c^{m-1} + (m-1)c^m \\ & - c - 2c^2 - 3c^3 - 4c^4 - \cdots - (m-1)c^{m-1} \\ = {} & (m-1)c^m - (c + c^2 + c^3 + \cdots + c^{m-1}) \\ = {} & mc^m - \frac{c(c^m - 1)}{c-1}; \end{aligned}$$

durch Division mit $c-1$ ergibt sich daraus die gesuchte Summe:

$$\frac{mc^m(c-1)-(c^m-1)c}{(c-1)^2}.$$

Mithin ist, nach Wiedereinsetzung des Wertes für c:

$$Z_2 = A_x \frac{m(1+i)[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]-i(1+i)^{\frac{1}{m}}}{m^2[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]^2}.$$

Führt man den dem i entsprechenden nominellen Zinsfuß [s. Nr. 257, Gl. (6)]

$$j_{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]$$

ein, so schreibt sich Z_2 kürzer:

$$Z_2 = A_x \frac{(1+i)j_{(m)}-i\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2}.$$

Hiernach ist endgültig:

$$a_x^{(m)} = a_x \frac{i}{j_{(m)}} + A_x \frac{(1+i)j_{(m)}-i\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2}. \tag{50}$$

Die *vorschüssige* m-tel-Rente, $a_x^{(m)}$, ergibt sich aus der vorigen durch Addition von $\frac{1}{m}$; mithin ist, wenn man auch rechts die vorschüssige Rente einführt:

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = (\mathrm{a}_x-1)\frac{i}{j_{(m)}} + A_x \frac{(1+i)j_{(m)}-i\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2} + \frac{1}{m}.$$

Diese Formel nimmt, wenn man auch A_x mittels der Formel 265, (22) durch die Rente ausdrückt, also $1-\frac{i}{1+i}\mathrm{a}_x$ dafür schreibt, schließlich die Gestalt an:

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathfrak{A}\,\mathrm{a}_x - \mathfrak{B},$$

und zwar ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{i}{j_{(m)}} - \frac{ij_{(m)}-i^2(1+i)^{\frac{1-m}{m}}}{j_{(m)}^2} = \frac{1}{(1+i)^{\frac{m-1}{m}}}\left(\frac{i}{j_{(m)}}\right)^2,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{i}{j_{(m)}} - \frac{(1+i)j_{(m)}-i\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)}{j_{(m)}^2} - \frac{1}{m} = \frac{\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)(i-j_{(m)})}{j_{(m)}^2};$$

man hat also für die vorschüssige m-tel-Rente die Formel:

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{1}{(1+i)^{\frac{m-1}{m}}}\left(\frac{i}{j_{(m)}}\right)^2 \cdot \mathrm{a}_x - \frac{\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)(i-j_{(m)})}{j_{(m)}^2}. \tag{51}$$

Die Tafel am Schlusse von Nr. 257 enthält alle Hilfsgrößen, welche zur numerischen Auswertung dieser Formel für die gangbaren Werte von m erforderlich sind.[1])

Mit der Näherungsformel (44) verglichen läßt (51) einen vom Zinsfuße abhängigen Koeffizienten von a_x erkennen, der dort durch 1 ersetzt ist, und einen ebenfalls vom Zinsfuße abhängigen zweiten Teil, der dort nur von der Anzahl der unterjährigen Raten abhängt.

274. Kontinuierliche Rente. Die kontinuierliche Rente entspricht der Vorstellung eines gleichmäßigen Fließens der Rente, so daß sie im Laufe eines Jahres den festgesetzten Betrag, der mit 1 angenommen werden soll, erreicht. Aus der Näherungsformel (44) für die unterjährig zahlbare Rente ergab sich (Nr. 272, Schluß) für die kontinuierliche Rente der Ausdruck:

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2}. \tag{47}$$

Führt man den Grenzübergang $m = \infty$ in der strengen Formel (51) durch, so findet sich, da zufolge Nr. 257, (7)

$$j_{(\infty)} = \operatorname{Log}(1 + i) = \delta$$

die Verzinsungsintensität ist:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{1+i}\left(\frac{i}{\delta}\right)^2 a_x - \frac{i-\delta}{\delta^2}. \tag{52}$$

Zu einer andern Darstellung der kontinuierlichen Rente gelangt man, wenn man auch den Vorgang des Absterbens als einen *stetigen* auffaßt und ihn dadurch der *infinitesimalen Behandlung* zugänglich macht. Diese Methode hat sich als sehr nützlich erwiesen, indem sie vielfach zu einer durchsichtigeren Lösung der Probleme führt, wie dies im weiteren Verlaufe zu ersehen sein wird. Es bleibt dann noch übrig, die analytische Formel in eine technisch auswertbare umzusetzen.

Im vorliegenden Falle handelt es sich um die Berechnung einer kontinuierlichen Rente für eine Person (x). Die aus dem Altersintervall $x + t$ bis $x + t + dt$ resultierende Anwartschaft drückt sich durch $v^t\,{}_tp_x\,dt = v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt$ aus; mithin ist

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega - x} v^t l_{x+t}\,dt.^{2)}$$

1) Die praktische Durchführung dieser Rechnungen stößt auf Schwierigkeiten, wenn man nicht über vielstellige Logarithmentafeln verfügt; schon die Berechnung von $j_{(m)}$ gestaltet sich bei größeren Werten von m (12, 52) umständlich. Es empfiehlt sich daher die Anwendung von Näherungsformeln, die durch Reihenentwicklungen zu gewinnen sind, wie solche J. V. Pexider in einer Arbeit „Beitrag zur Zinstheorie“, Zeitschr. f. d. ges. Versicher.-Wissensch., VII (1907), p. 298—307, abgeleitet hat.

2) Zu einer bemerkenswerten Ausgestaltung führt diese Formel, wenn die

Nach einer Formel in der Fußnote zu Nr. 76 ist allgemein:

$$\int_0^{\omega-x} u\,dt = \sum_0^{\omega-1-x} u + \frac{1}{2}\{u\}_0^{\omega-x} - \frac{1}{12}\{u'\}_0^{\omega-x};$$

im vorliegenden Falle hat man:

$$u = v^t l_{x+t},$$

$$u' = l_{x+t} v^t \operatorname{Log} v + v^t \frac{dl_{x+t}}{dt} = -l_{x+t} v^t \operatorname{Log}(1+i) + v^t \frac{dl_{x+t}}{dt}$$

$$= -\delta v^t l_{x+t} + v^t l_x \frac{dl_{x+t}}{l_x dt},$$

und da u und u' an der oberen Grenze $\omega - x$ verschwinden, so ist

$$\int_0^{\omega-x} u\,dt = l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots - \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{12} u_0'$$

$$= l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots - \frac{1}{2} l_x - \frac{1}{12}(\delta l_x + l_x \mu_x),$$

Sterbetafel (l_x) nach der Makehamschen Formel ausgeglichen ist; man erhält dann zunächst den Ausdruck:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{g^{c^x}} \int_0^{\omega-x} (sv)^t g^{c^{x+t}} dt;$$

setzt man nun

$$sv = \sigma, \qquad g^{c^x} = m, \qquad \operatorname{Log}\frac{1}{m} = \lambda, \qquad \lambda c^t = u, \qquad \frac{\operatorname{Log}\sigma}{\operatorname{Log} c} = k,$$

so wird

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \int_\lambda^{\lambda c^{\omega-x}} u^{k-1} e^{-u} du,$$

und wenn man die obere Grenze des Integrals mit Rücksicht auf die Natur von e^{-u} bis ∞ erstreckt:

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \int_\lambda^{\infty} u^{k-1} e^{-u} du.$$

Diese Formel kann zum Ausgangspunkt für die Berechnung eines *Systems* genommen werden, d. h. einer zweifach abgestuften Tabelle von Renten, einerseits geordnet nach dem Alter x, andererseits nach dem Zinsfuß i. Zwischen solchen Rentensystemen, gestützt auf verschiedene nach der Makehamschen Formel ausgeglichene Tafeln, bestehen nun einfache Zusammenhänge, indem ihre x-Reihen und ihre i-Reihen einander in bestimmter, im voraus angebbarer Weise zugeordnet sind, so daß es möglich ist, aus einem solchen, ein für allemal berechneten Rentensystem alle andern abzuleiten. Dieser Gedanke ist von E. Blaschke in einer Arbeit im IX. Hefte der „Mitteilungen des Verbandes der österr. und ungar. Versicherungstechniker", Wien 1903, ausgeführt und in der Herstellung eines Rentensystems nach der Tafel H^M verwirklicht worden, das in Bezug auf x von 25 bis 99 in ganzen Jahren und in Bezug auf i von 0,001 bis 0,065 in Stufen von 0,001 fortschreitet. Dortselbst ist auch auf verschiedene Anwendungen eines solchen Rentensystems hingewiesen.

wenn μ_x die Sterblichkeitsintensität bei dem Alter x bedeutet (siehe Nr. 213). Hiermit wird.

$$\bar{a}_x = \frac{l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots}{l_x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x)$$

oder

$$\bar{a}_x = a_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x). \qquad (53)$$

Der Unterschied zwischen den drei Formeln (47), (52) und (53) stellt sich bei numerischer Ausrechnung als geringfügig heraus. Mit den Daten der Tafel VIII ergibt sich beispielsweise:

nach Formel (47):	$\bar{a}_{30} = 18{,}941$;	$\bar{a}_{40} = 16{,}603$;	$\bar{a}_{60} = 10{,}323$
„ „ (52):	$= 18{,}936$;	$= 16{,}596$;	$= 10{,}317$
„ „ (53):	$= 18{,}937$;	$= 16{,}599$;	$= 10{,}318$.

275. Vollständige Rente. Die normale Postnumerando-Leibrente a_x ist unter der Voraussetzung gerechnet, daß die letzte Zahlung am Ende desjenigen Versicherungsjahres erfolge, welches (x) noch ganz durchlebt; am Ende des Sterbejahres wird keine Zahlung mehr geleistet.

Es kann aber die Vereinbarung getroffen sein, daß auch im Sterbejahre, und zwar am *Ende* desselben, eine dem durchlebten Teile dieses Jahres entsprechende Rate des Rentenbetrages auszufolgen ist. Der Wert einer derart vervollständigten Rente setzt sich zusammen aus dem Werte a_x der nachschüssigen Rente und dem Werte einer Todesfallversicherung auf das Kapital $\frac{1}{2}$, weil mit großer Näherung angenommen werden darf, daß die Ergänzungszahlung im Durchschnitt $\frac{1}{2}$ betragen werde — bei gleichmäßiger Verteilung der Todesfälle auf ein Altersjahr wäre dies ihr genauer mittlerer Wert. Man hat also unter diesen Vereinbarungen mit dem Versicherungswerte

$$a_x + \frac{1}{2}A_x = a_x - 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{1+i}a_x\right)$$
$$= \frac{2+i}{2(1+i)}a_x - \frac{1}{2} \qquad (54)$$

zu rechnen.

Unter einer *vollständigen Leibrente* im eigentlichen Sinne versteht man aber eine postnumerando zahlbare Rente mit einer unmittelbar nach dem Tode auszufolgenden Ergänzung im Teilbetrage der durchlebten Quote des Sterbejahres.

Man kann, die früheren Schlüsse anwendend, in erster Näherung so rechnen, als ob der durchschnittliche Wert $\frac{1}{2}$ der Vervollständigung auch in der Mitte des Sterbejahres gezahlt würde; er erreichte dann

bis zum Schlusse des Jahres die Höhe $\frac{1}{2}(1+i)^{\frac{1}{2}}$, und dies wäre der Betrag der Todesfallversicherung, die zu der Rente hinzukommt. Bezeichnet man den Wert der vollständigen Rente mit $\overset{0}{a}_x$, so wäre hiernach:

$$\overset{0}{a}_x = a_x + \frac{1}{2} A_x (1+i)^{\frac{1}{2}}. \tag{55}$$

Diese Rechnung ist aber insofern unzutreffend, als die über dem Durchschnitt liegenden Ergänzungszahlungen von der Diskontierung stärker berührt werden als die Ergänzungszahlungen unter $\frac{1}{2}$. Schärfer ist daher die folgende Wertbestimmung.

Es sei t der noch durchlebte Teil des Sterbejahres; dann ist auch t die zu leistende Ergänzungszahlung, tv^t ihr Wert am Anfange, tv^{t-1} ihr Wert am Ende des Jahres. Da ferner dt die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Tod in dem Zeitintervall $(t, t+dt)$ eintreten werde, — gleichmäßige Verteilung der Sterbefälle vorausgesetzt, — so ist der strenge, auf das Ende des Todesjahres reduzierte Mittelwert der Ergänzungszahlung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 tv^{t-1}\,dt &= \left\{\frac{tv^{t-1}}{\operatorname{Log} v} - \int \frac{v^{t-1}}{\operatorname{Log} v}\,dt\right\}_0^1 \\ &= \left\{\frac{tv^{t-1}}{\operatorname{Log} v} - \frac{v^{t-1}}{(\operatorname{Log} v)^2}\right\}_0^1 \\ &= \frac{1}{\operatorname{Log} v} - \frac{1}{(\operatorname{Log} v)^2} + \frac{1}{v(\operatorname{Log} v)^2} = \frac{i-\delta}{\delta^2}\end{aligned}$$

(vgl. Nr. 257). Daher hat man in schärferer Rechnung:

$$\overset{0}{a}_x = a_x + \frac{i-\delta}{\delta^2} A_x. \tag{56}$$

Entwickelt man in den beiden Formeln (55) und (56), um sie in Vergleich zu setzen, den Koeffizienten von A_x nach Potenzen von i, wonach:

$$\frac{1}{2}(1+i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{4} - \frac{i^2}{16} + \cdots$$

$$\frac{i-\delta}{\delta^2} = \frac{i - \operatorname{Log}(1+i)}{\operatorname{Log}^2(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{6} - \frac{i^2}{24} + \cdots,$$

so hat man auch:

$$\overset{0}{a}_x = a_x + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} - \frac{i^2}{16}\right) A_x \tag{55*}$$

$$\overset{0}{a}_x = a_x + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{6} - \frac{i^2}{24}\right) A_x; \tag{56*}$$

der erste Wert übertrifft den zweiten um

$$\left(\frac{i}{12} - \frac{i^2}{48}\right) A_x.$$

Nach Tafel VIII ist der Wert einer vollständigen Rente 1 für einen 30-jährigen, mittels der Formel (55) gerechnet:

$$\begin{aligned} \overset{0}{a}_{30} &= a_{30} + \frac{1}{2} A_{30}\sqrt{1{,}035} \\ &= 18{,}441 + 0{,}174 \\ &= 18{,}615; \end{aligned}$$

es bewertet sich also eine derartige Rente vom Jahresbetrage 1000 ℳ, wenn sie vollständig ist, um 174 ℳ höher als bei normalem Zahlungsmodus.

276. Vollständige m-tel-Rente. Das zuletzt benutzte Prinzip läßt sich auch zur Bestimmung dieses Versicherungswertes verwenden. Es ist dies eine Rente, welche am Ende jedes m-tel-Jahres mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ und im Augenblicke des Todes mit dem der durchlebten Quote des letzten m-tel-Jahres entsprechenden Teilbetrage von $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung kommt.

Der Tod kann in jedem m-tel des Sterbejahres erfolgen; tritt er im Laufe des $\overline{s+1}$-ten Teiles, also zur Zeit $\frac{s}{m} + t$ ein, wo $t < \frac{1}{m}$, so ist t die Ergänzungszahlung, $tv^{\frac{s}{m}+t}$ ihr Wert am Beginne des Jahres, $tv^{\frac{s}{m}+t-1}$ am Ende des Jahres, somit der auf das Ende des Jahres reduzierte Durchschnittswert einer im $\overline{s+1}$-ten Teile eines Jahres fälligen Ergänzungszahlung:

$$\begin{aligned} v^{\frac{s}{m}-1}\int_0^{\frac{1}{m}} tv^t dt &= v^{\frac{s}{m}-1}\left\{-\frac{tv^t}{\delta} - \frac{v^t}{\delta^2}\right\}_0^{\frac{1}{m}} \\ &= v^{\frac{s}{m}-1}\left\{-\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}\right\}. \end{aligned}$$

Die Summe aller solchen Ausdrücke, von $s = 0$ bis $s = m - 1$ genommen, gibt den Durchschnitt der gesamten, auf das Jahresende reduzierten Ergänzungszahlungen, nämlich

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1 - v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta}\right)\left(v^{-1} + v^{\frac{1}{m}-1} + \cdots + v^{\frac{m-1}{m}-1}\right) \\ &= \left(\frac{1 - v^{\frac{1}{m}}}{\delta^2} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\delta}\right)\frac{\frac{1}{v} - 1}{1 - v^{\frac{1}{m}}}; \end{aligned}$$

beachtet man, daß $\frac{1}{v} - 1 = 1 + i - 1 = i$, ferner, daß

$$m\left(\frac{1}{v^{\frac{1}{m}}}-1\right)^{\frac{1}{m}} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right] = j_{(m)}$$

ist, so verwandelt sich dies in

$$\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}.$$

Man hat daher als Wert der vollständigen m-tel-Rente:

$$\overset{0}{a}_x{}^{(m)} = a_x{}^{(m)} + A_x\left(\frac{i}{\delta^2} - \frac{i}{\delta j_{(m)}}\right). \tag{57}$$

Bei $m = 1$ geht diese Formel, da $j_{(1)} = i$, tatsächlich wieder in die Formel (56) über.

277. In unterjährigen Terminen zahlbare Todesfallversicherung. Die der Berechnung von A_x unterlegte normale Festsetzung geht dahin, daß das versicherte Kapital am Ende jenes Versicherungsjahres ausbezahlt wird, in welchem der Tod eintritt. Das bedeutet, daß zwischen dem Sterben und der Kapitalsauszahlung ein Zeitraum bis zu einem Jahre verstreichen kann; nimmt man an, daß während eines Altersjahres die Todesfälle gleichförmig sich verteilen, so beträgt die Zwischenzeit im Durchschnitt $\frac{1}{2}$ Jahr. Es darf also A_x als Wert einer Todesfallversicherung angesehen werden, die im Mittel 6 Monate nach Eintritt des Todes liquidiert wird.

In gleicher Weise darf geschlossen werden, daß eine Todesfallversicherung, bei der das versicherte Kapital am Ende jenes m-tel-Jahres zur Auszahlung kommt, in welchem der Tod eintritt, als eine solche erklärt werden kann, bei der vom Sterben bis zur Liquidierung im Mittel $\frac{1}{2m}$ Jahr verfließt.

Bezeichnet man den Wert einer derartigen Versicherung mit $A_x{}^{(m)}$, so besteht der Unterschied zwischen ihr und der normalen Versicherung A_x darin, daß bei jener die Kapitalsauszahlung im Durchschnitt um $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ Jahr früher erfolgt als bei dieser; demnach muß die erste $(1+i)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}$-mal höher bewertet werden als die zweite, so daß man den Ansatz hat:

$$A_x{}^{(m)} = A_x(1+i)^{\frac{m-1}{2m}}. \tag{58}$$

Danach hat eine am Ende des Sterbehalbjahres fällige Versicherung den Wert

$$A_x{}^{(2)} = A_x(1+i)^{\frac{1}{4}},$$

eine Versicherung, welche am Ende des Sterbequartales auszuzahlen ist, den Wert

$$A_x{}^{(4)} = A_x(1+i)^{\frac{3}{8}}.$$

Macht man in (58) den Grenzübergang $m = \infty$, so kommt man zu dem Werte $\bar{A}_x$ einer unmittelbar nach dem Tode fälligen Ablebensversicherung:

$$\bar{A}_x = A_x(1+i)^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Wenn der Grundsatz der unmittelbaren Zahlung nach erfolgtem Ableben angenommen ist, wie dies gegenwärtig häufig geschieht, so kann dem schon in der Bildung der diskontierten Zahlen der Toten Rechnung getragen werden, indem man an diesen den Reduktionsfaktor $(1+i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}$ anbringt und an Stelle von $C_x = v^{x+1}d_x$ bildet

$$\bar{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}}d_x;$$

dem entsprechend sind dann die Summen, um sie von den üblichen M_x zu unterscheiden, mit $\bar{M}_x$ zu bezeichnen.[1])

278. Darstellungen der sofort zahlbaren Todesfallversicherung. Die eben erwähnte Ablebensversicherung, bei welcher das Kapital sofort, d. i. im Augenblicke des Todes fällig wird, ist auf infinitesimalem Wege so zu rechnen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß (x) in dem Zeitintervall $t, t+dt$, vom Abschluß der Versicherung an gerechnet, sterben werde, ist

$$\frac{l_{x+t} - l_{x+t+dt}}{l_x} = -\frac{dl_{x+t}}{l_x},$$

und die hierauf bezügliche Anwartschaft auf das Kapital 1 hat den Wert

$$-v^t\frac{dl_{x+t}}{l_x};$$

folglich ist

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} v^t dl_{x+t}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich weiter:

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}\left(v^t l_{x+t} - \operatorname{Log} v\int l_{x+t}v^t dt\right)_0^{\omega-x},$$

und da (s. Nr. 274) $\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} v^t l_{x+t}dt$ der Ausdruck für die kontinuierliche Rente $\bar{a}_x$ ist, wird

1) Dieser Vorgang ist bei der „Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank", Jena 1903, befolgt worden; man vergleiche daselbst p. 88 und Tabelle 21.

$$\bar{A}_x = -\frac{1}{l_x}(-l_x + \delta l_x \bar{\mathrm{a}}_x) = 1 - \delta \bar{\mathrm{a}}_x;$$

diese Formel ist analog der Formel (22), wonach $A_x = 1 - d\mathrm{a}_x$.

Drückt man $\bar{\mathrm{a}}_x$ nach Formel (52) durch

$$\frac{1}{1+i}\left(\frac{i}{\delta}\right)^2 \mathrm{a}_x - \frac{i-\delta}{\delta^2}$$

und darin wiederum a_x durch A_x mittels (22) aus, wonach

$$\mathrm{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} = \frac{(1 - A_x)(1+i)}{i}$$

ist, so gestaltet sich die letzte Formel nach einfacher Rechnung um in:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{60}$$

Entwickelt man in den Formeln (59) und (60) die Koeffizienten $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{i}{\delta} = \frac{i}{\operatorname{Log}(1+i)}$ nach Potenzen von i bis zur zweiten einschließlich, so ergeben sich die Näherungen:

$$\bar{A}_x = \left(1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{8}\right) A_x \tag{59*}$$

$$\bar{A}_x = \left(1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{12}\right) A_x, \tag{60*}$$

deren Differenz bloß $\frac{i^2}{24} A_x$ ist; ja man kann, von Gliedern der Ordnung i^2 absehend, selbst bei beträchtlich hohen Versicherungen

$$\bar{A}_x = A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right) \tag{61}$$

setzen, d. h. den normalen Wert A_x um die halben rechnungsmäßigen Prozente erhöhen, um $\bar{A}_x$ zu erhalten.

Zur näheren Beurteilung der Formeln (60) und (61) seien die folgenden Resultate angeführt. Es ist

für	nach Formel (60):	nach Formel (61):
$i = 0{,}03$	$\bar{A}_x = 1{,}014926\ A_x$,	$= 1{,}015\ A_x$
$= 0{,}035$	$= 1{,}017400\ A_x$,	$= 1{,}0175\ A_x$
$= 0{,}04$	$= 1{,}019870\ A_x$,	$= 1{,}02\ A_x$
$= 0{,}045$	$= 1{,}022334\ A_x$,	$= 1{,}0225\ A_x$
$= 0{,}05$	$= 1{,}024791\ A_x$,	$= 1{,}025\ A_x$.

Für die Todesfallversicherung eines 35-jährigen, sofort nach dem Tode zahlbar und auf 10000 lautend, ergibt sich beispielsweise mit den Grundlagen der Tafel VIII nach (60) der Wert:

$$\bar{A}_{35} = 3860{,}93,$$

nach (61)

$$\bar{A}_{35} = 3861{,}31,$$

während die normale Versicherung den Wert 3794,90 besitzt.

§ 6. Renten für verbundene Leben.

279. Begriff der Verbindungsrente. Unter einer Verbindungsrente *im weiteren Sinne* versteht man jede Rente, die an einen Komplex von Lebenden (x), (y), (z), $\cdots$ gebunden ist. Über ihren Beginn, ihren Abschluß, die Höhe des Rentenbezuges, die Reihenfolge der Bezugsberechtigten können mannigfache Bestimmungen getroffen sein, um so mannigfacher, je größer die Anzahl m der verbundenen Leben ist. Unter der Fülle möglicher Formen haben aber nur wenige praktische Bedeutung erlangt.

Zur Wertbestimmung solcher Renten sind, neben der Leibrente, die Verbindungsrenten *im engeren Sinne* oder schlechtweg die Grundlage. Man versteht unter dieser Bezeichnung eine Rente, die sofort beginnt und mit gleichbleibendem Jahresbetrage so lange währt, als der ganze Komplex am Leben bleibt, der einer solchen Rente gegenüber also die Rolle eines Individuums spielt, das mit dem Tode der ersten Person aus dem Komplex zu bestehen aufhört. Aus diesem Grunde nennt man die gewöhnliche Verbindungsrente auch die *Rente bis zum ersten Tode.*

Ihr Wert, bezogen auf den Jahresbetrag 1, wird mit $\mathfrak{a}_{xyz\cdots(m)}$ bezeichnet.

Ist ${}_np_{xyz\cdots(m)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die m Personen nach n Jahren noch am Leben sein werden, so ist der Wert von $\mathfrak{a}_{xyz\cdots(m)}$ die Summe aller

$$v^n\,{}_np_{xyz\cdots(m)}$$

von $n=0$ angefangen, wobei zu bemerken, daß ${}_0p_{xyz\cdots(m)}=1$ ist. Man hat also den allgemeinen Ansatz:

$$\mathfrak{a}_{xyz\cdots(m)}=\sum_0 v^n\,{}_np_{xyz\cdots(m)}. \tag{62}$$

Macht man, wie dies allgemein geschieht, die sicher nicht immer zutreffende Voraussetzung, die Leben seien von einander unabhängig, so daß der Tod einer Person auf die Lebensdauer der Überlebenden keinen Einfluß übt, so stellt sich ${}_np_{xyz\cdots(m)}$ als Produkt der auf die einzelnen Personen und dasselbe Ereignis bezüglichen Wahrscheinlichkeiten dar; man setzt also in Konsequenz obiger Voraussetzung

$${}_np_{xyz\cdots(m)}={}_np_x\cdot{}_np_y\cdot{}_np_z\cdots$$

und rechnet die einzelnen Faktoren der rechten Seite mit Hilfe der Sterbetafel. Dabei ist zu unterscheiden, ob die einzelnen Leben als gleichwertige Risken, also nach derselben Tafel zu behandeln sind, oder ob sie Gesamtheiten verschiedenen Sterblichkeitsverlaufes ange-

hören und daher nach verschiedenen Tafeln zu beurteilen sind (z. B. Personen männlichen und weiblichen Geschlechtes).

Unter den Verbindungsrenten sind die auf zwei Leben (x), (y) abgeschlossenen die wichtigsten, weil am häufigsten vorkommenden. Aus

$$_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

folgt nach Vorschrift von (62):

$$\mathfrak{a}_{xy} = \frac{l_x l_y + v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{l_x l_y}$$

$$= \frac{v^x l_x l_y + v^{x+1} l_{x+1} l_{y+1} + v^{x+2} l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{v^x l_x l_y}$$

$$= \frac{D_x l_y + D_{x+1} l_{y+1} + D_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{D_x l_y};$$

führt man für das Produkt $D_x l_y$, dessen ein Faktor eine diskontierte, der andere eine unmittelbare Zahl von Lebenden ist, die Bezeichnung D_{xy} und für die Summe dieser *diskontierten Paare von Lebenden* von dem Zeiger x, y aufwärts die Bezeichnung

$$N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \cdots \tag{63}$$

ein, so schreibt sich die Verbindungsrente, der einfachen Leibrente analog:

$$\mathfrak{a}_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}. \tag{64}$$

Diese Art der technischen Durchführung der Verbindungsrenten stammt von Griffith Davies.[1]) Seine diskontierten Zahlen

$$D_{xy} = D_x l_y, \tag{65}$$

die zu allgemeinem Gebrauche gekommen sind, weisen insofern eine Unsymmetrie auf, als man sich darüber entscheiden muß, für welches Leben man die diskontierten Zahlen wählen will; theoretisch ist dies gleichgültig, aus praktischen Gründen, um es mit kleineren Zahlen zu tun zu haben, wählt man das Leben des höheren Alters hierfür.

De Morgan[2]) hat, um Symmetrie zu erzielen, die Bildung der diskontierten Zahlen der Paare gemäß der Formel

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y \tag{66}$$

vorgeschlagen, der auch die wesentliche Eigenschaft zukommt, daß

1) Tables of life contingencies etc. London 1835. — Treatise on annuities etc. London 1885.

2) The principles and doctrine of assurance etc. London 1821.

$$D_{x+1,y+1} = v^{\frac{x+y}{2}+1} l_{x+1} l_{y+1},$$

daß also mit dem Steigen der Alter um 1 Jahr der Exponent von v um 1 zunimmt. Auch für diese Zahlen gilt die Formel (64).

Die Übertragung dieser Formel auf mehr als zwei Leben bietet keine Schwierigkeit.

280. Berechnung von Verbindungsrenten. Satz von De Morgan. Methode der gleichen Alter. I. Die Anlegung von Tafeln für Verbindungsrenten ist eine beschwerliche Arbeit, schon wenn es sich um zwei Leben handelt; hier wiederum ist die Schwierigkeit eine erheblich größere, wenn die beiden Leben nach verschiedenen Sterbetafeln zu behandeln sind, als wenn beiden dieselbe Tafel unterlegt wird. Während nämlich im ersten Falle für jede in Betracht kommende Altersdifferenz $|x-y|$ *zwei* Tafeln gerechnet werden müssen, die eine für $x > y$, die andere für $x < y$, gehört im zweiten Falle zu jeder Altersdifferenz nur *eine* Tafel.

Die Rechnung besteht bei jeder einbezogenen Altersdifferenz in der Bildung der Zahlenkolonne D_{xy} und ihrer Summenreihe N_{xy}.

Bei mehr als zwei Leben würde die Arbeit, Rententabellen in größerem Umfange anzulegen, zu einer geradezu nicht zu bewältigenden.

Es sind daher vielfach praktische Regeln aufgestellt worden, um Verbindungsrenten für mehrere Leben auf einfachere Renten zurückzuführen. Eine solche Regel, an der später in verschiedener Weise Korrektionen versucht worden sind, um sie mit den Resultaten direkter Rechnung besser in Einklang zu bringen, hat Thomas Simpson aufgestellt.[1]) Sie lautet, wenn man sich der gegenwärtigen Zeichensprache bedient, wie folgt: „Ist $\mathfrak{a}_{xyz}$ zu bestimmen, und ist $x < y < z$, so suche man mit Hilfe einer Tafel für Renten auf zwei Leben und einer Tafel einfacher Renten w derart, daß

$$\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a}_{yz};$$

alsdann ist

$$\mathfrak{a}_{xyz} = \mathfrak{a}_{xw}.“$$

Hierdurch wäre also die Berechnung von Verbindungsrenten auf drei Leben zurückgeführt auf Renten für zwei Leben. Die Anwendung der Regel auf die Tafeln des „Institute of Actuaries“ hat jedoch gezeigt, daß sie — von den hohen Altern abgesehen — etwas zu große Rentenwerte liefert.

II. Zu einer streng richtigen, auf beliebig viele Leben ausdehnbaren würde die Simpsonsche Regel, wenn für die ganze Lebensdauer die Gompertzsche Formel gälte, wie dies De Morgan[2]) zuerst

1) Doctrine of Annuities and Reversions, London 1742; Select Excercices etc., London 1752.

2) Philos. Mag. 1839, Novbr.

bewiesen hat. Diese Formel gestattet nämlich, zu zwei Altern x, y ein „mittleres“ Alter w so zu bestimmen, daß

$$ {}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = {}_n p_w $$

wird für *jedes* n; dann aber gilt auch streng:

$$ \mathfrak{a}_{xy} = \mathfrak{a}_w, $$

d. h. jede Verbindungsrente für zwei Leben läßt sich durch eine einfache Rente ersetzen. Es ist klar, daß dies auf beliebig viele Leben ausgedehnt werden kann.

Aus der Gompertzschen Formel [s. Nr. 240, Gl. (2)]

$$ l_x = k g^{c^x} $$

geht nämlich

$$ l_{x+n} = k g^{c^{x+n}} $$

und aus beiden Ansätzen

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = g^{c^x (c^n - 1)} $$

hervor; dies gibt in jedem Logarithmensystem:

$$ \log {}_n p_x = c^x (c^n - 1) \log g; \tag{$\varDelta$} $$

hält man dazu

$$ \log {}_n p_y = c^y (c^n - 1) \log g, $$

so ergibt sich

$$ \log {}_n p_{xy} = \log {}_n p_x + \log {}_n p_y = (c^x + c^y)(c^n - 1) \log g. $$

Bestimmt man w derart, daß

$$ c^x + c^y = c^w \tag{$\varDelta'$} $$

wird, so ergibt sich mit Rücksicht auf ($\varDelta$):

$$ \log {}_n p_{xy} = c^w (c^n - 1) \log g = \log {}_n p_w, $$

woraus die für jedes n gültige Gleichung

$$ {}_n p_{xy} = {}_n p_w $$

folgt.

Aus ($\varDelta'$), wenn man es in der Form

$$ c^{w-y} = 1 + c^{x-y} $$

schreibt, liest man die Tatsache, daß $w - y$ konstant bleibt, so lange es $x - y$ ist; für alle Verbindungen (x), (y) gleicher Altersdifferenz ist also die Abweichung des substituierten Alters w von dem einen Alter y die nämliche.

III. Auch wenn die Sterbetafel der Makehamschen Formel folgt, ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung in der Berechnung der Verbindungsrenten. Nach Nr. 240, Gl. (5) ist nämlich dann

$$ l_x = k s^x g^{c^x}, $$

also

$$l_{x+n} = ks^{x+n} g^{c^{x+n}},$$

daher

$$\log {}_n p_x = n \log s + c^x (c^n - 1) \log g, \qquad (\Delta'')$$

ebenso

$$\log {}_n p_y = n \log s + c^y (c^n - 1) \log g,$$

folglich

$$\log {}_n p_{xy} = \log {}_n p_x + \log {}_n p_y = 2n \log s + (c^x + c^y)(c^n - 1) \log g;$$

wird also w so bestimmt, daß es der Gleichung

$$c^x + c^y = 2c^w \qquad (\Delta''')$$

genügt, so zeigt ein Vergleich mit (Δ''), daß dann

$$\log {}_n p_{xy} = 2 \log {}_n p_w = \log {}_n p^2_w = \log {}_n p_{ww}$$

wird; d. h. man kann ${}_n p_{xy}$ für jedes n durch ein ${}_n p_{ww}$, also auch ein ${}_n p_{xyz\ldots(m)}$ durch ein gleichwertiges ${}_n p_{www\ldots(m)}$ ersetzen, wenn nur w der Gleichung

$$c^x + c^y + c^z + \cdots = mc^w \qquad (\Delta^{IV})$$

gemäß bestimmt wird.

Infolge dieses Sachverhaltes ist es möglich, Verbindungsrenten, die zu verschiedenen Altern gehören, durch Verbindungsrenten ebenso vieler gleichaltriger Leben darzustellen, wodurch eine erhebliche Verminderung der Arbeit erzielt wird. Nicht zu übersehen ist der Umstand, daß die abgeleiteten Sätze auf der Voraussetzung beruhen, daß die verbundenen Leben gleichwertige Risken repräsentieren.

Diese Vorteile sind mit ein Grund, weshalb bei der Ausgleichung vieler Tafeln die Gompertzsche oder die Makehamsche Formel zur Anwendung gebracht worden ist.

Die eben erklärte *Methode der gleichen Alter* wird rechnerisch so durchgeführt. Handelt es sich um zwei Leben (x) und $(x + h)$ und setzt man $w = x + t$, so liefert die Gleichung (Δ''') für die an dem jüngeren Leben anzubringende Alterserhöhung

$$t = \frac{\log \frac{1 + c^h}{2}}{\log c}, \qquad (67)$$

die für verschiedene h tabellarisiert werden kann.

Bei drei Leben (x), $(x + h)$, $(x + h + k)$ erhält man unter Anwendung der allgemeinen Formel (Δ^{IV}), wenn wieder $w = x + t$ gesetzt wird, für die Alterserhöhung des jüngsten Lebens

$$t = \frac{\log \frac{1 + c^h + c^{h+k}}{3}}{\log c}; \qquad (68)$$

auch diese Werte können in einer Tafel mit doppeltem Eingang (h

und k) ein für allemal zusammengestellt werden, wie dies bezüglich der Tafel $O^{M(5)}$ geschehen ist.[1])

Es handelt sich dann noch um die Herstellung von Verbindungsrenten für zwei und drei gleichaltrige Leben; die dazu führenden Formeln

$$a_{xx} = \frac{N_{xx}}{D_{xx}}, \qquad a_{xxx} = \frac{N_{xxx}}{D_{xxx}} \tag{69}$$

erfordern die Bildung der Kolumnen

$$D_{xx} = l_x D_x, \qquad D_{xxx} = l_x D_{xx} \tag{70}$$

und ihrer Summen

$$N_{xx} = D_{xx} + D_{x+1,x+1} + \cdots, \quad N_{xxx} = D_{xxx} + D_{x+1,x+1,x+1} + \cdots. \tag{71}$$

IV. Die Bestimmung des gemeinsamen Alters w kann auch mit Hilfe einer Tafel der Sterblichkeitsintensitäten, die aus der betreffenden Sterbetafel abgeleitet ist, erfolgen.

Ist die Sterbetafel nach der Gompertzschen Formel ausgeglichen, so folgt aus

$$\mu_x = Bc^x$$
$$\mu_y = Bc^y$$

durch Addition:

$$\mu_x + \mu_y = B(c^x + c^y) = Bc^w = \mu_w,$$

d. h. man bilde die Summe der Sterblichkeitsintensitäten von (x) und (y) und suche zu dieser Summe, wieder als Sterblichkeitsintensität aufgefaßt, das zugehörige Alter.

Folgt die Sterbetafel der Makehamschen Formel, so hat man allgemein für m Leben die Ansätze:

$$\mu_x = A + Bc^x$$
$$\mu_y = A + Bc^y$$
$$\mu_z = A + Bc^z,$$
$$\cdots\cdots$$

aus denen sich

$$\mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots = mA + B(c^x + c^y + c^z + \cdots) = m[A + Bc^w] = m\mu_w$$

ergibt; d. h. man hat das arithmetische Mittel der Sterblichkeitsintensitäten von (x), (y), (z), $\cdots$ zu bilden und zu diesem, wieder als Sterblichkeitsintensität aufgefaßt, das zugehörige Alter zu nehmen.

Zur Illustration diene das folgende, an die Tafel $O^{M(5)}$ sich anlehnende Beispiel. Zu $x = 30$, $y = 37$, $z = 52$, also $h = 7$ und $k = 15$ liefert die zitierte Tabelle unmittelbar $t = 13{,}50$. Ohne diese Tabelle und mit Benutzung der Sterblichkeitsintensitäten hat man folgende Rechnung:

---

1) In dem 1902 erschienenen Bande der Offices Life Tables 1893, der die technischen Hilfszahlen zu den Tafeln O^M und $O^{M(5)}$ enthält, p. 244—249.

$$\begin{array}{rl} \mu_{30} &= 0{,}00742 \\ \mu_{37} &= 0{,}00877 \\ \mu_{52} &= 0{,}01696 \\ \hline \text{Mittel} &= 0{,}01105 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mu_{43} &= 0{,}01082 \\ \mu_{44} &= 0{,}01129 \\ \hline 23:47 &= 0{,}50; \end{array}$$

auf beiden Wegen ergibt sich also $w = 43{,}5$, und aus demselben Tabellenwerte entnimmt man unmittelbar die Rente

$$a_{30,37,52} = a_{43,5;\,43,5;\,43,5} = 11{,}249.$$

281. Verbindungsrenten bis zu einem späteren Tode. An die Verbindung der m Leben (x), (y), (z), $\cdots$ sei die Pränumerando-Rente 1 so lange zahlbar, als *mindestens* r davon am Leben sind, das heißt ebenso viel als *bis zum* $\overline{m - r + 1}$*-ten Tode.* Das Zeichen für den Wert dieser Rente ist $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$. Wird $r = 1$, so läuft die Rente, so lange noch *ein* Überlebender aus der Verbindung vorhanden ist, also bis *zum letzten Tode*; man bezeichnet sie dann kurz mit $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}$.

Die Bestimmung von $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ stützt sich auf das zweite in Nr. 41 gestellte Problem; unter den Ereignissen e_i, f_i der dortigen Formulierung ist das Erleben, beziehungsweise Nichterleben der Alter $x + n$, $y + n$, $z + n$, $\cdots$ seitens der Personen (x), (y), (z), $\cdots$ zu verstehen. Nach der dort abgeleiteten Formel (8) stellt sich die Wahrscheinlichkeit ${}_np_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$, daß von den m Personen nach n Jahren mindestens r am Leben seien, durch einen Ausdruck von der Form

$$S_r - \binom{r}{1} S_{r+1} + \binom{r+1}{2} S_{r+2} - \cdots + (-1)^{m-r} \binom{m-1}{r+1} S_m \qquad (\alpha)$$

dar; dabei bedeutet

$$S_k \text{ die Summe aller } {}_np_{xyz\cdots(k)},$$

also die Summe der Wahrscheinlichkeiten bezüglich aller Kombinationen von je k Personen der Verbindung, daß sie nach n Jahren noch leben.

Nun ist $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ die Summe der Werte $v^n\,{}_np_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ für alle n von $n = 0$ angefangen (wobei ${}_0p_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r} = 1$); mithin entsteht für $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ ein Ausdruck von der gleichen Form wie (α), nur daß nunmehr

$$S_k \text{ die Summe aller } a_{xyz\cdots(k)},$$

also die Summe der Verbindungsrenten für alle Kombinationen von je k Personen der Verbindung ist.

Aus dieser Deduktion geht hervor, daß sich $a_{\overline{xyz\cdots(m)}}^{\;r}$ ausdrücken läßt durch die Verbindungsrenten $a_{xyz\cdots(k)}$ für alle k von r aufwärts bis m.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Die auf die Leben (x), (y) bezügliche, bis zum zweiten Tode, also bis zum Aussterben der Verbindung währende Rente 1 hat nach (α) den Wert

$$\mathrm{a}_{\overline{xy}} = S_1 - S_2 = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - \mathrm{a}_{xy}.$$

Eine Rente vom Jahresbetrage 1, auf die Leben (x), (y), (z) begründet und bis zum letzten Tode während, hat nach demselben Schema (α) den Wert

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_{\overline{xyz}} &= S_1 - S_2 + S_3 \\ &= \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z - (\mathrm{a}_{yz} + \mathrm{a}_{zx} + \mathrm{a}_{xy}) + \mathrm{a}_{xyz}; \end{aligned}$$

insbesondere ist für drei Leben gleichen Alters

$$\mathrm{a}_{\overline{xxx}} = 3\mathrm{a}_x - 3\mathrm{a}_{xx} + \mathrm{a}_{xxx};$$

mit den Daten der Tafel VIII ergibt sich für den speziellen Fall $x = 30$:

$$\mathrm{a}_{\overline{30,30,30}} = 3 \cdot 19{,}441 - 3 \cdot 16{,}399 + 14{,}394 = 23{,}520,$$

ein Wert, der um 4,079 größer ist als die auf *ein* Leben von 30 Jahren bezügliche Leibrente.

Soll unter den obigen Verhältnissen die Rente bis zum zweiten Tode, also so lange mindestens zwei Personen am Leben sind, währen, so ist ihr Wert

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^{2}_{\overline{xyz}} &= S_2 - 2S_3 \\ &= \mathrm{a}_{yz} + \mathrm{a}_{zx} + \mathrm{a}_{xy} - 2\mathrm{a}_{xyz}. \end{aligned}$$

Die Rente bis zum ersten Tode, $\mathrm{a}^{3}_{\overline{xyz}}$, ist identisch mit der Verbindungsrente a_{xyz}.

War bei dem voranstehenden Problem bloß der Zeitpunkt des Aufhörens der Rente unbestimmt, so ist es bei dem nachfolgenden auch der Zeitpunkt des Beginnes.

An die Verbindung der m Leben (x), (y), (z), $\cdots$ sei die Rente 1 pränumerando so lange zahlbar, als *gerade* r davon am Leben sind, also vom $\overline{m - r}$-ten bis zum $\overline{m - r + 1}$-ten Tode. Das Zeichen für diese Rente ist $\mathrm{a}^{[r]}_{\overline{xyz\cdots(m)}}$.

Die Lösung dieses Problemes gründet sich auf die erste in Nr. 41 erledigte Aufgabe; den vorigen völlig gleichwertige Erwägungen führen dazu, daß $\mathrm{a}^{[r]}_{\overline{xyz\cdots(m)}}$ durch

$$S_r - \binom{r+1}{1} S_{r+1} + \binom{r+2}{2} S_{r+2} - \cdots + (-1)^{m-r} \binom{m}{m-r} S_m \qquad (\beta)$$

dargestellt ist mit derselben Bedeutung von S_k, wie sie zuletzt angegeben wurde.

Hiernach ist beispielsweise bei drei Leben

$$\mathrm{a}_{\overline{xyz}}^{[1]} = S_1 - 2S_2 + 3S_3$$

$$= \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z - 2(\mathrm{a}_{yz} + \mathrm{a}_{zx} + \mathrm{a}_{xy}) + 3\mathrm{a}_{xyz},$$

$$\mathrm{a}_{\overline{xyz}}^{[2]} = S_2 - 3S_3 = \mathrm{a}_{yz} + \mathrm{a}_{zx} + \mathrm{a}_{xy} - 3\mathrm{a}_{xyz},$$

$$\mathrm{a}_{\overline{xyz}}^{[3]} = S_3 = \mathrm{a}_{xyz}.$$

Sind alle drei Personen vom Alter x, so ist

$$\mathrm{a}_{\overline{xxx}}^{[1]} = 3\mathrm{a}_x - 6\mathrm{a}_{xx} + 3\mathrm{a}_{xxx};$$

diese Rente wird an die letzte der drei Personen nach dem Tode der beiden andern bis zu ihrem eigenen Tode gezahlt; sie kommt das erste Mal zur Auszahlung am Beginne jenes Versicherungsjahres, das dem Todesjahre der zweitgestorbenen Person folgt. Beispielsweise ist nach Tafel VIII:

$$\mathrm{a}_{\overline{30,30,30}}^{[1]} = 3 \cdot 19{,}441 - 6 \cdot 16{,}399 + 3 \cdot 14{,}394 = 3{,}111.$$

282. Überlebensrenten. Einen praktisch wichtigen Fall der letztbesprochenen Rentengattung bildet die auf zwei Leben (x), (y) gegründete *gegenseitige Überlebensrente.* Es ist dies die vom ersten bis zum zweiten Tode, also an die überlebende Person, *welche von beiden es auch sei*, pränumerando zahlbare Rente 1. Ihr Wert ist nach (β)

$$\mathrm{a}_{\overline{xy}}^{[1]} = S_1 - 2S_2 = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\mathrm{a}_{xy}. \tag{71}$$

Diese Formel kann auch durch folgende Schlußfolgerung abgeleitet werden. Würden (x) und (y) unabhängig von einander eine Leibrente begründen, so wäre der Wert ihrer Anwartschaften $\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y$; so lange sie zusammenleben, bezöge ihre Verbindung die Rente 2, deren Wert $2\mathrm{a}_{xy}$ ist; diese Anwartschaft fällt aber nach den obigen Bestimmungen hinweg; folglich verbleibt $\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\mathrm{a}_{xy}$ als Wert der Rente, die nur an den Überlebenden von beiden im Jahresbetrage 1 ausgezahlt wird.

Es sei beispielsweise die gegenseitige Überlebensrente für zwei Personen zu bestimmen, deren eine 30, die andere 45 Jahre alt ist; als Grundlage diene Tafel VIII.

$$\mu_{30} = 0{,}00768 \qquad\qquad \mathrm{a}_{39,39} = 14{,}272$$
$$\mu_{45} = 0{,}01204 \qquad\qquad \mathrm{a}_{40,40} = 14{,}007$$
$$2\mu_w = 0{,}01972 \qquad\qquad \text{Diff.} = 0{,}265$$
$$\mu_w = 0{,}00986$$
$$w = 39{,}94 \qquad\qquad \text{Prop.-Th. zu } 0{,}94 = 0{,}249 \text{ (subtrakt.)}$$
$$\mathrm{a}_{30,45} = 14{,}023$$

demnach ist die gesuchte Überlebensrente

$$\mathfrak{a}_{\overline{30, 45}}^{[1]} = 19,441 + 15,706 - 2 \cdot 14,023 = 7,101.$$

Eine Form der Verbindungsrente, bei der die Reihenfolge der Todesfälle der Versicherten in Betracht kommt und die bei Witwen- und Waisenpensionen von praktischer Bedeutung ist, bildet die *einseitige Überlebensrente.* Ihr Wesen besteht in folgendem. An die Person (x) wird, wenn sie die Person (y) überlebt, vom Tode dieser angefangen[1]) bis zu ihrem eigenen Ableben die Rente 1 bezahlt. Der Wert dieser Rente wird mit $\mathfrak{a}_{y|x}$ bezeichnet. Das Zeichen ist so gebildet, daß das Alter der *begünstigten* Person *rechts* von dem vertikalen Strich steht.

Zu ihrer Bestimmung führt folgende Überlegung. Eine Leibrente für (x) hat den Wert $\mathfrak{a}_x$; so lange aber (x) mit (y) zugleich lebt, hat der Bezug der Rente zu entfallen, und der Wert dieses Entganges ist $\mathfrak{a}_{xy}$; folglich gilt der Ansatz:

$$\mathfrak{a}_{y|x} = \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{xy}. \tag{72}$$

Von der Richtigkeit desselben kann man sich auch durch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung überzeugen. Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren vom Abschlusse der Rente gerechnet (x) noch lebt, (y) aber vorher gestorben ist, kommt gleich ${}_np_x(1 - {}_np_y)$; nur unter dieser Voraussetzung wird in jenem Zeitpunkte die Rente 1 ausbezahlt, und der Wert dieser Anwartschaft ist

$$v^n {}_np_x(1 - {}_np_y) = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right);$$

die Summe hiervon für alle Werte von n von 1 aufwärts ist $\mathfrak{a}_{y|x}$; folglich hat man

$$\mathfrak{a}_{y|x} = \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots}{l_x} - \frac{v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots}{l_x l_y};$$

der erste Bruch rechts stellt aber $\mathfrak{a}_x - 1$, der zweite $\mathfrak{a}_{xy} - 1$ dar, daher ist tatsächlich

$$\mathfrak{a}_{y|x} = \mathfrak{a}_x - 1 - (\mathfrak{a}_{xy} - 1) = \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{xy}.$$

Zwischen dieser Rente und der gegenseitigen besteht ein einfacher Zusammenhang: es ist evident, daß die gegenseitige Rente der Verbindung $(x)(y)$ die Summe der einseitigen Überlebensrenten auf (x) und (y) ist, daß also

$$\mathfrak{a}_{\overline{xy}}^{[1]} = \mathfrak{a}_{y|x} + \mathfrak{a}_{x|y};$$

nun ist

$$\mathfrak{a}_{y|x} = \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{xy}$$

$$\mathfrak{a}_{x|y} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{yx},$$

1) D. h. vom Anfange des dem Sterbejahre folgenden Versicherungsjahres.

daher

$$a_{\overset{[1]}{xy}} = a_x + a_y - 2a_{xy}$$

in Übereinstimmung mit (71).

Rechnet man bei der Verbindung, wie sie dem letzten Beispiele zugrunde lag, die Überlebensrente für die 30-jährige Person, so ergibt sich

$$a_{45|30} = 19{,}441 - 14{,}023 = 5{,}418;$$

hingegen wäre die Überlebensrente der 45-jährigen Person

$$a_{30|45} \doteq 15{,}706 - 14{,}023 = 1{,}683,$$

naturgemäß erheblich kleiner nicht nur wegen der geringen Wahrscheinlichkeit, daß der 45-jährige den 30-jährigen eher überlebt als umgekehrt, sondern auch wegen der mutmaßlich geringeren Dauer der Rente.

283. Aufgeschobene, temporäre und unterjährig fällige Verbindungs- und Überlebensrenten. Aus der Definition der Verbindungsrente (Nr. 279) folgt, daß die um n Jahre *aufgeschobene* Verbindungsrente auf die Leben (x), (y) sich darstellt durch

$$_{n|}a_{xy} = \frac{N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}. \tag{73}$$

Vergleicht man dies mit der unmittelbaren Rente des Paares $(x+n)$, $(y+n)$, d. i. mit

$$a_{x+n,y+n} = \frac{N_{x+n,y+n}}{D_{x+n,y+n}},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf die durch (65) definierte Bedeutung von D_{xy}:

$$_{n|}a_{xy} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}\, a_{x+n,y+n} = {}_nE_{xy}\, a_{x+n,y+n} = v^n\, {}_np_{xy}\, a_{x+n,y+n}, \tag{73*}$$

eine Relation, welche analog ist der Beziehung (8*), Nr. 261, für einfache Renten. Darin bedeutet $_nE_{xy}$ die Erlebensversicherung des Paares (x) (y), die dann fällig wird, wenn das Paar nach n Jahren noch lebt.

Die postnumerando zahlbare Verbindungsrente, gleichbedeutend mit der um 1 Jahr aufgeschobenen, hat den Wert

$$a_{xy} = \frac{N_{x+1,y+1}}{D_{xy}} = \frac{N_{x,y} - D_{x,y}}{D_{xy}} = a_{xy} - 1. \tag{74}$$

Für die auf Jahre *abgekürzte* sofort beginnende Verbindungsrente ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} {}_{|n}a_{xy} &= \frac{D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \cdots + D_{x+n-1,y+n-1}}{D_{xy}} \\ &= \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}} = a_{xy} - {}_{n|}a_{xy}, \end{aligned} \tag{75}$$

und für die um n Jahre aufgeschobene und auf m Jahre abgekürzte Verbindungsrente

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}\mathfrak{a}_{xy} &= \frac{D_{x+n,y+n} + D_{x+n+1,y+n+1} + \cdots + D_{x+n+m-1,y+n+m-1}}{D_{xy}} \\
&= \frac{N_{x+n,y+n} - N_{x+n+m,y+n+m}}{D_{xy}} = {}_{n|}\mathfrak{a}_{xy} - {}_{n+m|}\mathfrak{a}_{xy}.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Wird die Verbindungsrente in m-tel Raten ausbezahlt, so daß ihr Jahresbetrag $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ ist, so kommt ihr Wert in erster, für praktische Zwecke ausreichender Näherung (s. Nr. 272) gleich

$$\mathfrak{a}_{xy}^{(m)} = \mathfrak{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m}. \tag{77}$$

Für die aufgeschobene, beziehungsweise die abgekürzte einseitige Überlebensrente gelten die unmittelbar evidenten Ansätze:

$${}_{n|}\mathfrak{a}_{y|x} = {}_{n|}\mathfrak{a}_{y} - {}_{n|}\mathfrak{a}_{xy}, \tag{78}$$

$${}_{|n}\mathfrak{a}_{y|x} = {}_{|n}\mathfrak{a}_{y} - {}_{|n}\mathfrak{a}_{xy}; \tag{79}$$

die erste Rente wird nicht früher als nach n Jahren flüssig, vorausgesetzt, daß (y) vorher gestorben und (x) dann noch am Leben ist; stirbt (y) später als nach n Jahren, so tritt (x) am Anfange des nächsten Versicherungsjahres in den Bezug der Rente; die zweite dauert längstens n Jahre vom Abschlusse an gerechnet, kommt also eventuell gar nicht zur Auszahlung, wenn (y) innerhalb dieser Zeit nicht oder nach (x) sterben sollte.

Bei unterjähriger, auf m gleiche Raten festgesetzter Auszahlung hat man für die sofort beginnende einseitige Überlebensrente zugunsten des (y) die Formel:

$$\mathfrak{a}_{x|y}^{(m)} = \mathfrak{a}_{y}^{(m)} - \mathfrak{a}_{xy}^{(m)};$$

wendet man rechts bei beiden Teilen die erste Näherung an, so heben sich die Korrektionsglieder $\frac{m-1}{2m}$ auf, und es entsteht:

$$\mathfrak{a}_{x|y}^{(m)} = \mathfrak{a}_{y} - \mathfrak{a}_{xy} \tag{80}$$

wie bei der jährlich fälligen Rente.

284. Einige Beispiele von Verbindungsrenten.

1) An die Verbindung (x) (y) ist bis zum ersten Tode die Rente 1, von da ab an die überlebende Person die Rente $\frac{1}{2}$ auszuzahlen.

Der Wert dieser Anwartschaft ist die Summe zweier einfacher Renten vom Betrage $\frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y)$$

oder auch die Summe einer Verbindungsrente bis zum ersten und einer solchen bis zum zweiten Tode, jede im Betrage $\frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{2}\left(a_{xy} + a_{\overline{xy}}^{[1]}\right);$$

in der Tat geht dieser Ausdruck in den früheren über, wenn man für den zweiten Teil den Wert aus (71) einsetzt.

2) Die Rente ist nach dem Tode von (x) so lange zu zahlen, als von den zwei Personen (y), (z) noch eine am Leben ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren die Rente zur Auszahlung kommt, ist

$$(1 - {}_np_x)[1 - (1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z)]$$
$$= {}_np_y + {}_np_z - {}_np_{yz} - {}_np_{xy} - {}_np_{xz} + {}_np_{xyz};$$

denn (x) darf nicht mehr und von den beiden andern Personen muß wenigstens *eine* leben. Multipliziert man dies mit v^n und bildet die Summe für alle n von 1 aufwärts, so ergibt sich als Wert der obigen Rente[1]):

$$a_y + a_z - a_{yz} - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}.$$

3) Die Rente 1 währt so lange, als (x) und von (y), (z) mindestens einer lebt.

Aus der Wahrscheinlichkeit, daß die Rente nach n Jahren zur Auszahlung gelangt:

$${}_np_x[1 - (1 - {}_np_y)(1 - {}_np_z)] = {}_np_{xy} + {}_np_{xz} - {}_np_{xyz},$$

ergibt sich durch dieselbe Schlußfolgerung der Rentenwert

$$a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz},$$

dessen Richtigkeit sich auch durch andere Überlegungen leicht erweisen läßt.

4) Die Rente 1 werde ausbezahlt vom Aussterben zweier Personen (x), (y) (z. B. der Eltern) angefangen bis zum Tode einer dritten Person (z) (eines Kindes).

Die Zahlung des Rentenbetrages nach n Jahren ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$(1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y)\,{}_np_z = {}_np_z - {}_np_{xz} - {}_np_{yz} + {}_np_{xyz}$$

zu erwarten; daraus folgt der Wert der Rente:

$$a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}.$$

5) Die Rente ist nach dem Aussterben des Paares (α), (β) (Eltern) so lange zu zahlen, als von den drei Personen (x), (y), (z) (Kinder) mindestens eine am Leben ist (Versicherung eines Waisenstockes).

1) Es entstehen zunächst durchwegs postnumerando zahlbare Renten, die aber ohne Störung des Wertes durch Pränumerandorenten ersetzt werden dürfen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren (α) und (β) gestorben sind, ist

$$(1 - {}_np_\alpha)(1 - {}_np_\beta) = 1 - {}_np_\alpha - {}_np_\beta + {}_np_{\alpha\beta};$$

die Wahrscheinlichkeit, daß dann von (x), (y), (z) mindestens eines am Leben ist, drückt sich nach Formel (α), Nr. 281, aus durch

$$S_1 - S_2 + S_3 = {}_np_x + {}_np_y + {}_np_z - {}_np_{xy} - {}_np_{xz} - {}_np_{yz} + {}_np_{xyz};$$

durch Multiplikation beider ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, unter welcher der Rentenbetrag nach n Jahren zur Auszahlung kommt, und aus dieser der Rentenwert selbst:

$$\begin{aligned} & a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz} \\ & - a_{\alpha x} - a_{\alpha y} - a_{\alpha z} + a_{\alpha xy} + a_{\alpha xz} + a_{\alpha yz} - a_{\alpha xyz} \\ & - a_{\beta x} - a_{\beta y} - a_{\beta z} + a_{\beta xy} + a_{\beta xz} + a_{\beta yz} - a_{\beta xyz} \\ & + a_{\alpha\beta x} + a_{\alpha\beta y} + a_{\alpha\beta z} - a_{\alpha\beta xy} - a_{\alpha\beta xz} - a_{\alpha\beta yz} + a_{\alpha\beta xyz}; \end{aligned}$$

es wären also 28 verschiedene Renten zu seiner Berechnung nötig.

§ 7. Kapitalversicherungen für verbundene Leben.

285. Todesfallversicherung auf das kürzeste von mehreren Leben. Die Verbindung (x), (y), (z), $\cdots$ von m Personen sei auf das Kapital 1 in der Weise versichert, daß dasselbe am Ende jenes Versicherungsjahres fällig wird, in welchem die erste Person der Verbindung stirbt. Man bezeichnet diese Versicherung als *Todesfallversicherung auf das kürzeste Leben* und ihren Wert mit $A_{xyz\cdots(m)}$.

Um diesen zu ermitteln, ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}$ erforderlich, daß im Laufe des n-ten Jahres der *erste* Todesfall eintreten werde; die diesem Falle entsprechende Anwartschaft hat den Wert

$$v^n \, {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}$$

und die Summe all der Werte von $n = 1$ angefangen gibt $A_{xyz\cdots(m)}$, so daß

$$A_{xyz\cdots(m)} = \sum_1 v^n \, {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)}. \tag{81}$$

Die hier auftretende Sterbenswahrscheinlichkeit kann durch Lebenswahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden; denn die Verbindung (x), (y), (z), $\cdots$ (m) besteht am Ende des $\overline{n-1}$-ten Jahres noch aufrecht, entweder wenn sie auch noch am Ende des n-ten Jahres vollzählig oder im Laufe des n-ten Jahres durch den ersten Tod gelöst worden ist; daher gilt der Ansatz:

$${}_{n-1|}p_{xyz\cdots(m)} = {}_np_{xyz\cdots(m)} + {}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)};$$

daraus folgt aber

$${}_{n-1|}q_{xyz\cdots(m)} = {}_{n-1}p_{xyz\cdots(m)} - {}_np_{xyz\cdots(m)}; \tag{82}$$

die Lebenswahrscheinlichkeiten können nun auf Grund der Bemerkungen in Nr. 279 mittels Sterbetafeln berechnet werden.

286. Gegenseitige Überlebensversicherung. Bei zwei Leben (x), (y) heißt die Versicherung auf das kürzere Leben auch *gegenseitige Überlebensversicherung.* Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$A_{xy} = \sum_1 v^n {}_{n-1|}q_{xy}. \tag{81*}$$

Nun ist nach (82)

$${}_{n-1|}q_{xy} = {}_{n-1}p_{xy} - {}_n p_{xy} = \frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n-1} - l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y},$$

demnach

$$A_{xy} = \frac{v\,(l_x l_y - l_{x+1}\, l_{y+1}) + v^2 (l_{x+1}\, l_{y+1} - l_{x+2}\, l_{y+2}) + \cdots}{l_x\, l_y};$$

berechnet man im Sinne Griffith Davies' die Zahlen

$$C_{xy} = v^{x+1}(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) \tag{83}$$

oder im Sinne De Morgans die Zahlen

$$C_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}+1}(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) \tag{83*}$$

und deren Summen

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + C_{x+2,y+2} + \cdots, \tag{84}$$

so drückt sich mit Hilfe derselben A_{xy} in einer der einfachen Todesfallversicherung analogen Form aus:

$$A_{xy} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}}. \tag{85}$$

Indessen ist es, wenn man die Zahlen N_{xy} oder die Verbindungsrenten gerechnet hat, nicht mehr nötig, die Zahlen C_{xy} und M_{xy} zu rechnen. Der Zähler von A_{xy} läßt sich nämlich umformen in

$$v\,[l_x l_y + v l_{x+1} l_{y+1} + \cdots] - [v l_{x+1} l_{y+1} + v^2 l_{x+2} l_{y+2} + \cdots],$$

und durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^x, respektive $v^{\frac{x+y}{2}}$, verwandelt er sich weiter in

$$v[D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \cdots] - [D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \cdots]$$
$$= vN_{xy} - N_{x+1,y+1} = (v-1)N_{xy} + D_{xy},$$

so daß, da der Nenner durch die letztgedachte Operation in D_{xy} übergeht,

$$A_{xy} = 1 - (1-v)\mathrm{a}_{xy} = 1 - d\mathrm{a}_{xy}. \tag{86}$$

Diese Formel ist jener für die einfache Todesfallversicherung: $A_x = 1 - d\mathrm{a}_x$, analog.

287. Aufgeschobene und kurze gegenseitige Überlebensversicherung. Bei der *aufgeschobenen* gegenseitigen Überlebensversicherung, ${}_{n|}A_{xy}$, kommt das Kapital 1 nur dann zur Auszahlung,

wenn der erste Todesfall später als nach n Jahren erfolgt; um ihren Wert zu erhalten, hat man in (81*) mit der Summenbildung erst bei $n+1$ zu beginnen; bei gleichartiger Führung der Rechnung ergibt sich:

$$ {}_{n|}A_{xy} = \frac{v[D_{x+n,y+n} + D_{x+n+1,y+n+1} + \cdots] - [D_{x+n+1,y+n+1} + D_{x+n+2,y+n+2} + \cdots]}{D_{xy}} $$

$$ = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} \cdot \frac{(v-1)N_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{x+n,y+n}}, $$

d. i.

$$ {}_{n|}A_{xy} = {}_nE_{xy}(1 - d\mathrm{a}_{x+n,y+n}). \tag{87} $$

Die auf n Jahre *abgekürzte* gegenseitige Überlebensversicherung, ${}_{|n}A_{xy}$, läßt das Kapital nur dann fällig werden, wenn der erste Todesfall innerhalb n Jahren sich zuträgt. Sie ergibt sich als Differenz aus der lebenslänglichen und der auf n Jahre aufgeschobenen Überlebensversicherung, so daß

$$ {}_{|n}A_{xy} = A_{xy} - {}_{n|}A_{xy}. \tag{88} $$

288. Gemischte gegenseitige Überlebensversicherung. Das Kapital 1 komme zur Auszahlung entweder nach dem ersten Tode[1]), wenn dieser innerhalb n Jahren eintritt, oder nach n Jahren, wenn beide Personen (x), (y) leben.

Der Wert dieser Versicherung, welche der in Nr. 270 behandelten gemischten Versicherung entspricht, werde mit $A_{xy\overline{n}|}$ bezeichnet. Er setzt sich zusammen aus dem Werte einer auf n Jahre abgekürzten gegenseitigen Überlebensversicherung ${}_{|n}A_{xy}$ und dem Werte der Erlebensversicherung ${}_nE_{xy}$; somit ist

$$ A_{xy\overline{n}|} = {}_{|n}A_{xy} + {}_nE_{xy}. $$

Unter Benutzung der Formeln (88), (87), (86) und (73*) gibt die weitere Ausführung dieser Formel:

$$ A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\mathrm{a}_{xy} - {}_nE_{xy}(1 - d\mathrm{a}_{x+n,y+n}) + {}_nE_{xy} $$
$$ = 1 - d(\mathrm{a}_{xy} - {}_nE_{xy}\mathrm{a}_{x+n,y+n}) = 1 - d(\mathrm{a}_{xy} - {}_{n|}\mathrm{a}_{xy}) = 1 - d\,{}_{|n}\mathrm{a}_{xy}. \tag{89} $$

Auch diese Formel entspricht völlig der in Nr. 270 für die gemischte Versicherung auf ein Leben gefundenen Formel (42).

289. Todesfallversicherung auf das längste zweier Leben. Auf die zwei Leben (x), (y) ist das Kapital 1 in der Weise versichert, daß es am Ende jenes Versicherungsjahres zur Auszahlung kommt, in welchem der *zweite* Todesfall eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich dies im Laufe des n-ten Jahres ereignet, ist ausgedrückt durch

$$ {}_{n-1|}q_x(1 - {}_{n-1}p_y) + {}_{n-1|}q_y(1 - {}_{n-1}p_x) + {}_{n-1|}q_x\,{}_{n-1|}q_y; $$

1) Am Schlusse des Todesjahres.

die drei Glieder entsprechen den Möglichkeiten, daß (x), daß (y) in diesem Jahre stirbt, nachdem der andere schon in den vorangegangenen
die drei Glieder entsprechen den Möglichkeiten, daß (x), daß (y) in
Jahren gestorben ist, und daß beide in dem genannten Jahre sterben. Ordnet man den Ausdruck wie folgt:

$$_{n-1|}q_x + {}_{n-1|}q_y - \left[{}_{n-1|}q_x \, {}_{n-1}p_y + {}_{n-1|}q_y \, {}_{n-1}p_x - {}_{n-1|}q_x \, {}_{n-1|}q_y\right],$$

führt in dem Klammerpolynom die Substitutionen

$$_{n-1|}q_x = {}_{n-1}p_x - {}_n p_x$$
$$_{n-1|}q_y = {}_{n-1}p_y - {}_n p_y$$

aus, so verwandelt sich dieses in

$$_{n-1}p_{xy} - {}_n p_{xy},$$

d. i. nach Gleichung (82) in $_{n-1|}q_{xy}$. Mithin nimmt die obige Wahrscheinlichkeit den einfacheren Ausdruck

$$_{n-1|}q_x + {}_{n-1|}q_y - {}_{n-1|}q_{xy}$$

an. Durch Multiplikation mit v^n und Summierung des Produktes über alle Werte von $n = 1$ aufwärts ergibt sich der gesuchte Versicherungswert, dessen Zeichen $A_{\overline{xy}}$ ist, nämlich:

$$A_{\overline{xy}} = \sum v^n \, {}_{n-1|}q_x + \sum v^n \, {}_{n-1|}q_y - \sum v^n \, {}_{n-1|}q_{xy},$$

d. i.

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}. \tag{90}$$

In Renten lautet er (s. Nr. 281):

$$A_{\overline{xy}} = 1 - d\mathrm{a}_x + 1 - d\mathrm{a}_y - (1 - d\mathrm{a}_{xy})$$
$$= 1 - d(\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - \mathrm{a}_{xy}) = 1 - d\mathrm{a}_{\overline{xy}}. \tag{91}$$

Die Formel (90) ergibt sich auch aus folgender Erwägung. Wären (x) und (y) unabhängig von einander je auf das Kapital 1 versichert, so wäre $A_x + A_y$ der Gesamtwert dieser Versicherungen. Zieht man davon den Wert A_{xy} der Versicherung auf das kürzeste Leben ab, so verbleibt der Wert der Versicherung auf das längste Leben.

290. Einseitige Überlebensversicherung. Das Kapital 1 sei zahlbar am Ende des Sterbejahres von (x), wenn dieser *vor* (y) stirbt. Das Zeichen für diese auf das Leben (x) zugunsten von (y) abgeschlossene Todesfallversicherung ist $A_{\overset{1}{x}y}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß (x) im Laufe des n-ten Jahres vor (y) sterben werde, heiße $_{n-1|}q_{\overset{1}{x}y}$.

Der Fall kann dadurch eintreten, daß (x) im n-ten Jahre stirbt und (y) dieses Jahr überlebt, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$({}_{n-1}p_x - {}_n p_x)\,{}_n p_y \tag{α}$$

zu erwarten ist; aber auch in der Weise, daß beide Personen im n-ten Jahre sterben, aber (x) als erster, wofür, wenn man gleichförmige

Verteilung der Sterbefälle über ein Altersjahr annimmt, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_n p_y\right) \qquad (\beta)$$

beträgt. Folglich ist

$$\begin{aligned} {}_{n-1}q^1_{xy} &= \left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right){}_n p_y + \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right)\left({}_{n-1}p_y - {}_n p_y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right)\left({}_{n-1}p_y + {}_n p_y\right) \qquad (\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left({}_{n-1}p_{xy} - {}_n p_{xy} + {}_{n-1}p_x\, {}_n p_y - {}_{n-1}p_y\, {}_n p_x\right); \end{aligned}$$

der letzte Ausdruck kann noch wie folgt umgestaltet werden. Es ist

$${}_{n-1}p_{xy} - {}_n p_{xy} = {}_{n-1|}q_{xy};$$

ferner ergibt sich aus ${}_{n-1}p_x\, p_{x-1} = {}_n p_{x-1}$, daß

$${}_{n-1}p_x = \frac{{}_n p_{x-1}}{p_{x-1}}$$

und ebenso

$${}_{n-1}p_y = \frac{{}_n p_{y-1}}{p_{y-1}};$$

daher hat man auch

$${}_{n-1|}q^1_{xy} = \frac{1}{2}\left({}_{n-1|}q_{xy} + \frac{{}_n p_{x-1,y}}{p_{x-1}} - \frac{{}_n p_{x,y-1}}{p_{y-1}}\right). \qquad (\delta)$$

Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun A^1_{xy} nach dem Schema:

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\sum_1 v^n\, {}_{n-1|}q^1_{xy}. \qquad (92)$$

Für die numerische Ermittelung derartiger Versicherungswerte können nun verschiedene technische Formeln abgeleitet werden.

Wir beginnen mit jener *Näherungs*formel[1]), die sich ergibt, wenn man von den beiden Teilen (α), (β), aus welchen sich ${}_{n-1|}q^1_{xy}$ zusammensetzt, den zweiten wegen seiner Kleinheit gegenüber dem ersten wegläßt, mit andern Worten: von der Möglichkeit, daß beide Personen in *einem* Jahre sterben, absieht und demgemäß setzt:

$$\begin{aligned} {}_{n-1|}q^1_{xy} &= \left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x\right){}_n p_y \\ &= \frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n} - l_{x+n}\, l_{y+n}}{{}_x l_y}; \end{aligned}$$

dann wird gemäß der Formel (92) und den Entwickelungen in Nr. 279:

1) Vgl. A. Zillmer, Die mathem. Rechnungen etc., 2. Aufl., Berlin 1887, p. 99ff.

$$A^1_{xy} = \frac{D_{y+1}\,l_x + D_{y+2}\,l_{x+1} + \cdots}{D_y\,l_x} - \frac{D_{y+1}\,l_{x+1} + D_{y+2}\,l_{x+2} + \cdots}{D_y\,l_x}$$

$$= \frac{D_{y+1}}{D_y}\,\frac{D_{y+1}\,l_x + D_{y+2}\,l_{x+1} + \cdots}{D_{y+1}\,l_x} - \frac{D_y\,l_x + D_{y+1}\,l_{x+1} + \cdots}{D_y\,l_x} + 1$$

$$= 1 + \frac{D_{y+1}}{D_y}\,\mathfrak{a}_{x,y+1} - \mathfrak{a}_{xy}. \qquad (93)$$

Mit Benutzung des vollständigen Wertes (δ) für ${}_{n-1|}q^1_{xy}$ ergibt sich die korrekte Formel:

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\left[A_{xy} + \frac{\mathfrak{a}_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}} - \frac{\mathfrak{a}_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - d\,\mathfrak{a}_{xy} + \frac{\mathfrak{a}_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}} - \frac{\mathfrak{a}_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}}\right]; \qquad (94)$$

denn es ist

$$\sum_1 v^n\,{}_{n-1|}q_{xy} = A_{xy} \text{ nach Formel } (81^*),$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_1 v^n\,{}_n p_{x-1,y} &= \mathfrak{a}_{x-1,y} - 1\\ \sum_1 v^n\,{}_n p_{x,y-1} &= \mathfrak{a}_{x,y-1} - 1\end{aligned}\right\} \text{ nach Formel } (67).$$

Bildet man neben A^1_{xy} nach derselben Formel (94) auch A^1_{yx}, so zeigt sich, daß

$$A^1_{xy} + A^1_{yx} = A_{xy}, \qquad (94^*)$$

wie dies auch sein muß; denn wird die Versicherungssumme ausbezahlt, ob (x) oder (y) als erster stirbt, so handelt es sich um eine gegenseitige Überlebensversicherung.

Zur Beurteilung der beiden Formeln (93), (94) diene das folgende, mit den Grundlagen der Tafel VIII durchgeführte Beispiel. Es handle sich um $A^1_{35,25}$.

Nach der in Nr. 280 entwickelten Methode, welche auf die genannte Tafel Anwendung findet, weil diese nach der Makehamschen Formel ausgeglichen ist, ergeben sich die erforderlichen Verbindungsrenten:

$$\mathfrak{a}_{35,26} = \mathfrak{a}_{31,2,31,2} = 16{,}143$$

$$\mathfrak{a}_{35,25} = \mathfrak{a}_{30,64,30,64} = 16{,}264$$

$$\mathfrak{a}_{34,25} = \mathfrak{a}_{35,24} = \mathfrak{a}_{30,30} = 16{,}399,$$

ihre Eintragung in die Formel (93) führt zu

$$A^1_{35,25} = 1 + \frac{37771}{39371}\,16{,}143 - 16{,}264 = 0{,}223;$$

hingegen liefert die Formel (94):

$$A^1_{35,25} = \frac{1}{2}\,[1 - 0{,}0338 \cdot 16{,}264 + 15{,}399\,(1{,}0085 - 1{,}0070)] = 0{,}236.$$

In einer andern Form, ebenfalls durch Renten ausgedrückt, erhält man A^{1}_{xy}, wenn man an die Darstellung (γ) von ${}_{n-1|}q^{1}_{xy}$ anknüpft; ersetzt man darin die Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen aus der Sterbetafel, so wird

$${}_{n-1|}q^{1}_{xy} = \frac{1}{2}\,\frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x}\cdot\frac{l_{y+n-1} + l_{y+n}}{l_y}; \tag{ε}$$

bei Annahme gleichförmiger Verteilung der Sterbefälle innerhalb einer einjährigen Altersklasse ist

$$\frac{1}{2}\left(l_{y+n-1} + l_{y+n}\right) = l_{y+n-\frac{1}{2}};$$

dann schreibt sich:

$${}_{n-1|}q^{1}_{xy} = \frac{l_{x+n-1}\,l_{y+n-\frac{1}{2}} - l_{x+n}\,l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\,l_y}$$

und

$$A^{1}_{xy} = \frac{l_{x-1}\,l_{y-\frac{1}{2}}}{l_x\,l_y}\sum_{1} v^n\,\frac{l_{x+n-1}\,l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_{x-1}\,l_{y-\frac{1}{2}}} - \frac{l_{y-\frac{1}{2}}}{l_y}\sum_{1} v^n\,\frac{l_{x+n}\,l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\,l_{y-\frac{1}{2}}};$$

die hierin vorkommenden Summen bedeuten aber Postnumerando-Verbindungsrenten, die erste zur Verbindung $(x-1)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, die zweite zur Verbindung $(x)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, so daß

$$A^{1}_{xy} = \frac{l_{x-1}\,l_{y-\frac{1}{2}}}{l_x\,l_y}\left(a_{x-1,\,y-\frac{1}{2}} - 1\right) - \frac{l_{y-\frac{1}{2}}}{l_y}\left(a_{x,\,y-\frac{1}{2}} - 1\right). \tag{95}$$

Man kann auch besondere Zahlenkolonnen zur Berechnung der einseitigen Überlebensversicherungen anlegen. Aus (ε) folgt

$${}_{n-1|}q^{1}_{xy} = \frac{d_{x+n-1}\,l_{y+n-\frac{1}{2}}}{l_x\,l_y},$$

daher ist

$$v^n\,{}_{n-1|}q^{1}_{xy} = \frac{v^{x+n}\,d_{x+n-1}\,l_{y+n-\frac{1}{2}}}{v^x\,l_x\,l_y};$$

führt man nun

$$C^{1}_{xy} = v^x\,d_{x-1}\,l_{y-\frac{1}{2}} \tag{96}$$

und die Summen

$$M^{1}_{xy} = C^{1}_{xy} + C^{1}_{\overline{x+1},\,\overline{y+1}} + C^{1}_{\overline{x+2},\,\overline{y+2}} + \cdots \tag{97}$$

als neue Zahlen ein, während $v^x l_x l_y$ die bei Verbindungsrenten vorkommende Zahl D_{xy} bedeutet, so ergibt sich für A^{1}_{xy} ein Ausdruck, der demjenigen für die einfache Todesfallversicherung ähnlich sieht, nämlich

$$A^{1}_{xy} = \frac{M^{1}_{xy}}{D_{xy}}. \tag{98}$$

Wird das Kapital 1 ausgezahlt, wenn (x) als zweiter stirbt, so heiße der Wert der Versicherung $A_{\overset{2}{x}y}$. Er ergibt sich durch die Bemerkung, daß die Summe aus $A_{\overset{1}{x}y}$ und $A_{\overset{2}{x}y}$ notwendig A_x ist: denn (x) ist auf den Todesfall überhaupt versichert, wenn er in der Verbindung $(x)(y)$ sowohl auf den ersten wie auf den zweiten Tod versichert ist. Man hat also zur Berechnung von $A_{\overset{2}{x}y}$ den Ansatz:

$$A_{\overset{1}{x}y} + A_{\overset{2}{x}y} = A_x. \tag{99}$$

Es ist wohl zu beachten, daß $A_{\overset{2}{x}y}$ verschieden ist von $A_{x\overset{1}{y}}$. Denn $A_{\overset{2}{x}y}$ ist eine Versicherung, zahlbar nach dem zweiten Tode, $A_{x\overset{1}{y}}$ aber eine nach dem ersten Tode fällig werdende Versicherung.

Als Beispiel mögen die drei Versicherungswerte $A_{\overset{1}{50},40}$, $A_{50,\overset{1}{40}}$ und $A_{\overset{2}{50},40}$ berechnet werden; zur Grundlage diene die Tafel VIII.

Zur Lösung dieser Aufgabe sind bei Anwendung der Formel (94) die Verbindungsrenten $a_{50,40}$, $a_{49,40}$, $a_{50,39}$ notwendig. Nach dem in Nr. 280 erläuterten Verfahren findet man:

$$a_{50,40} = a_{46{,}10\;46{,}10} = 12{,}278,$$
$$a_{49,40} = a_{45{,}39\;45{,}39} = 12{,}488,$$
$$a_{50,39} = a_{45{,}82\;45{,}82} = 12{,}361;$$

ferner ergibt sich

$$A_{50,40} = 1 - 0{,}0338 \cdot 12{,}278 = 0{,}58501,$$

und der Tafel entnimmt man

$$A_{50} = 0{,}52079.$$

Aus diesen Daten folgt:

$$A_{\overset{1}{50},40} = \frac{1}{2}\,[0{,}58501 + 11{,}488 \cdot 1{,}0151 - 11{,}361 \cdot 1{,}0098] = 0{,}38707$$

$$A_{50,\overset{1}{40}} = 0{,}58501 - 0{,}38707 = 0{,}19\,794$$

$$A_{\overset{2}{50},40} = 0{,}52079 - 0{,}38707 = 0{,}13372.$$

Eine Versicherung auf das Kapital von 1000 hat demnach den Wert:

520,79, wenn sie zahlbar ist bei dem Tode von (50);
585,01, wenn sie zahlbar ist bei Aufhören der Verbindung (50) (40);
387,07, wenn sie zahlbar ist, falls (50) als erster stirbt;
197,94, wenn sie zahlbar ist, falls (40) als erster stirbt;
133,72, wenn sie zahlbar ist, falls (50) als zweiter stirbt.

291. Aufgeschobene und temporäre Überlebensversicherungen. Eine um n Jahre aufgeschobene Überlebensversicherung auf den Tod von (x) zugunsten von (y) hat den Wert

$$ {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y} = v^n\,{}_np_{xy}\,A_{\overset{1}{x+n},\,y+n}; \tag{100}$$

denn sie kommt zur Auszahlung nur dann, wenn die Verbindung (x) (y) nach n Jahren noch besteht, hat dann den Wert $A_{\overset{1}{x+n},\,\overline{y+n}}$, der durch Multiplikation mit v^n auf den gegenwärtigen Zeitpunkt zu diskontieren ist. Für $v^n\,{}_np_{xy}$ kann, wenn die Kolonne D_{xy} vorhanden ist, $\frac{D_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}}$ gesetzt werden.

Aus den Formeln (94*) und (99) folgt weiter:

$$ {}_{n|}A_{x\overset{1}{y}} = {}_{n|}A_{xy} - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y}, \qquad (101)$$

$$ {}_{n|}A_{\overset{2}{x}y} = {}_{n|}A_{x} - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y}. \qquad (102)$$

Für temporäre Versicherungen dieser Art ergeben sich unmittelbar die Ansätze:

$$ {}_{|n}A_{\overset{1}{x}y} = A_{\overset{1}{x}y} - {}_{n|}A_{\overset{1}{x}y} \qquad (103)$$

$$ \begin{aligned} {}_{|n}A_{x\overset{1}{y}} &= A_{x\overset{1}{y}} - {}_{n|}A_{x\overset{1}{y}} \\ &= {}_{|n}A_{xy} - {}_{|n}A_{\overset{1}{x}y} \end{aligned} \qquad (104)$$

$$ \begin{aligned} {}_{|n}A_{\overset{2}{x}y} &= A_{\overset{2}{x}y} - {}_{n|}A_{\overset{2}{x}y} \\ &= {}_{|n}A_{x} - {}_{|n}A_{\overset{1}{x}y}. \end{aligned} \qquad (105)$$

Wie man erkennt, ist $A_{\overset{1}{x}y}$ neben A_x und A_{xy} diejenige Größe, durch welche sich die andern Versicherungswerte ausdrücken lassen, für die also besondere Tafeln anzulegen sind. Man wird solche nur für $x < y$ zu rechnen haben, weil die Fälle, wo die Versicherung auf den früheren Tod der jüngeren Person abgeschlossen wird, die häufigeren sind.

§ 8. Versicherungswerte, die von Invalidität abhängen.

292. Vorbemerkungen. Die verschiedenen Versicherungseinrichtungen, die sich mit der Fürsorge für bestimmte Personenkreise befassen, gewähren in ihrer wirksameren Form Renten, außerdem in gewissen Fällen einmalige Leistungen.

Der Beginn der Renten ist von dem Eintritt näher bestimmter Ereignisse abhängig: so der Anfall der Invalidenrente vom Eintritt, richtiger vom Ausspruch der Invalidität, der Anfall der Witwenrente vom Tode des (aktiven oder invaliden) Mannes, der Anfall der Waisenrente vom Tode des Vaters, eventuell vom Tode der verwitweten Mutter. Durch Festsetzung einer Karenz kann ein Teil dieser Fälle unwirksam gemacht sein. Die Dauer der Rente ist an den Fortbestand eines Zustandes geknüpft: die Invalidenrente entweder an die Fortdauer des Lebens (bei dauernder Invalidität) oder an den Fortbestand der Erwerbsunfähigkeit (bei vorübergehender Invalidität); die Witwenrente an das Fortleben der Witwe, eventuell an den Fortbestand der

Witwenschaft, die Waisenrente an das Leben des verwaisten Kindes längstens bis zur Erreichung eines festgesetzten Alters.

Die Höhe der Renten kann mit einem konstanten Betrag zugesichert sein oder sie erfährt eine von der Dauer der Zugehörigkeit zur Versicherung abhängige Steigerung.

Über die Bedingungen des Antritts der Renten, ihres Aufhörens, ihrer Bemessung, ihrer Auszahlungsweise enthält das Statut, das Pensionsnormale der betreffenden Versicherungseinrichtung, wenn sie privater Natur ist, beziehungsweise das Gesetz, das sie als eine öffentlich-rechtliche begründet, die erforderlichen Bestimmungen.

Der Versicherungstechnik erwächst einer solchen Institution gegenüber die Aufgabe, die Beschaffung der zur Sicherung der Leistungen erforderlichen Mittel zu regeln. Diese Aufgabe löst sich in eine Reihe von Einzelaufgaben aus, die um so mannigfaltiger sich gestalten, je komplizierter die Bestimmungen des Statuts oder des Gesetzes sind. Es kommen dabei Bewertungen der bereits angefallenen und noch fortdauernden Renten wie auch Bewertungen von Anwartschaften auf künftige Renten und einmalige Leistungen in Betracht. Bei Begründung der Einrichtung, bei Schaffung des Statuts oder des Gesetzes, hat man es nur mit Anwartschaften zu tun. Handelt es sich während des Bestandes der Einrichtung um die Prüfung ihrer finanziellen Lage, so treten Barwerte beiderlei Art zugleich auf.

Zur Durchführung der Rechnungen sind neben der Wahl des Zinsfußes statistische Erfahrungen über die in Betracht kommenden Ereignisse und menschlichen Massenzustände erforderlich. Die Auswahl dieser Erfahrungen unter dem zur Verfügung stehenden und sachgemäß bearbeiteten Tatsachenmaterial erfordert Umsicht und kritische Erwägung aller in Betracht kommenden Umstände, soll man sich eine Anpassung der Rechnung an die Wirklichkeit innerhalb nicht zu weiter Grenzen versprechen dürfen.

Man kann die Frage aufwerfen, wie weit es sich empfehle, mit der Rechnung den Bestimmungen des Statuts oder des Gesetzes nachzugehen. Die Antwort wird abhängen von der finanziellen Tragweite der einzelnen Norm, von dem Umfang der Rechenarbeit, die ihre Einbeziehung erfordert, hauptsächlich aber, ob die hierzu erforderlichen statistischen Daten vorhanden sind. Es wird zu überlegen sein, ob die rechnerische Behandlung einer Detailbestimmung gegenüber der unvermeidlichen Unsicherheit der Rechnungsgrundlagen noch zu rechtfertigen ist. Im allgemeinen muß es als zweckmäßig bezeichnet werden, in der Detailierung der Rechnung ein gewisses Maß zu halten, auf Kompensationen bedacht zu sein, wenn man sich zu Vereinfachungen der Annahmen, die bei jeder technischen Rechnung getroffen werden müssen, veranlaßt sah, dafür aber alle Sorgfalt zu verlegen auf die ständige Vergleichung des wirklichen Geschäftsverlaufs mit dem nach

den Grundlagen zu erwartenden unter eingehender Analyse der verschiedenen Arten der Belastung, um auf diese Weise einer Verbesserung des Rechnungsplanes vorzuarbeiten.

Im nachfolgenden wird eine Auswahl von Barwerten behandelt, um daran die Methoden der Rechnung zu erläutern.

293. Aktivitäts-, Invaliden-, Witwen- und Waisenrenten. Als Grundlagen für die Bestimmung der Barwerte dieser Renten haben außer dem Zinsfuß zu dienen:

bei der Aktivitätsrente eine Ausscheideordnung der Aktiven, (l_x^a);
bei der Invalidenrente eine Sterbetafel der Invaliden, (l_x^i);
bei der Witwenrente eine Sterbetafel der Frauen, (l_y);
bei der Kinderrente eine Sterbetafel der Kinder, (l_z).

Durch die Wahl der Buchstaben x, y, z zur Bezeichnung des Alters bei Männern (aktiven und invaliden), Frauen und Kindern ist für die Lesbarkeit der Formeln gesorgt und in vielen Fällen die Verwendung komplizierter Zeichen erspart.

Die Berechnung all dieser Renten geht technisch ebenso vor sich wie bei Zugrundelegung irgend einer Sterbetafel, also mit Benutzung der diskontierten Zahlen und ihrer Summen, welche die Bezeichnungen erhalten:

$$D_x^a,\ N_x^a;\quad D_x^i,\ N_x^i;\quad D_y,\ N_y;\quad D_z,\ N_z;$$

sind auch Doppelsummen notwendig, so bekommen sie das Zeichen S mit den entsprechenden Suffixen.

Der Barwert der vorschüssigen *Aktivitätsrente*, die flüssig bleibt durch die ganze Dauer der Aktivität von (x), ist sonach

$$^a\mathrm{a}_x = \frac{N_x^a}{D_x^a}. \tag{1}$$

Der Barwert der vorschüssigen *Invalidenrente*, zahlbar bis zum Ableben des Invaliden (x), stellt sich auf

$$^i\mathrm{a}_x = \frac{N_x^i}{D_x^i}. \tag{2}$$

Der Barwert der vorschüssigen Rente, die an eine Witwe (y) bis zu deren Ableben zu leisten ist, beträgt

$$\mathrm{a}_y = \frac{N_y}{D_y}. \tag{3}$$

Die Waisenrente hat den Charakter einer temporären Rente, weil sie zahlbar ist bloß bis zur Erreichung eines festgesetzten Alters t; für eine Waise vom Alter z ist also ihr Wert

$$_{|t-z}\mathrm{a}_z = \frac{N_z - N_t}{D_z}; \tag{4}$$

führt man indessen, wie dies in der Regel geschieht, die Sterbetafel l_z

nur bis zu dem Gliede l_t, die Kolonnen D und N nur bis D_{t-1}, N_{t-1}, wobei $N_{t-1} = D_{t-1}$, so schreibt sich für diese abgekürzte Tafel die Waisenrente wie eine lebenslängliche Rente

$$\mathrm{a}_z = \frac{N_z}{D_z}. \tag{4*}$$

Alle diese Formeln gelten für ganzjährige Fälligkeit. Ist unterjährige, insbesonders, wie dies zumeist der Fall ist, monatliche Flüssigmachung bedungen, dann treten alle jene Umformungen auf, wie sie bei der Leibrente vorgeführt worden sind; man setzt nämlich beispielsweise

$$\begin{aligned} {}^a\mathrm{a}_x^{(12)} &= {}^a\mathrm{a}_x - \mathfrak{B} \\ {}^i\mathrm{a}_x^{(12)} &= {}^i\mathrm{a}_x - \mathfrak{B} \\ \mathrm{a}_y^{(12)} &= \mathrm{a}_y - \mathfrak{B} \\ \mathrm{a}_z^{(12)} &= \mathrm{a}_z - \left(1 - \frac{D_t}{D_z}\right)\mathfrak{B} \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{B} = 0{,}46330,\ 0{,}46408,\ 0{,}46489$
bei $i = 0{,}03,\ 0{,}035,\ 0{,}04.$

Werte der vorstehend angeführten Renten, gerechnet auf den Grundlagen, welche für die technische Durchführung der Pensionsversicherung der Privatbeamten in Österreich[1]) gewählt worden sind, finden sich in den Tafeln IX und X, und zwar

${}^a\mathrm{a}_x^{(12)}$ in Taf. IX; Grundlagen: die Erfahrungen am Nichtzugpersonal aus 1868—1884 in der Bearbeitung von Zimmermann (Nr. 250); $3\frac{1}{2}$%.

${}^i\mathrm{a}_x$ in Taf. X; Grundlagen: die Erfahrungen an sämtlichen pensionierten Eisenbahnbediensteten aus 1868—1884 in der gleichen Bearbeitung; $3\frac{1}{2}$%.

$\mathrm{a}_y^{(12)}$ in Taf. X; Grundlagen: Deutsche Sterbetafel für Frauen (Nr. 225); $3\frac{1}{2}$%.

${}_{|18-z}\mathrm{a}_z^{(12)}$ in Taf. X; Grundlagen: Summen der Lebenden aus der Deutschen Sterbetafel für Männer und Frauen (Nr. 225); $3\frac{1}{2}$%.

Die vorangeführten Rentenwerte lassen schärfere Fassung zu, der aber praktisch zumeist deshalb nicht Rechnung getragen werden kann, weil es an den nötigen statistischen Erfahrungen mangelt.

Die Aktivitätsordnung ist eine *Ausscheide*tafel, die beiden Ursachen des Ausscheideus sind Tod und Invalidität.

Auch bei den Invaliden handelt es sich in manchen Fällen nicht um eine eigentliche Absterbe-, sondern um eine Ausscheideordnung, indem der Bezug der Rente unter Umständen außer durch Tod auch

1) Gesetz vom 16. Dezember 1906, Reichsgesetzblatt vom 1. Januar 1907. — Lithographiertes Tabellenwerk von A. Riedel, Triest 1909, nebst ergänzenden Bemerkungen (1910). Riedel hat ferner eine lithographierte „Tabellarische Auswertung der Rechnungsgrundlagen für Beamtenpensionsfonds" (1910) veröffentlicht, die sich auf die S. 217 und 213 erwähnten, von ihm stammenden Daten stützt und mit 4% gerechnet ist.

durch Reaktivierung und eventuell auch noch aus anderen Ursachen aufhören kann.

Die Berechhung einer flüssigen Witwenrente sollte auf eine Ausscheideordnung der Witwen gegründet werden, bei der außer dem Ableben auch der Wiederverehelichung Rechnung getragen ist; eine allgemeine Frauensterbetafel aber umfaßt ledige, verehelichte und verwitwete Frauen, Kategorien, denen sicher nicht gleiche Sterblichkeit zukommt.

Der Bewertung einer flüssigen Waisenrente sollte eine Sterbetafel verwaister Kinder unterlegt werden; denn es ist a priori anzunehmen, daß die Sterblichkeit unter solchen eine andere ist als bei Kindern, die sich der mütterlichen Obsorge zu erfreuen haben; in aller Strenge müßten auch Renten von Doppelwaisen nach anderer Grundlage behandelt werden als Renten von einfachen Waisen.

Auf die Invalidenrente soll wegen ihrer außerordentlichen Wichtigkeit noch des näheren eingegangen werden.

294. Invalidenrenten auf Grund einer zweifach abgestuften Ausscheideordnung. Wenn bei der Invalidenversorgung nur dauernde Invalidität in Betracht gezogen wird, wie dies bei den privaten Einrichtungen dieser Art und auch bei jenen öffentlichen geschieht, die es mit Berufsinvalidität zu tun haben, z. B. bei der neuerdings begründeten Privatbeamtenversicherung, so wird die Bewertung flüssiger Invalidenrenten nach einer Invalidensterbetafel zu geschehen haben; es stehen nach dieser Richtung zunächst fast ausschließlich Aggregattafeln zur Verfügung, welche die Sterblichkeit nur nach dem Moment des erreichten Alters und nicht auch nach der abgelaufenen Rentenbezugsdauer abstufen.

Anders liegen die Verhältnisse bei der in großem Maßstabe betriebenen öffentlich-rechtlichen Invalidenversicherung. Hier erfordert die richtige Beurteilung des finanziellen Effektes eine möglichst sorgfältige Bewertung der Invalidenrenten. Aber erst der reichsgesetzlichen Invalidenversicherung war es nach längerem Bestande möglich, die zur näheren Erforschung des Ausscheidens aus dem Rentenbezuge nötige Beobachtungsbasis zu gewinnen und einen beachtenswerten Ansatz zur Erstellung einer *zweifach abgestuften Ausscheideordnung* der Invalidenrentenempfänger zu machen.

Die Ergebnisse der letzten derartigen Untersuchung stammen aus dem Jahre 1906[1]) und betreffen die in dem Zeitraume 1891—1899 *bewilligten* Renten; ihre Zahl betrug

1891—1897	196 487
1898/99	169 840
zusammen	366 327;

1) Amtliche Nachrichten des Reichs-Versicherungsamts 1906, 1. Beiheft.

davon betrafen 247 745 männliche und 118 582 weibliche Personen. Bis zur Wiederkehr des Rentenbeginntages im Jahre 1903 waren davon ausgeschieden:

durch Tod	125 835	d. i. 95,1 %
durch Reaktivierung	5 474	„ „ 4,1 „
aus anderen Ursachen	1 052	„ „ 0,8 „
überhaupt	132 361.	

Die Gliederung der Ausscheidungen erfolgte im ersten Bezugsjahre nach Monaten, in den fünf folgenden Jahren nach Quartalen und von da ab nach Jahren; die längste zur Beobachtung gelangte Bezugsdauer betrug 12 Jahre.

Die erste der beiden folgenden Tabellen gibt einen Einblick in die bedeutende Einflußnahme der Rentenbezugsdauer auf die Ausscheidewahrscheinlichkeit. Unter $\sigma_{[x]+k}$ ist analog wie bei der Sterblichkeit unter Versicherten die Wahrscheinlichkeit des Ausscheidens von Rentenempfängern zu verstehen, die im Alter x in den Bezug der Rente eingetreten und bis zum Ausscheiden k Jahre darin verblieben sind. Man sieht aus der Zusammenstellung, daß der Einfluß in den jüngeren Altern ein viel stärkerer ist als in den mittleren und höheren und daß erst vom 50. Jahre an eine allmähliche Umkehr in der Bewegung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten beginnt, weil dann der Einfluß des Alters den der Bezugsdauer zu überwiegen anfängt; vom Alter 80 an ist das Verhalten völlig umgekehrt gegenüber dem der jungen Jahre. Während von den 40-jährigen Rentenempfängern, die im ersten Bezugsjahre stehen, 369,5 ‰ ausscheiden, beträgt das

Männliche Invalidenrentner.

Alter bei Beginn $[x]$	$\sigma_{[x]}$	$\sigma_{[x]+1}$	$\sigma_{[x]+2}$	$\sigma_{[x]+4}$	$\sigma_{[x]+6}$	$\sigma_{[x]+8}$	$\sigma_{[x]+10}$	$\sigma_{[x]+11}$	Alter bei Ausscheiden
25	0,5870	0,3130	0,1910	0,0975	0,0627	0,0474	0,0394	0,0388	36
30	,4790	,2780	,1710	,0914	,0612	,0484	,0413	,0403	41
35	,4240	,2455	,1515	,0860	,0609	,0499	,0437	,0434	46
40	,3695	,2150	,1345	,0817	,0609	,0514	,0468	,0475	51
45	,3170	,1850	,1195	,0789	,0618	,0529	,0517	,0532	56
50	,2660	,1555	,1050	,0764	,0631	,0570	,0610	,0630	61
55	,2165	,1290	,0945	,0739	,0650	,0680	,0745	,0785	66
60	,1720	,1110	,0901	,0760	,0785	,0870	,0960	,1010	71
65	,1430	,1040	,0921	,0915	,1010	,1115	,1240	,1310	76
70	,1310	,1080	,1065	,1175	,1310	,1465	,1640	,1740	81
75	,1385	,1310	,1385	,1550	,1740	,1970	,2240	,2390	86
80	,1640	,1740	,1850	,2100	,2390	,2720	,3090	,3290	91
85	,2240	,2390	,2250	,2900	,3290	,3720	,4190	,4440	96
90	,3090	,3290	,3500	,3950	,4440	,4970	,5540	.	101
95	,4190	,4440	,4700	,5250	.	.	.	.	.
100	,5540	.	.	.	.	.	.	.	.

Ausscheidepromille bei 40-jährigen, die bereits 10 Jahre im Rentenempfange standen, nur 41,3‰; bei 70-jährigen ist die Ausscheideintensität bei den gleichen Modalitäten durch 131,0 und 96,0‰, bei 80-jährigen beidemale durch 164,0‰ ausgedrückt.

Die zweite Tabelle soll das erheblich ungleiche Verhalten der beiden Geschlechter vor Augen führen.

Was die Entstehung der zweifach abgestuften Tafeln anlangt, so sind sie aus den für Altersquinquennien gefundenen Zahlen durch graphische Interpolation abgeleitet worden.

Durchnitts-Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Alter bei Beginn $[x]$		$\sigma_{[x]}$	$\sigma_{[x]+3}$	$\sigma_{[x]+6}$	$\sigma_{[x]+9}$
20—24	m.	0,5620	0,1432	0,0643	0,0259
	w.	,4680	,0946	,0491	,0472
25—29	m.	,5110	,1155	,0577	,0446
	w.	,3210	,0677	,0437	,0278
30—34	m.	,4460	,1064	,0633	,0516
	w.	,2345	,0536	,0368	,0193
35—39	m.	,4015	,1077	,0712	,0534
	w.	,1918	,0488	,0346	,0518
40—44	m.	,3568	,0978	,0660	,0547
	w.	,1708	,0449	,0371	,0464
45—49	m.	,3032	,0924	,0651	,0602
	w.	,1072	,0396	,0377	,0449
50—54	m.	,2490	,0852	,0705	,0735
	w.	,1068	,0427	,0442	,0495
55—59	m.	,1882	,0811	,0784	,0813
	w.	,0897	,0459	,0545	,0611
60—64	m.	,1595	,0822	,0973	,1110
	w.	,0758	,0484	,0645	,0931
65—69	m.	,1483	,1021	,1222	,1564
	w.	,0858	,0715	,1014	,1358
70—74	m.	,1147	,1158	,1548	,1452
	w.	,0625	,0819	,1249	,2037
75—79	m.	,1255	,1583	,1997	,3232
	w.	,0732	,1228	,2021	,2222

Auf Grund dieser Ausscheidewahrscheinlichkeiten ließe sich eine Abfallsordnung der Invaliden konstruieren und mit dieser — wir bezeichnen ihre Zahlen mit $l^i_{[x]+k}$ $(k = 0, 1, \ldots 10)$ und die Zahlen der *Schluß*tafel mit l^i_{x+11} — könnte ebenso operiert werden, wie mit einer zweifach abgestuften Sterbetafel bei Berechnung der Leibrenten (Nr. 264).

Indessen können auch, wenn einmal die Renten für die Schlußtafel berechnet sind, die Renten für die zehnjährige Vorperiode nach einer Rekursionsformel berechnet werden, indem nämlich (Nr. 259 (4*))

$$ {}^i a_{[x]+k} = 1 + v\,(1 - \sigma_{[x]+k})\, {}^i a_{[x]+k+1}; \qquad (5)$$

nimmt man der Reihe nach $k = 10, 9, \cdots 0$, so ergeben sich sukzessive

aus ${}^{i}\mathrm{a}_{x+11}$ die Werte von ${}^{i}\mathrm{a}_{[x]+10}$, ${}^{i}\mathrm{a}_{[x]+9}$, ... ${}^{i}\mathrm{a}_{[x]}$, deren letzter den Barwert der Rente bei ihrem Antritt bedeutet.

In dieser Weise ist von den deutschen Erfahrungen bei der technischen Begründung des österreichischen Sozialgesetzentwurfes Gebrauch gemacht worden[1]).

295. Anwartschaft eines Aktiven auf eine konstante Invalidenrente. An Grundlagen sind zur Bewertung dieser Anwartschaft erforderlich die Aktivitätsordnung, die zugehörigen Invaliditätswahrscheinlichkeiten und die Sterbetafel, beziehungsweise die Ausscheideordnung der Invaliden. Die Gestaltung der Formeln hängt von den Bestimmungen über den Antritt und Bezug der Rente und davon ab, wie weit man diesen Bestimmungen Rechnung tragen will.

I. Die eine Rechnungsweise nimmt an, *alle* in einem Altersjahre invalid gewordenen treten mit dem Beginn des darauffolgenden Altersjahres in den Bezug der Rente. Ist also x das gegenwärtige Alter des Aktiven, so stellt sich der Barwert der Belastung aus dem $\overline{n+1}$-ten Jahre als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{l^a_{x+n}}{l^a_x}$, den Anfang jenes Jahres als Aktiver zu erleben, der Wahrscheinlichkeit w_{x+n}, im Laufe dieses Jahres invalid zu werden, dem Barwert ${}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}$ der am Schlusse des Jahres fällig werdenden Rente und dem der Zwischenzeit entsprechenden Diskontierungsfaktor v^{n+1} dar, beträgt also

$$v^{n+1}\frac{l^a_{x+n}}{l^a_x}w_{x+n}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}=v\frac{D^a_{x+n}}{D^a_x}w_{x+n}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}; \tag{6}$$

setzt man[2])

$$\begin{aligned} v D^a_{x+n}\, w_{x+n}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1} &= \mathrm{D}^{ai}_{x+n} \\ \mathrm{D}^{ai}_{x+n}+\mathrm{D}^{ai}_{x+n+1}+\cdots &= \mathrm{N}^{ai}_{x+n}, \end{aligned} \tag{7}$$

so ergibt sich der Barwert einer unmittelbar beginnenden Anwartschaft als Summe der Werte $\frac{\mathrm{D}^{ai}_{x+n}}{D^a_x}$ für $n=0, 1, 2, \ldots$; gebraucht man für ihn das Zeichen ${}^{ai}\mathrm{a}_x$, so ist demnach

---

1) Denkschrift über die Berechnung des Beitragserfordernisses in der Invaliden- und Altersversicherung etc. Wien 1909.

2) *Anmerkung betreffend die Bezeichnungsweise.* In diesem Paragraphen sind zur Bezeichnung verschiedener Zahlenausdrücke Zeichen verwendet, die den Zeichen für die Grundzahlen D, N, S; C, M, R nachgebildet sind. Um sie von diesen, die sich auf Absterbe- und Ausscheideordnungen beziehen, zu unterscheiden, sind für sie andere Typen: D, N, S; C, M, R gewählt worden, deren Suffixe jedem einzelnen Fall angepaßt sind. Desgleichen ist das a, das hier wiederholt zur Bezeichnung der Barwerte von Anwartschaften gebraucht ist, von dem Zeichen a für die gewöhnliche Rente, durch Schrifttype und Suffixe genügend unterschieden.

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{\mathrm{N}_x^{ai}}{D_x^a}. \tag{8} $$

Ist eine k-jährige Karenz vorgesehen, so hat die Summierung mit $n = k$ zu beginnen; man erhält dann

$$ {}_{k|}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{\mathrm{N}_{x+k}^{ai}}{D_x^a}. \tag{9} $$

Erfolgt die Zahlung monatlich, so ist in (7) ${}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}$ durch ${}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}^{(12)}$ zu ersetzen.

Der Vorgang sieht einmal von den Sterbefällen, die im Altersjahre der Invalidisierung selbst erfolgen, ab und verlegt zum andern alle Invalidisierungen an das Ende des Jahres.

II. Ändert man die Auffassung nur dahin ab, daß alle Invalidisierungen auf die Mitte des Jahres zusammengezogen werden, und läßt man die Renten von da an beginnen, wo ihr Barwert mit ${}^{i}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2}}$ zu bezeichnen wäre, so tritt an die Stelle der ersten Formel in (7)

$$ v^{\frac{1}{2}} D_{x+n}^a w_{x+n} {}^{i}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2}} = \mathrm{D}_{x+n}^{ai}, \tag{7*} $$

während alles andere wie früher verläuft; für ${}^{i}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2}}$ kann unter Anwendung linearer Interpolation zwischen die Renten zu ganzjährigen Altern

$$ \frac{{}^{i}\mathrm{a}_{x+n} + {}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1}}{2} $$

genommen werden.

III. Modifiziert man die Auffassung unter I dahin, daß man auch die Todesfälle im Invalidisierungsjahre in Rechnung zieht, so kommt an die Stelle der ersten Formel in (7) zu schreiben:

$$ v D_{x+n}^a w_{x+n} \left(1 - \frac{q_{x+n}^{ii}}{2}\right) {}^{i}\mathrm{a}_{x+n+1} = \mathrm{D}_{x+n}^{ai}; \tag{7**} $$

alles übrige bleibt wie vorhin.

Nach dieser Formel sind die Werte der Anwartschaft auf Invalidenrente in Taf. X gerechnet und zwar auf den in Nr. 293 namhaft gemachten Grundlagen der Pensionsversicherung der Privatbeamten in Österreich.

IV. Als Beispiel einer in das Detail der Bestimmungen eingehenden Rechnung führen wir die folgende Entwicklung an. Die Rente beginnt am ersten des der Invalidisierung folgenden Monats, wird von da ab monatlich bis zum Tode gezahlt; die letzte Auszahlung erfolgt am Ende des Sterbemonats (gleichbedeutend mit dem Anfang des darauffolgenden Monats).

Bei der Anlage der Rechnung wird die Annahme gemacht, daß

Invalidisierungen und Sterbefälle während eines Altersjahres sich gleichmäßig über dieses verteilen, daß also die Invaliditäts-, beziehungsweise Sterbenswahrscheinlichkeit für einen aliquoten Teil des Jahres gleichkommt dem entsprechenden aliquoten Teil der jährlichen Wahrscheinlichkeit.

Die Belastung, welche aus den Invalidisierungen auf der Altersstufe $(x+n,\ x+n+1)$ erwächst, setzt sich zusammen aus den Zahlungen, die schon während dieses Altersjahres entstehen, und aus den fortlaufenden Rentenzahlungen an alle jene, die das Ende dieses Altersjahrs als Invalide erleben; der Wert dieser letzteren Zahlungen, auf den Beginn der Rechnung diskontiert, ist

$$v^{n+1} l^{a}_{x+n} w_{x+n}\left(1-\frac{q^{ii}_{x+n}}{2}\right) {}^{i}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+1} = v^{n+1} l^{ai}_{x+n}\, {}^{i}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n}. \tag{A}$$

Zum Barwert der erstgenannten Teilzahlungen gelangt man auf folgende Art. Von den Invaliden, die in den ersten $\nu-1$ Monaten des Altersjahres entstehen, leben am Anfang des ν-ten Monats noch

$$\frac{\nu-1}{12} l^{a}_{x+n} w_{x+n}\left(1-\frac{\nu-1}{24} q^{ii}_{x+n}\right);$$

im ν-ten Monat kommen $\frac{1}{12} l^{a}_{x+n} w_{x+n}$ hinzu, und an alle diese ist nach den obigen Bestimmungen zu Anfang des $\nu+1$-ten Monats Zahlung zu leisten, so daß in diesem Zeitpunkte im ganzen

$$\frac{l^{a}_{x+n} w_{x+n}}{12}\left(\nu-\frac{(\nu-1)^2}{24} q^{ii}_{x+n}\right)$$

Rentenraten im Betrage von je $\frac{1}{12}$ zu zahlen sind; ihr auf den Beginn der Rechnung diskontierter Wert ist

$$v^{n+\frac{\nu}{12}} \frac{l^{a}_{x+n} w_{x+n}}{144}\left(\nu-\frac{(\nu-1)^2}{24} q^{ii}_{x+n}\right);$$

nimmt man hiervon die Summe über $\nu=1, 2, \ldots 12$, so ergibt sich der Barwert der Teilzahlungen

$$v^{n} \frac{l^{a}_{x+n} w_{x+n}}{144}\left\{\sum_{1}^{12} \nu v^{\frac{\nu}{12}} - \frac{q^{ii}_{x+n}}{24} \sum_{1}^{12} (\nu-1)^2 v^{\frac{\nu}{12}}\right\}$$

$$= v^{n} l^{a}_{x+n} w_{x+n}\left(\alpha-\frac{q^{ii}_{x+n}}{2}\beta\right), \tag{B}$$

wenn

$$\frac{1}{144}\sum_{1}^{12} \nu v^{\frac{\nu}{12}} = \alpha,\quad \frac{1}{1728}\sum_{1}^{12} (\nu-1)^2 v^{\frac{\nu}{12}} = \beta \tag{10}$$

gesetzt wird.

Von der Summe aus (A) und (B), welche die Belastung aus den Invalidisierungen auf der Altersstufe $(x+n,\ x+n+1)$ darstellt, entfällt auf einen der ursprünglichen l_x^a Aktiven des Alters x der Betrag

$$\frac{v^{n+1} l_{x+n+1}^{ai}\, {}^{i}a_{x+n+1}^{(12)}}{l_x^a} + \frac{v^n l_{x+n}^a w_{x+n}\left(\alpha - \frac{q_{x+n}^{ii}}{2}\beta\right)}{l_x^a}$$

$$= \frac{D_{x+n+1}^{ai}\, {}^{i}a_{x+n+1}^{(12)}}{D_x^a} + \frac{D_{x+n}^a w_{x+n}\left(\alpha - \frac{q_{x+n}^{ii}}{2}\beta\right)}{D_x^a}.$$

Setzt man also

$$\left.\begin{aligned} D_{x+n+1}^{ai}\, {}^{i}a_{x+n+1}^{(12)} + D_{x+n}^a w_{x+n}\left(\alpha - \frac{q_{x+n}^{ii}}{2}\beta\right) &= \mathrm{D}_{x+n}^{ai} \\ \mathrm{D}_{x+n}^{ai} + \mathrm{D}_{x+n+1}^{ai} + \cdots &= \mathrm{N}_{x+n}^{ai}, \end{aligned}\right\} \qquad (7^{***})$$

so stellt sich die Anwartschaft auf Invalidenrente wieder in der Form

$${}^{ai}a_x^{(12)} = \frac{\mathrm{N}_x^{ai}}{D_x^a} \qquad (11)$$

dar.

Zur Berechnung der D_x^{ai} braucht man jetzt zweierlei diskontierte Zahlen: $D_x^a = v^x l_x^a$, $D_x^{ai} = v^x l_x^{ai}$, ferner die Invaliditäts-, die Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten, die 12-tel-Invalidenrenten und die Konstanten α, β, die bei 4% die Werte haben:

$$\alpha = 0{,}527\,137,\quad \beta = 0{,}283\,778.$$

Es sei bemerkt, daß man statt $D_x^a w_x = v^x l_x^a w_x$ auch $v^x J_x = D_x^J$, d. h. die diskontierten Zahlen der Invaliden, die aus den Aktiven der einzelnen Alter auf Grund der Aktivitätsordnung hervorgehen.

296. Anwartschaft auf steigende Invalidenrente. Die Steigerung der Invalidenrente kann aus zwei Ursachen entspringen: aus der Skala, die angibt, in welchem Verhältnis die Pension nach Maßgabe der zurückgelegten Dienstzeit zu dem jeweilen anrechenbaren Gehalt oder Dienstbezug überhaupt zu stehen hat, und aus Gehaltserhöhungen. Von der letzteren sehen wir hier ab.

Als erstes Beispiel sei eine Invalidenpension folgender Konstruktion vorgeführt: 10 Jahre Karenz, dann 40% des Höchstbetrags der Pension, hierauf jährliche Steigerung um 2% durch 30 Jahre, nach 40 Jahren fällt die Höchstrente (= 1) *unbedingt* als *Altersrente* zu.

Der Wert dieses Pensionsanspruchs setzt sich zusammen aus der Anwartschaft auf eine frühestens nach 10 Jahren mit 0,4 beginnende,

sodann bis zum 40. Jahre jährlich mit 0,02 steigende und von da ab konstant bleibende *Invalidenrente* — der Wert dieser Anwartschaft ist

$$\frac{0{,}4\,\mathrm{N}^{ai}_{x+10} + 0{,}02\,(\mathrm{S}^{ai}_{x+11} - \mathrm{S}^{ai}_{x+41})}{D^a_x};$$

und aus einer um 40 Jahre aufgeschobenen Aktivitätsrente, durch welche der unbedingte Anfall als *Altersrente* ergänzt wird, indem die Rente von da ab auch an die aktiv verbleibenden mit dem Höchstbetrage zu zahlen ist; der Barwert dieses Teiles ist $\frac{N^a_{x+40}}{D^a_x}$, somit der Barwert des ganzen Pensionsanspruchs

$$\frac{0{,}4\,\mathrm{N}^{ai}_{x+10} + 0{,}02\,(\mathrm{S}^{ai}_{x+11} - \mathrm{S}^{ai}_{x+41}) + N^a_{x+40}}{D^a_x}. \tag{13}$$

Die N^{ai} können auf Grund der Formel (7*) gerechnet werden, wobei, wenn monatliche Zahlung festgesetzt ist, ${}^i a$ durch ${}^i a^{(12)}$ zu ersetzen kommt, während im dritten Gliede die monatliche Zahlung in die Bildung der N^a einbezogen werden kann.

Handelt es sich um die Feststellung des Beitragserfordernisses für eine zu gründende Pensionseinrichtung, so kommt nur der eben berechnete Wert der Anwartschaft bei Eintritt in die Versicherung in Betracht. Soll hingegen die finanzielle Lage einer bereits bestehenden Einrichtung geprüft werden, dann treten auch Anwartschaften nach verschiedenen Dienstdauern in die Rechnung ein.

Als zweites Beispiel, bei dem auch solche Anwartschaften bestimmt werden sollen, diene eine Invalidenpension mit folgender Skala: Nach 5-jähriger Karenz 15% des Gehalts; dann durch drei Jahre Steigerung um 1%; weiter durch 26 Jahre Steigerung um 2%, so daß nach 34 Dienstjahren 70% des Gehaltes erreicht sind, bei denen es für die fernere eventuelle Dienstdauer verbleibt. Es soll die Anwartschaft am Beginn und nach jeder bereits zurückgelegten Dienstdauer angegeben werden. Die Rente wird monatlich im vorhinein ausbezahlt.

Im Sinne der Auffassung II, Nr. 295, ist der Barwert der Renteneinheit, stammend aus den Invalidisierungen des $\overline{n+1}$-ten Jahres, durch

$$\frac{\mathrm{D}^{ai}_{x+n}}{D^a_x} \text{ gegeben, wo } \mathrm{D}^{ai}_{x+n} = v^{\frac{1}{2}}\,D^a_{x+n}\,w_{x+n}\,\frac{{}^i\mathrm{a}^{(12)}_{x+n} + {}^i\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+1}}{2}.$$

Mithin ist der Wert der Pensionsanwartschaft für einen Aktiven des Alters x, der *am Beginn* seiner Dienstzeit steht, in Prozenten des Gehalts:

$$\frac{1}{D_x^a}\{15D_{x+5}^{ai}+16D_{x+6}^{ai}+17D_{x+7}^{ai}+18D_{x+8}^{ai}+20D_{x+9}^{ai}+22D_{x+10}^{ai}+\cdots+70(D_{x+34}^{ai}+D_{x+35}^{ai}+\cdots)\}$$
$$=\frac{1}{D_x^a}\{15N_{x+5}^{ai}+N_{x+6}^{ai}+N_{x+7}^{ai}+\cdots+N_{x+9}^{ai}+N_{x+10}^{ai}+\cdots-2(N_{x+35}^{ai}+N_{x+36}^{ai}+\cdots)\}$$
$$=\frac{1}{D_x^a}\{15N_{x+5}^{ai}+S_{x+6}^{ai}+S_{x+9}^{ai}-2S_{x+35}^{ai}\}.$$

Bei Zurücklegung jedes der nächsten vier Jahr schieben sich die Alterszeiger um je eine Einheit vor, so daß die Anwartschaft nach 5 Dienstjahren, also unmittelbar nach der Karenz, den Barwert hat:

$$\frac{1}{D_x^a}\{15N_x^{ai}+S_{x+1}^{ai}+S_{x+4}^{ai}-2S_{x+30}^{ai}\}.$$

In den folgenden drei Jahren bleiben der erste und der zweite Alterszeiger konstant, während die beiden andern, entsprechend der Annäherung an den Beginn der 2-prozentigen Steigerung, um je eine Einheit vorrücken; gleichzeitig steigt mit jedem dieser Jahre der Koeffizient des ersten Gliedes um je eine Einheit, so daß die Anwartschaft nach 6, 7 und 8 Dienstjahren der Reihe nach die folgende ist:

$$\frac{1}{D_x^a}\{16N_a^{ai}+S_{x+1}^{ai}+S_{x+3}^{ai}-2S_{x+29}^{ai}\}$$
$$\frac{1}{D_x^a}\{17N_x^{ai}+S_{x+1}^{ai}+S_{x+2}^{ai}-2S_{x+28}^{ai}\}$$
$$\frac{1}{D_x^a}\{18N_x^{ai}+2S_{x+1}^{ai}-2S_{x+27}^{ai}\}.$$

Von da ab findet jährliche Steigerung um 2% statt bis zum vollendeten 34. Dienstjahr; bezeichnet man also allgemein mit n $(8<n<34)$ die Anzahl der zurückgelegten Dienstjahre, so stellt sich der unmittelbare Anspruch auf $2(n+1)$ und steigt mit jedem Jahre um 2, so daß der Barwert der Anwartschaft beträgt:

$$\frac{1}{D_x^a}\{2(n+1)D_x^{ai}+2(n+2)D_{x+1}^{ai}+2(n+3)D_{x+2}^{ai}+\cdots+70(D_{x+34-n}^{ai}+D_{x+35-n}^{ai}+\cdots)\}$$
$$=\frac{1}{D_x^a}\{2(n+1)N_x^{ai}+2S_{x+1}^{ai}-2S_{x+35-n}^{ai}\}.$$

Nach Ablauf von 34 Dienstjahren bleibt der Anspruch konstant gleich

$$70\frac{N_x^{ai}}{D_x^{ai}}.$$

297. Anwartschaft eines verheirateten Invaliden auf Witwenpension. Ein Invalider vom Alter x sei mit einer Frau vom Alter y verheiratet, die in den Bezug einer Leibrente 1 eintreten soll, wenn (x) vor ihr stirbt. Die Anwartschaft hierauf stellt sich als eine einseitige Überlebensrente dar, bei der (y) die begünstigte Person ist (Nr. 282). Nach den an der eben zitierten Stelle angegebenen Bedingungen für den Beginn der Rente wäre also der Barwert

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy},$$

a_y auf Grund einer Frauensterbetafel, a_{xy} auf Grund dieser und einer Invalidensterbetafel zu rechnen.

In der Praxis wird der Anfall der Rente zumeist auf den Beginn des dem Tode des Mannes folgenden Monats festgesetzt und erfolgt die Auszahlung monatlich. Diesen Bestimmungen kann in folgender Weise Rechnung getragen werden.

Man nimmt an, daß die Todesfälle eines Altersjahres zusammen in dessen Mitte erfolgen und daß die dann entstehenden Witwen in den Bezug der Rente gelangen; daraus entspringt pro Witwe für das $n+1$-te Jahr eine Belastung der Gegenwart im Betrage

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^i_{x+n}}{l^i_x} \frac{l_{y+n+1}}{l_y} a^{(12)}_{y+n+\frac{1}{2}} = \frac{C^i_{x+n}\, l_{y+n+1}}{v^{\frac{1}{2}}\, D^i_x\, l_y} \frac{a^{(12)}_{y+n} + a^{(12)}_{y+n+1}}{2},$$

wenn man die Rente $a^{(12)}_{y+n+\frac{1}{2}}$ zwischen die Renten zu den Altern $y+n$ und $y+n+1$ linear interpoliert. Setzt man also

$$\left.\begin{aligned} \frac{C^i_{x+n}\, l_{y+n+1}}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{a^{(12)}_{y+n} + a^{(12)}_{y+n+1}}{2} &= D^i_{x+n,y+n} \\ D^i_{x+n,y+n} + D_{x+n+1,y+n+1} + \cdots &= N^i_{x+n,y+n}, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

so drückt sich die Anwartschaft auf Witwenrente wie folgt aus:

$$^i a^{(12)}_{x|y} = \frac{N^i_{xy}}{D^i_x\, l_y}. \qquad (15)$$

Diese Formel wäre für alle auftretenden Alterskombinationen x, y auszuwerten. Man wird die Ausrechnung direkt für eine Auswahl von Altern x und von Altersdifferenzen $x-y$ vornehmen und die übrigen Werte durch Interpolation herstellen, wobei lineare Einschaltung zumeist ausreichen dürfte mit Rücksicht auf die langsame Änderung der Werte der Formel.

298. Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenpension. Nach einem verheirateten Aktiven kann die Witwenpension dadurch fällig werden, daß er in der Aktivität stirbt oder daß er früher in-

valid wird und als solcher stirbt, beidemal unter der Voraussetzung, daß die Frau ihn überlebt. Soll die Anwartschaft für einen dermalen ledigen Aktiven gerechnet werden, so wird die Kenntnis der Heiratswahrscheinlichkeit auf den verschiedenen Altersstufen überhaupt und der Wahrscheinlichkeit, daß die Verheiratung mit einer Frau bestimmten Alters erfolge, als Rechenelement notwendig.

Gegenüber dieser Komplikation der Aufgabe stellen wir uns auf den praktischen Standpunkt, wie er sich in einer Pensionseinrichtung, die auch die Witwenversorgung einbezieht, in der Regel ergibt. Es werden dann Erhebungen über den Altersaufbau der Aktiven (der zu versichernden überhaupt) und über ihre Zivilstandsverhältnisse herangezogen, insbesondere in der Richtung, daß die Anzahlen der Verheirateten und die Altersgliederung der mit ihnen verbundenen Frauen der aufgestellten Statistik entnommen werden.[1]) Diese Daten ermöglichen es, gewisse *Durchschnittswerte* zu berechnen, mit deren Hilfe dann an eine Abschätzung der Anwartschaften mit verhältnismäßig einfacherem Rechnungsaufwand geschritten werden kann.

Die Erhebungsresultate mögen in folgender Form vorliegen:

Gezählt wurden L_x^a Aktive des Alters x; davon sind L_{x,y_1}^a, L_{x,y_2}^a, $\cdots L_{x,y_\nu}^a$ mit Frauen der Alter $y_1, y_2, \cdots y_\nu$ beziehungsweise, also $\sum_{y_1}^{y_\nu} L_{x,y}^a$ überhaupt verheiratet, so daß

$$\frac{\sum_{y_1}^{y_\nu} L_{xy}^a}{L_x^a}$$

die aus diesen Daten abgeleitete Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins eines x-jährigen Aktiven überhaupt und

$$\frac{L_{xy}^a}{L_x^a} \qquad (y = y_1, y_2, \cdots y_\nu)$$

die Wahrscheinlichkeit ist, mit einer Frau des Alters y verheiratet zu sein.

I. Auf Grund dieser Zivilstandsdaten und einer Frauensterbetafel ist der *durchschnittliche Barwert der Witwenrente* nach einem *im Alter x verstorbenen* Aktiven zu bestimmen; bezüglich der Rente wird vorschüssige monatliche Auszahlung vorausgesetzt.

Bezeichnet man diesen durchschnittlichen Wert mit ${}^a\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)}$, wo

1) Solche Erhebungen sind beispielsweise vor Begründung des österreichischen Privatbeamtengesetzes in den beteiligten Personenkreisen gepflogen worden. Siehe „Die Ergebnisse der über die Standesverhältnisse der Privatangestellten im Jahre 1896 eingeleiteten amtlichen Erhebungen". I. Teil, p. 120—127.

die Einklammerung des y andeuten soll, daß es sich um eine Mittelbildung in bezug auf das Frauenalter handelt, so hat man zu setzen

$$^{a}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)} = \sum_{y_1}^{y_\nu} \frac{\mathrm{L}_{xy}^{a}}{\mathrm{L}_x^{a}}\, \mathrm{a}_y^{(12)} = \frac{\sum\limits_{y_1}^{y_\nu} \mathrm{L}_{xy}^{a}\, \mathrm{a}_y^{(12)}}{\mathrm{L}_x^{a}}. \tag{16}$$

II. Auf Grund derselben Zivilstandsdaten, einer Frauensterbetafel und einer Invalidensterbetafel ist die *durchschnittliche Anwartschaft auf Witwenrente* nach einem *im Alter x invalid gewordenen* Aktiven zu bestimmen; bezüglich der Auszahlung der Rente wird dieselbe Modalität vorausgesetzt wie vorhin.

Als Zeichen für diesen Durchschnittswert werde $^{ai}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)}$ verwendet; da im Augenblicke des Invalidwerdens, sofern dann y das Alter der Frau ist, die Anwartschaft den in Nr. 297 bestimmten Wert $^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)}$ hat, so ist

$$^{ai}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)} = \sum_{y_1}^{y_\nu} \frac{\mathrm{L}_{xy}^{a}}{\mathrm{L}_x^{a}}\, {}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)} = \frac{\sum\limits_{y_1}^{y_\nu} \mathrm{L}_{xy}^{a}\, {}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)}}{\mathrm{L}_x^{a}}. \tag{17}$$

Man wird diese nach (16) und (17) auf Grund der unmittelbaren Beobachtungsdaten berechneten Durchschnittswerte einer Ausgleichung unterziehen, wozu ein graphisches Verfahren ausreicht.

III. Mit Benutzung der eben gefundenen Durchschnittswerte den *Barwert der Anwartschaft auf Witwenrente* nach einem gegenwärtig x-jährigen Aktiven *überhaupt* zu bestimmen.

Stirbt der Aktive im $\overline{n+1}$. Jahre als Aktiver, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{d_{x+n}^{aa}}{l_x^{a}}$ besteht, so wird der Durchschnittswert $^{a}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}^{(12)}$ fällig, sofern man die Sterbefälle auf die Mitte des Jahres zusammengezogen denkt; diesen Durchschnittswert kann man in linearer Interpolation durch

$$\frac{^{a}\mathrm{a}_{x+n,(y)}^{(n)} + {}^{a}\mathrm{a}_{x+n+1,(y)}^{(12)}}{2}$$

ersetzen. Dieser Teil der Anwartschaft hat, auf den Beginn der Rechnung bezogen, den Wert

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+n}^{aa}}{l_x^{a}}\, {}^{a}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}^{(12)} = \frac{C_{x+n}^{aa}}{v^{\frac{1}{2}} D_x^{a}}\, {}^{a}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}^{(12)}. \tag{A}$$

Wird der Aktive im $\overline{n+1}$-ten Jahre invalid, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{J_{x+n}}{l_x^{a}}$ besteht, so wird der Durchschnittswert $^{ai}\mathrm{a}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}^{(12)}$

der Witwenanwartschaft fällig, den man entsprechend durch das arithmetische Mittel der beiden Nachbarwerte ersetzen kann wie vorhin. Dieser Teil der Anwartschaft hat, auf den Beginn der Rechnung diskontiert, den Wert

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{J_{x+n}}{l_x^a} {}^{ai}\mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(y)} = \frac{D^J_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D^a_x} {}^{ai}\mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}. \tag{B}$$

Die Summe aus (A) und (B) gibt die ganze aus dem $\overline{n+1}$-ten Jahre stammende Anwartschaft, und setzt man

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left\{ C^{aa}_{x+n}\, {}^{a}\mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(y)} + D^J_{x+n}\, {}^{ai}\mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(y)}\right\} = \mathrm{D}^a_{x+n,(y)}$$

$$\mathrm{D}^a_{x+n,(y)} + \mathrm{D}^a_{x+n+1,(y)} + \cdots = \mathrm{N}^a_{x+n,(y)}, \tag{18}$$

so schreibt sich schließlich die gesamte Witwenanwartschaft

$${}^{a}\mathfrak{a}^{(12)}_{x(y)} = \frac{\mathrm{N}^a_{x(y)}}{D^a_x}. \tag{19}$$

Die Durchführung erfordert die diskontierten Zahlen der durch Tod ausscheidenden Aktiven, C^a_x, die diskontierten Zahlen der aus der Aktivenordnung hervorgehenden Invaliden, D^J_x, und die zuvor gerechneten Durchnittswerte.[1])

IV. Wenn bezüglich der Witwenrente die gleichen Bestimmungen über deren frühesten Beginn und ihr Steigerungsverhältnis getroffen sind wie im ersten Beispiel in Nr. 296 bezüglich der Pension des Mannes, so stellt sich der Barwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven pro 1 der Witwenpension beim Eintritt in die Versicherung auf

$$\frac{0{,}4\,\mathrm{N}^a_{x+10,(y)} + 0{,}02\,(\mathrm{S}^a_{x+11,(y)} - \mathrm{S}^a_{x+41,(y)})}{D^a_x}; \tag{20}$$

dabei ist

$$\mathrm{S}^a_{x+n,(y)} = \mathrm{N}^a_{x+n,(y)} + \mathrm{N}^a_{x+n+1,(y)} + \cdots \tag{21}$$

Ist in dem zweiten in Nr. 296 behandelten Beispiel einer steigenden Invalidenpension die Anordnung getroffen, daß der Anspruch der Witwe jederzeit 50% dessen beträgt, worauf der Gatte im Zeitpunkte seines Ablebens Anspruch hat, so drücken sich die Anwartschaften eines x-jährigen Aktiven auf Witwenrente je nach der bereits zugebrachten Dienstzeit durch Formeln genau desselben Baues aus,

1) Man vergleiche hiermit die Darstellung bei R. Leubin, Versicherungstechnische Orientierung etc., Bern 1903, und die Behandlung der Witwenanwartschaft in dem „Statut der allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte etc.", Verordnungsblatt des k. k. Ministeriums des Innern, Nr. 7, Wien 1908.

wie sie dort für die Invalidenrente aufgestellt worden sind; jedoch treten an die Stelle der Zahlen N_x^{ai}, S_x^{ai} nunmehr die Zahlen $\mathrm{N}_{x(y)}^{a}$, $\mathrm{S}_{x(y)}^{a}$, und an die Stelle des Nenners D_x^a kommt $2D_x^a$ zu schreiben, so daß beispielsweise der Barwert der Anwartschaft zu Beginn der Dienstzeit

$$\frac{1}{2D_x^a}\left\{15\,\mathrm{N}_{x+5,(y)}^{a}+\mathrm{S}_{x+6,(y)}^{a}+\mathrm{S}_{x+9,(y)}^{a}-2\,\mathrm{S}_{x+35,(y)}^{a}\right\},$$

nach Zurücklegung der vollen Dienstzeit

$$35\,\frac{\mathrm{N}_{x(y)}^{a}}{D_x^a}$$

beträgt, alles in Prozenten des dem Manne anrechenbaren Lohnes.

299. Anwartschaft eines Invaliden auf Waisenrente. Es sei bestimmt, daß eine Waise nach dem Tode des Vaters eine in monatlichen Raten im vorhinein zahlbare Rente vom Jahresbetrage 1 auf die Dauer ihres Lebens, längstens aber bis zur Vollendung des 18. Lebensjahres zu erhalten habe. Der Vater gehört dem Stande der Invaliden an und steht im Alter x, das Kind im Alter z (< 18).

Die Rente wird im $\overline{n+1}$-ten Jahre fällig, wenn der Vater im Laufe desselben stirbt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{d_{x+n}^i}{l_x^i}$ besteht, und das Kind dieses Jahr überlebt, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{l_{z+n+1}}{l_z}$ zu erwarten ist. Trägt man den sonstigen Bestimmungen dadurch Rechnung, daß man annimmt, die Sterbefälle würden alle in der Mitte des Jahres erfolgen und demgemäß auch die Waisenrenten in diesem Zeitpunkte beginnen, so drückt sich der aus dem $\overline{n+1}$-ten Jahre stammende Teil der Anwartschaft durch

$$v^{n+\frac{1}{2}}\frac{d_{x+n}^i}{l_x^i}\,\frac{l_{z+n+1}}{l_z}\,\mathrm{a}_{z+n+\frac{1}{2}}^{(12)}=\frac{C_{x+n}^i\,l_{z+n+1}}{v^{\frac{1}{2}}D_x^i\,l_z}\,\mathrm{a}_{z+n+\frac{1}{2}}^{(12)}$$

aus; dabei kann wie in den andern analogen Fällen für $\mathrm{a}_{z+n+\frac{1}{2}}^{(12)}$

$$\frac{\mathrm{a}_{z+n}^{(12)}+\mathrm{a}_{z+n+1}^{(12)}}{2}$$

genommen werden.

Setzt man

$$\frac{C_{x+n}^i\,l_{z+n+1}}{v^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{a}_{z+n+\frac{1}{2}}^{(12)}=\mathrm{D}_{x+n,z+n}^{i}, \tag{22}$$

so ergibt sich der Gesamtwert der Anwartschaft durch Summierung

des Anteils $\frac{D^i_{x+n,z+n}}{D^i_x l_z}$ über $n = 0, 1, \cdots$ bis ans Ende der beim Kindesalter 18, beziehungsweise 17 abgebrochenen Tafel; setzt man also

$$D^i_{x,z} + D^i_{x+1,z+1} + \cdots + D^i_{x+17-z,17} = N^i_{x,z}, \tag{23}$$

so ist dieser Gesamtwert

$$^i a^{(12)}_{x,z} = \frac{N^i_{x,z}}{D^i_x l_z}. \tag{24}$$

300. Anwartschaft eines Aktiven auf Waisenrente. Hinsichtlich des Beginns, der Auszahlung und der Dauer der Rente gelten dieselben Bestimmungen wie in Nr. 299. Der Vater gehört dem Stande der Aktiven an und steht im Alter x, das Kind im Alter z (< 18).

Zur Bewertung dieser Anwartschaft kann dasselbe Verfahren eingeschlagen werden wie bei der Anwartschaft eines Aktiven auf Witwenrente. Hierzu sind der *Durchschnittsbarwert der Kinderrente* nach einem im Alter x *verstorbenen* Aktiven und der *Durchschnittsbarwert der Anwartschaft auf Kinderrente* nach einem im Alter x invalid gewordenen Aktiven erforderlich. Zur Bestimmung dieser Durchschnittswerte mögen Erhebungen zur Verfügung stehen in folgender Form:

Gezählt wurden L^a_x Aktive des Alters x; auf diese entfallen nach der Zählung $K^a_{x,z_1}, K^a_{x,z_2}, \cdots K^a_{x,z_\nu}$ Kinder des Alters $z_1, z_2, \cdots z_\nu$ beziehungsweise, also $\sum_{z_1}^{z_\nu} K^a_{x,z}$ Kinder unter 18 Jahren überhaupt, so daß

$$\frac{K^a_{x,z}}{\sum_{z_1}^{z_\nu} K^a_{x,z}} \qquad (z = z_1, z_2, \cdots z_\nu)$$

die relative Häufigkeit z-jähriger Kinder unter den minderjährigen Kindern der x-jährigen Aktiven und

$$\frac{K_{x,z}}{L^a_x} \qquad (z = z_1, z_2, \cdots z_\nu)$$

die relative Häufigkeit z-jähriger Kinder unter x-jährigen Aktiven überhaupt ist.

I. Mittels dieser Daten drückt sich der *durchschnittliche Barwert der Kinderrente* nach einem Aktiven, der im Alter x als Aktiver stirbt, durch

$$^a a^{(12)}_{x,(z)} = \sum_{z_1}^{z_\nu} \frac{K^a_{xz}}{L^a_x} a^{(12)}_z = \frac{\sum_{z_1}^{z_\nu} K^a_{xz} a^{(12)}_z}{L^a_x} \tag{25}$$

aus.

II. Der *durchschnittliche Barwert der Anwartschaft auf Kinderrenten* nach einem im Alter x invalid gewordenen Aktiven stellt sich auf

$$ {}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{x(z)} = \sum_{z_1}^{z_\nu} \frac{K^a_{xz}}{L^a_x}\, {}^{i}\mathrm{a}^{(12)}_{x|z} = \frac{\sum\limits_{z_1}^{z_\nu} K^a_{xz}\, {}^{i}\mathrm{a}^{(12)}_{x|z}}{L^a_x}. \tag{26} $$

III. Aus diesen beiden Durchschnittswerten berechnet sich der Barwert der ganzen Anwartschaft wie folgt.

Stirbt der Aktive als solcher im $\overline{n+1}$-ten Jahre, wofür $\frac{d^{aa}_{x+n}}{l^a_x}$ die Wahrscheinlichkeit ist, so wird, falls man die Sterbefälle in der Mitte des Jahres geschehen annimmt, der Durchschnittswert ${}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)}$ fällig; der Barwert hiervon, auf den Beginn der Rechnung diskontiert, ist

$$ v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{aa}_{x+n}}{l^a_x}\, {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} = \frac{C^{aa}_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D^a_x}\, {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)}. \tag{A} $$

Wird er im selben Jahre invalid, was mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{J_{x+n}}{l^a_x}$ bevorsteht, und zieht man zum Zwecke der Näherung die Invalidisierungsfälle auf Mitte des Jahres zusammen, so wird die durchschnittliche Anwartschaft ${}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)}$ fällig; der Barwert dieser Erwartung zum Zeitpunkt der Rechnung ist

$$ v^{n+\frac{1}{2}} \frac{J_{x+n}}{l^a_x}\, {}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} = \frac{D^J_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D^a_x}\, {}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)}. \tag{B} $$

Für die auf Mitte des Jahres bezogenen Durchschnittswerte in (A) und (B) können die arithmetischen Mittel der beiderseits benachbarten Tafelwerte genommen werden.

Durch Vereinigung von (A) und (B) ergibt sich der Teilwert der Anwartschaft, der aus dem $\overline{n+1}$-ten Jahre stammt; setzt man

$$ \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \left\{ C^{aa}_{x+n}\, {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} + D^J_{x+n}\, {}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} \right\} = \mathrm{D}^a_{x+n,(z)} $$

$$ \mathrm{D}^a_{x+n,(z)} + \mathrm{D}^a_{x+n+1,(z)} + \cdots = \mathrm{N}^a_{x+n,(z)} \tag{27} $$

und summiert über $n = 0, 1, 2, \cdots$, so kommt man zu dem Gesamtwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Waisenrente in dem angeführten Ausmaße, die sich dann schreibt:

$$ {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{x,(z)} = \frac{\mathrm{N}^a_{x,(z)}}{D^a_x}. \tag{28} $$

Die Rechnung ist so geführt, daß *jedem* Kinde, dessen Alter unter 18 Jahren liegt, nach dem Tode des Vaters eine Rente im Betrage 1 zufällt. Bei Waisenstämmen können bezüglich des Ausmaßes und der Dauer der Rente verschiedene Bestimmungen getroffen sein, z. B. daß die Rente aufrecht bleibt, bis auch das jeweilen jüngste Kind das 18. Lebensjahr vollendet; man sucht dann Grenzen für die Anwartschaft zu erhalten, indem man einmal den Durchschnittswert nach dem jüngsten Kinde und ein zweitesmal unter der ungünstigsten Annahme bildet, daß dieses jüngste Kind das 18. Lebensjahr *sicher* vollendet; zwischen diese Grenzen schaltet man den definitiven Wert ein.

IV. Zu einer einfacheren Schätzung der Anwartschaft auf Waisenrente nach einem x-jährigen Aktiven kommt man, indem man von der Unterscheidung, daß er als Aktiver oder als Invalider sterben kann, absieht und der Rechnung eine Sterbetafel zugrunde legt, welche Aktive und Invalide zusammenfaßt und mit Hilfe des durchschnittlichen Barwerts (A) bloß für den Todesfall rechnet. Ist (l_x) die betreffende Sterbetafel, so hat man

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+n}}{l_x} \mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} = \frac{C_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D_x} \mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)}$$

als Belastung aus dem $\overline{n+1}$-ten Jahre; mit den Bezeichnungen

$$\frac{C_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}}} \mathfrak{a}^{(12)}_{x+n+\frac{1}{2},(z)} = \mathrm{D}_{x+n,(z)}$$

$$\mathrm{D}_{x+n,(z)} + \mathrm{D}_{x+n+1,(z)} + \cdots = \mathrm{N}_{x+n,(z)}$$

schreibt sich dann die Gesamtbelastung, wenn beispielsweise 10-jährige Karenz stipuliert ist, wie folgt:

$${}_{10|}\mathfrak{a}^{(12)}_{x,(z)} = \frac{\mathrm{N}_{x+10,(z)}}{D_x}.$$

301. Einmalige Leistungen. Neben den in Rentenform fortlaufenden Zahlungen werden mit einer Pensionsversicherung häufig auch einmalige Leistungen mit verschiedenem Zweck in Verbindung gebracht.

Als eine einmalige Leistung erscheint die Abfindung oder Abfertigung, welche gezahlt wird, wenn ein Versicherter während der Karenz für den Anfall der Invalidenrente invalid wird; durch sie soll ein Teil der geleisteten Einzahlungen rückersetzt werden.

Ein anderer Fall einmaliger Zahlung besteht in der Abfertigung, die an die Witwe und eventuelle Waisen nach einem verheirateten (verwitweten) Versicherten ausgefolgt wird, wenn dieser innerhalb der Karenz stirbt.

Auch das Sterbegeld (Begräbniskostenbeitrag), das bei Pensions-

einrichtungen mitunter eingeführt ist, um den Hinterbliebenen zur Bestreitung der mit dem Begräbnis und der letzten Krankheit verbundenen Auslagen behilflich zu sein, gehört zu den einmaligen Zahlungen.

Finanziell treten solche Leistungen gegenüber den Rentenbelastungen wesentlich zurück. Ihre Bewertung soll an einigen speziellen Beispielen gezeigt werden.

I. Bei einer Invalidenpensionsversicherung mit k-jähriger Karenz sei eine Abfindung für den Fall vorzeitig eingetretener Invalidität vorgesehen und nach einer Skala $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots \mathfrak{p}_k$ geregelt, welche die Gehaltsprozente ausdrückt, die gezahlt werden, wenn die Invalidität im Laufe des 1., 2., $\cdots$ k-ten Jahres eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß für einen Aktiven des Eintrittsalters x die Abfindung im $\overline{n+1}$-ten Jahre fällig werde, ist durch $\frac{J_{x+n}}{l_x^a}$ gegeben; auf Mitte des Jahres reduziert entspringt daraus eine Belastung vom gegenwärtigen Barwert

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{J_{x+n}}{l_x^a} \mathfrak{p}_{n+1} = \frac{D_{x+n}^J}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a} \mathfrak{p}_{n+1}$$

ist.

Der Gesamtbarwert des Anspruches auf Abfindung stellt sich demnach für einen Aktiven des Alters x, der $0, 1, \cdots k-1$ Dienstjahre zurückgelegt hat, beziehungsweise auf

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a} \left\{ \mathfrak{p}_1 D_x^J + \mathfrak{p}_2 D_{x+1}^J + \cdots + \mathfrak{p}_k D_{x+k-1}^J \right\}$$

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a} \left\{ \mathfrak{p}_2 D_x^J + \mathfrak{p}_3 D_{x+1}^J + \cdots + \mathfrak{p}_k D_{x+k-2}^J \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a} \mathfrak{p}_k D_x^J .$$

II. Bei einer mit Witwenversorgung verbundenen Invalidenpensionsversicherung mit k-jähriger Karenz sei für den Fall des vorzeitigen Todes eine Abfertigung an die eventuell verbleibende Witwe vorgesehen, deren Ausmaß im voraus festgesetzt ist ohne Rücksicht auf die zurückgelegte Dienstdauer. Es ist der Wert der Einheit dieses Anspruches zu bestimmen.

Die Erledigung dieser Aufgabe setzt die Kenntnis solcher Zivilstandsdaten voraus, aus welchen für einen x-jährigen Aktiven (in Ermangelung solch spezieller Daten für einen x-jährigen überhaupt) die Wahrscheinlichkeit h_x, verheiratet zu sein, abgeleitet werden kann.

Der Barwert des Anspruches stellt sich dann als Wert einer temporären Ablebensversicherung des Aktiven auf den Betrag der Abfertigung.

Erfolgt der Tod im $n+1$-ten Jahre, so ist der Barwert der Abfertigungseinheit

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+n}^{aa}}{l_x^a} h_{x+n} = \frac{C_{x+n}^{aa} h_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a},$$

sofern die Sterbefälle auf Mitte des Jahres zusammengezogen werden; durch Summierung dieses Ausdrucks über $n = 0, 1 \cdots k-1$ ergibt sich der Gesamtwert:

$$\frac{\sum_0^{k-1} {}^n C_{x+n}^{aa} h_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a}.$$

Die Zahlen d_x^{aa} sind aus einer Aktivenordnung l_x^a nach der Formel $d_x^{aa} = q_x^{aa} l_x^a$ zu rechnen.

III. a) Bei einer Invalidenpensionseinrichtung sei für jeden Aktiven, der infolge Todes ausscheidet, ein Sterbegeld ausgesetzt. Es ist der Barwert dieses Sterbegeldes für einen Aktiven des Alters x zu bestimmen.

Es handelt sich um eine Ablebensversicherung, die sich auf die Zahlen der Aktivenordnung (l_x^a) als Zahlen der Lebenden und die eben definierten Zahlen d_x^a der Toten stützt. Zieht man, wie in der vorstehenden Rechnung, die Sterbefälle auf die Mitte des Jahres zusammen, so ist damit schon dem Umstande Rechnung getragen, daß das Sterbegeld unmittelbar nach dem Tode auszuzahlen ist (Nr. 277, (59)).

Wird also $C_x^{aa} + C_{x+1}^{aa} + \cdots = M_x^{aa}$ gesetzt, so hat die Anwartschaft auf das Sterbegeld 1 den Barwert

$$\frac{M_x^{aa}}{v^{\frac{1}{2}} D_x^a}.$$

b) Das Sterbegeld sei nach dem Tode sowohl der Aktiven als der Invaliden zahlbar. Es handelt sich wieder um den Barwert seiner Einheit.

Bei einem bereits invaliden, dessen Alter x ist, kommt dieser Barwert einer unmittelbar nach dem Tode fälligen Ablebensversicherung, gerechnet auf Grund einer Sterbetafel der Invaliden, gleich, ist also

$$\frac{A_x^i}{v^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Anwartschaft eines Aktiven setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der erste, soweit er das $\overline{n+1}$-te Jahr betrifft, entspringt aus der Möglichkeit des Ablebens im aktiven Zustande und hat den Ausdruck

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{aa}_{x+n}}{l^a_x} = \frac{C^{aa}_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}} D^a_x};$$

der zweite erwächst, wenn Invalidität eintritt, und beträgt

$$v^{n+\frac{1}{2}} \frac{J_{x+n}}{l^a_x} \frac{A^i_{x+n+\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} = \frac{D^J_{x+n}}{v D^a_x} A^i_{x+n+\frac{1}{2}};$$

setzt man also

$$\frac{C^{aa}_{x+n}}{v^{\frac{1}{2}}} + \frac{D^J_{x+n}}{v} A^i_{x+n+\frac{1}{2}} = \mathrm{C}^{aa}_{x+n}$$

$$\mathrm{C}^{aa}_{x+n} + \mathrm{C}^{aa}_{x+n+1} + \cdots = \mathrm{M}^{aa}_{x+n},$$

so schreibt sich der Gesamtwert der Anwartschaft auf Sterbegeld

$$\frac{\mathrm{M}^{aa}_x}{D^a_x}.$$

Man kann die Anwartschaft auf Sterbegeld in dem gegenwärtig behandelten Falle ohne Trennung der Aktiven und Invaliden auf Grund einer rechnungsmäßig hergestellten Tafel eines sogenannten gemischten Bestandes (vgl. Nr. 252) abschätzen. Zur Gewinnung einer solchen Tafel geht man von der Aktivenordnung (l^a_x) aus, benutzt Invaliditäts- und Invalidensterbenswahrscheinlichkeiten und macht eine Annahme über jenes Alter, in welchem die Invalidisierung beginnt; es sei dies das Alter x (15 bis 20). Nach n Jahren seien neben l^a_{x+n} Aktiven, wie sie die Aktivenordnung angibt, noch l^{ai}_{x+n}[1]) Personen vorhanden, die aus den vorhergegangenen Invalidisierungen stammen; dann soll

$$l_{x+n} = l^a_{x+n} + l^{ai}_{x+n} \tag{29}$$

die Anzahl der $\overline{x+n}$-jährigen in der Tafel des gemischten Bestandes sein.

Nun ist

$$l^{ai}_{x+n} = l^{ai}_{x+n-1}(1 - q^{ii}_{x+n-1}) + l^a_{x+n-1}\, w_{x+n-1}\left(1 - \frac{1}{2} q^{ii}_{x+n-1}\right); \tag{30}$$

der erste Teil stammt von den Invaliden, die schon im Alter $x+n-1$ vorhanden waren, der zweite Teil von den Aktiven dieses Alters. Mit Hilfe dieser Rekursionsformel kann man, da voraussetzungsgemäß

1) Mit vorübergehend veränderter Bedeutung dieses Zeichens (vgl. Nr. 252).

$l_x^{ai} = 0$ ist, die aufeinanderfolgenden l_x^{ai} und damit auch die sukzessiven l_x berechnen; es ist nämlich:

$$l_x^{ai} = 0$$

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^a w_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{ii}\right)$$

$$l_{x+2}^{ai} = l_{x+1}^{ai}(1 - q_{x+1}^{ii}) + l_{x+1}^a w_{x+1} \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+1}^{ii}\right).$$

Es ist zu beachten, daß die Zahlen l_x den altersmäßigen Abfall einer Personengemeinschaft darstellen, bei der ein Teil durch Invalidität und Tod, der andere bloß durch Tod ausscheidet.

Man benutzt nun diese Tafel (l_x) wie eine Sterbetafel und rechnet nach ihr die Anwartschaft auf Sterbegeld für alle Personen des Bestandes, aktive und invalide, als eine unmittelbar nach dem Tode fällige Ablebensversicherung, also nach der Formel

$$\frac{M_x}{v^{\frac{1}{2}} D_x}.$$

II. Abschnitt. Prämien.

§ 1. Einmalige und Jahresprämien.

302. Allgemeine Kennzeichnung des Versicherungsgeschäftes. Das Versicherungsgeschäft besteht in einem Austausch von Versicherungswerten gegen Barwerte oder von Versicherungswerten gegeneinander. Von Nebenumständen abgesehen liegt dem Geschäfte als *oberstes Prinzip* die *Gleichwertigkeit der Tauschobjekte* zugrunde.

Der *Versicherer* gewährt die Versicherung, worunter versicherungstechnisch bewertbare Anwartschaften jeglicher Art verstanden werden sollen, gegen einmalige oder fortgesetzte (laufende) *Prämienzahlung* des *Versicherungsnehmers.*

Über den abgeschlossenen *Versicherungsvertrag* wird dem Versicherungsnehmer eine Urkunde, die *Police,* ausgestellt, welche die beiderseitigen Verpflichtungen genau festsetzt und die *Bedingungen* angibt, unter welchen der Vertrag bis zu seiner Abwicklung aufrecht bleibt. Eine Police heißt *prämienfrei,* wenn für sie keine Prämien mehr zu zahlen sind. Dies tritt z. B. ein, wenn der Versicherte seiner Zahlungspflicht auf einmal, durch eine *einmalige Prämie,* nachgekommen ist, oder wenn für die laufende Prämienzahlung eine Frist festgesetzt ist, kürzer als die Dauer der Versicherung; nach Ablauf dieser Frist wird die Police prämienfrei. Andere Fälle werden noch zur Sprache kommen.

Die *Haupt*bestimmung der Prämienzahlungen der Versicherungsnehmer besteht darin, die Mittel aufzubringen, welche den Versicherer zur Einlösung aller übernommenen *Versicherungs*verpflichtungen in den Stand setzen.

Außerdem aber haben sie mehrere *Neben*bestimmungen zu erfüllen, die indessen für die glatte und sichere Abwicklung des Geschäftes nicht minder wichtig sind. Es seien hier als die hauptsächlichsten angeführt: a) Die Deckung der mit dem Abschlusse neuer Versicherungen verbundenen Aufwendungen und der Kosten für die fortlaufende Verwaltung des Unternehmens; b) die Bildung von Rücklagen, die man zusammenfassend als *Sicherheitsfonds* oder *freie Reserven* bezeichnet und die den Zweck haben, das Unternehmen gegenüber den unvermeidlichen Fluktuationen der maßgebenden Faktoren und außerordentlichen Bedarfsfällen sicherzustellen; c) die Bildung von Gewinn, der bei Aktienunternehmungen teils dazu verwendet wird, das Aktienkapital zu verzinsen, teils den Versicherten oder einem Teil derselben zugeführt wird (Versicherung mit Anteil am Gewinn).

Der Anteil der Prämie, welcher der Hauptbestimmung dient, heißt *Nettoprämie*; seine Ermittelung ist, sobald einmal die Grundlagen gewählt sind, eine rein versicherungsmathematische Aufgabe.

Der den Nebenzwecken dienende Anteil der gezahlten Prämien heißt kurzweg *Zuschlag*; er wäre nach seiner Bestimmung zu gliedern in einen Zuschlag für die *ersten* Unkosten (Akquisitions- oder Erwerbskosten: Abschlußprovision, ärztliche Untersuchung, Ausfertigung der Police), einen für die *dauernden* Unkosten (Regiekosten: Inkasso, Verwaltung, Steuern), einen dritten zur Bildung von Rücklagen, eventuell einen vierten zur planmäßigen Ansammlung von Gewinn. Bei der Feststellung der Zuschläge kommen neben versicherungstechnischen auch kommerzielle Rücksichten zur Geltung; eine allgemein gültige Theorie ihrer Bemessung kann es daher nicht geben.

Die um den Zuschlag erhöhte Nettoprämie heißt *Brutto-* oder *Tarifprämie*; sie ist in den Tarifen verzeichnet, auf Grund deren die Verträge abgeschlossen werden.

Aus den Prämien und etwaigen Policengebühren, ferner aus den durch Veranlagung disponibler Summen (in Wertpapieren, Immobilien, Hypothekardarlehen, Darlehen auf die eigenen Policen usw.) erzielten Zinserträgen setzen sich die *Einnahmen* einer Versicherungsunternehmung zusammen. Die *Ausgaben* bestehen der Hauptsache nach in den ausgezahlten Versicherungssummen, den Verwaltungsauslagen im weitesten Sinne und der eventuellen Gewinnausschüttung.

Quellen des *Gewinnes* (oder auch des Verlustes) liegen in der Wahl der Grundlagen: Sterbetafeln oder dgl. und Zinsfuß, und in der Bemessung der Zuschläge.

303. Netto- und Bruttoprämien. Der Zusammenhang zwischen der versicherungstechnisch festgesetzten Nettoprämie P und der Bruttoprämie P' wird in der Regel eine der folgenden Formen aufweisen:

$$P' = P(1 + \varkappa) \tag{1}$$

$$P' = P + c \tag{2}$$

$$P' = P(1 + \varkappa) + c. \tag{3}$$

Im Falle (1) ist der Zuschlag $\varkappa P$ zur Nettoprämie dieser selbst proportional und beträgt $100\varkappa$ Prozent derselben. Im Falle (2) ist er von der Höhe der Nettoprämie unabhängig. Im Falle (3), wo er $\varkappa P + c$ beträgt, setzt er sich aus einem der Nettoprämie proportionalen und einem konstanten Teile zusammen.

Die Größen $\varkappa$, c werden im allgemeinen vom Beitrittsalter abhängig sein, etwa so, daß sie mit größeren Altersabschnitten variieren.

Häufig drückt man den Zuschlag als Bruchteil der Bruttoprämie aus; alsdann schreibt sich der Zusammenhang zwischen ihr und der Nettoprämie:

$$P' = P + \alpha P', \tag{4}$$

ein Ansatz, der mit jenem (1) übereinstimmt, und zwar ist dann

$$\varkappa = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Die Bildung der Bruttoprämie aus der Nettoprämie geschah bisher und geschieht auch heute noch zumeist auf empirischem Wege, unter Benutzung mannigfacher Erfahrungen. Doch entwickelt sich auch bereits eine Theorie der Bruttoprämien, die im Haushalt des Versicherungswesens das Umundauf bilden; man sucht sie so zu konstruieren, daß eine gerechte Verteilung der Lasten auf die Versicherten stattfinde; parallel damit geht das Streben, die Versicherten auch an den erzielten Vorteilen nach Maßgabe ihrer Beteiligung an den Lasten partizipieren zu lassen. Der Versicherungstechnik fallen dabei wichtige und schwierige Aufgaben zu, die sie jedoch nur im Verein mit kaufmännischen und geschäftspolitischen Erfahrungen und Erwägungen lösen kann. Gegenwärtig soll jedoch von der inneren Struktur der Bruttoprämie abgesehen werden, da es sich nur um ihre Gegenüberstellung zur Nettoprämie handelt.

Die Bestimmung der Nettoprämien erfolgt in der Weise, daß sie in ihrer Gesamtheit und bei fortgesetzter Verzinsung nach dem zugrunde gelegten Zinsfuße gerade ausreichen, die sukzessive fällig werdenden Versicherungssummen auszuzahlen, vorausgesetzt, daß die versicherten Massenerscheinungen genau so verlaufen, wie es den adoptierten statistischen Grundlagen (Sterbetafeln, Invaliditätstafeln usw.) entspricht.

Was also diese Grundlagen betrifft, so stützt sich die Berechnung der Nettoprämien auf den Eintritt des wahrscheinlichsten Falles. Man

bezeichnet das Prinzip, das der Nettoprämienberechnung zugrunde liegt, als das *Äquivalenzprinzip*: Leistung des Versicherers und Gegenleistung des Versicherten haben sich im versicherungstechnischen Sinne das Gleichgewicht zu halten. Die mathematische Formulierung dieses Grundsatzes besteht in einer Gleichung, auf deren einen Seite der Barwert der Leistungen des Versicherten, auf deren anderen Seite der Barwert der Leistungen des Versicherers steht.

Ein Parallelgehen der versicherten Massenerscheinungen mit den gewählten Grundlagen ist niemals zu erwarten; im günstigsten Falle finden Schwankungen um dieselben statt. Eine anhaltende Abweichung in einem Sinne kann je nach der Versicherungsart die Gebarung in einem für das Unternehmen günstigen oder ungünstigen Sinne beeinflussen. So wird, wenn das Absterben rascher, mit stärkerer Intensität vor sich geht, als es der Tafel entspricht, wenn also *Übersterblichkeit* anhält, die Todesfallversicherung ungünstig beeinflußt sein, weil die Summen rascher fällig werden, als die Rechnung es annimmt; für die Rentenversicherung dagegen wäre eine solche Erscheinung günstig, weil sie gegenüber der Rechnung ein rascheres Ablaufen der Renten zur Folge hätte. Gerade umgekehrte Wirkungen würde *Unsterblichkeit* äußern.

Es wäre eine Wahl der statistischen Grundlagen denkbar, die die Anbringung von Zuschlägen an den Nettoprämien entbehrlich machte, indem der aus den (günstigen) Abweichungen fließende Gewinn zur Deckung aller übrigen Erfordernisse ausreichte. Praktisch wird dies aber nicht geübt; vielmehr erfolgt die Wahl zwar mit Vorsicht, aber doch so, daß der wirkliche Verlauf dem rechnungsmäßigen möglichst nahe kommt.

304. Einmalige Prämie. Der Versicherungsnehmer kann eine Versicherung dadurch erwerben, daß er gleich beim Abschluß den ihr entsprechenden Barwert erlegt, der als *einmalige Prämie* bezeichnet wird. Man nennt diesen Vorgang auch die *kapitalische Begründung* einer Versicherung.

Außer dieser praktischen Bedeutung kommt der einmaligen Prämie in der ganzen Versicherungsrechnung große Wichtigkeit zu.

Wenn im folgenden von Prämie kurzweg gesprochen wird, so soll darunter die Nettoprämie verstanden sein.

Diese Bemerkung vorausgeschickt, kann der fundamentale Satz ausgesprochen werden:

Die einmalige Prämie für eine Versicherung ist dem Werte der letzteren gleich.

Mit der im ersten Abschnitte erfolgten Bestimmung der *Versicherungswerte* ist demnach auch schon die Berechnung der *einmaligen Prämien* erledigt.

Es ist also beispielsweise die einmalige Prämie:

1. für eine auf n Jahre lautende Erlebensversicherung der Person (x):

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 258, (3)];

2. für eine sofort beginnende Postnumerando-Leibrente:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

[Nr. 260, (7)];

3. für eine nach n Jahren beginnende, dann bis zum Ableben währende Rente (Altersrente):

$$_{n|}\mathfrak{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 261, (8)];

4. für eine lebenslängliche Todesfallversicherung:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

[Nr. 266, (25)]; hierbei ist Auszahlung am Ende des Sterbensversicherungsjahres vorausgesetzt; bei sofortiger — d. h. baldmöglichster — Liquidierung sollte die Prämie $A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right)$ betragen [Nr. 278, (61)]. Indessen wird die Todesfallversicherung vielfach auch dann mit dem obigen Betrage bewertet, wenn sie in kürzester Frist ausbezahlt wird; der dadurch entstehende Ausfall wird aus den Zuschlägen gedeckt. Französische Gesellschaften nehmen $A_x(1 + i)$ statt A_x, rechnen also so, als ob die Auszahlung am Beginne des Versicherungsjahres erfolgte, in welchem der Tod eintritt[1]).

5. Für eine gemischte Versicherung mit der Distanz von n Jahren ist die einmalige Prämie

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

[Nr. 270, (41)].

Die vorstehenden Formeln stützen sich auf eine Aggregattafel. Geschieht die Rechnung nach einer Selekttafel, so erfahren die Formeln bloß eine formale Abänderung, indem das Beitrittsalter eingeklammert wird: $[x]$; über die sachliche Bedeutung dieser Abänderung ist in Nr. 264 und 269 das nähere mitgeteilt. — Die Formel für die Einmalprämie der gemischten Versicherung lautet insbesondere

$$A_{[x],\overline{n}|} = \frac{M_{[x]} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{[x]}},$$

wenn n größer ist als die Zahl der unterschiedenen Anfangsjahre; M_{x+n}, D_{x+n} sind dann aus der Schlußtafel zu entnehmen.

1) G. Bohlmann, Encykl. d. mathemat. Wissensch. I, p. 880.

An dem Beispiele der lebenslänglichen Todesfallversicherung wird nachstehend ziffernmäßig dargetan, daß der durch die einmaligen Prämien gebildete Fonds mit seinen Zinsen gerade ausreicht, um alle Versicherungsverpflichtungen zu decken. Der Tabelle liegt die Tafel VIII zugrunde. Es wird angenommen, daß 1273 Personen im Alter von 90 Jahren (so viele führt die Tafel bei diesem Alter an) sich auf das Kapital 1 gegen Einzahlung der aus diesen Grundlagen berechneten einmaligen Prämie 0,90981 versichern. Der so gebildete Fonds per 1158,19 trägt, zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegt, bis zum Schlusse des ersten Versicherungsjahres 40,53 an Zinsen, erreicht also die Höhe 1198,72; dadurch, daß nun für die in diesem Jahre vorgefallenen 402 Todesfälle die Versicherungssumme ausbezahlt wird, sinkt er auf 796,72, den Fonds am Beginne des zweiten Jahres. So geht dies fort; am Ende des zwölften Jahres ist der Fonds auf 1 reduziert, mit welchem Betrage die Versicherungssumme für den letzten Todesfall gedeckt ist; nach ihrer Auszahlung ist der Fonds zur Gänze erschöpft.

Gebahrung einer Todesfallversicherung,
abgeschlossen von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren auf das Kapital 1 gegen Einzahlung der einmaligen Prämie 0,90981.

$3\frac{1}{2}\%$.

Versicherungsjahr	Fonds am Beginn	Zinsen	Fonds am Ende	Schadenzahlung	Rest
1	1158,19	40,53	1198,72	402	796,72
2	796,72	27,88	824,60	296	528,60
3	528,60	18,50	547,10	209	338,10
4	338,10	11,83	349,93	144	205,93
5	205,93	7,21	213,14	93	120,14
6	120,14	4,20	124,34	58	66,34
7	66,34	2,32	68,66	34	34,66
8	34,66	1,23	35,39	18	17,89
9	17,89	0,63	18,52	10	8,52
10	8,52	0,31	8,83	5	3,83
11	3,83	0,14	3,97	3	0,97
12	0,97	0,03	1,00	1	0,00
		114,81		1273	

Anfänglicher Fonds:	1158,19
Zugewachsene Zinsen:	114,81
Summe:	1273,00.

Bei der einmaligen Prämie muß der Zuschlag für die dauernden Unkosten so bemessen werden, daß er für die ganze Versicherungsdauer ausreicht.

305. Jährliche Prämienzahlung. Die üblichste Form der Begründung einer Versicherung besteht in der fortgesetzten Zahlung einer festen *Jahresprämie P*, entweder bis zum Tode des Versiche-

rungsnehmers oder längstens durch eine im voraus festgesetzte Reihe von Jahren. Dabei wird angenommen, daß die Prämie am Beginne jedes Versicherungsjahres, in welchem sie fällig wird, voll zur Einzahlung kommt.

Der *Wert der Prämienzahlung* ist dann gleich dem Werte einer pränumerando zahlbaren (lebenslänglichen oder kurzen) Rente vom Jahresbetrage P, also $P\mathrm{a}$, wenn a der Wert der Rente vom Jahresbetrage 1 ist.

Ist A der *Wert der* betreffenden *Versicherung*, so muß dem obersten Grundsatz gemäß

$$P\mathrm{a} = A$$

sein; daraus ergibt sich die jährliche Prämie:

$$P = \frac{A}{\mathrm{a}}. \tag{5}$$

Ihre Bestimmung kommt also im Wesen auf die Division zweier Versicherungswerte hinaus. Gleichwie die einmalige, so läßt auch die Jahresprämie bei vielen Versicherungsarten eine Darstellung lediglich durch Renten zu.

306. Jahresprämie für die lebenslängliche Todesfallversicherung. Als Beispiel einer eingehenderen Darstellung des Wesens der jährlichen Prämienzahlung möge die vollständige Todesfallversicherung auf das Kapital 1 erörtert werden; es soll dabei an den normalen, wenn auch praktisch nicht geübten Fall der Auszahlung — am Ende des Sterbeversicherungsjahres — gedacht werden.

Die sofort beginnende, bis zum Ableben währende Prämienzahlung ist eine vorschüssige Rente vom Betrage der Prämie, ihr Wert also $P_x \mathrm{a}_x$, wenn x das Alter der versicherten Person ist. Durch Vergleichung mit dem Werte A_x der Versicherung erhält man, der allgemeinen Formel (5) entsprechend,

$$P_x = \frac{A_x}{\mathrm{a}_x}. \tag{6}$$

Drückt man A_x ebenfalls durch die Rente nach Nr. 265, (22) aus, so ergibt sich die Formel

$$P_x = \frac{1}{\mathrm{a}_x} - d, \tag{*7}$$

die zur praktischen Ausführung besonders geeignet ist; man hat von den reziproken Pränumerando-Leibrenten den Diskont zu subtrahieren.

Die Formel (7) und die soeben angewendete

$$A_x = 1 - d\mathrm{a}_x \tag{7*}$$

weisen das Bemerkenswerte auf, daß sie keine der Sterbetafel entnommene Größe enthalten und daher einen für alle Sterbetafeln gültigen Zusammenhang zwischen a_x, A_x, P_x darstellen, so daß, wenn die erste der drei Größen und der Zinsfuß gegeben sind, die beiden

andern ohne Rücksicht auf das Alter durch rein arithmetische Operationen zu finden sind. Auf diesen Sachverhalt gründen sich William Orchards 1856 veröffentlichte Tafeln, deren eine zu jeder Rente die einmalige Prämie A_x, die andere zu jeder Rente die Jahresprämie P_x zu bestimmen gestattet für die gangbaren Prozentsätze; diese Tafeln sind bei *allen* statistischen Grundlagen anwendbar.[1])

Man kann sich den Zusammenhang zwischen einmaliger und jährlicher Prämienzahlung auch in folgender Weise veranschaulichen. Die Person (x) sollte, um für ihren Todesfall das Kapital 1 zu versichern, A_x auf einmal erlegen; sie kann sich statt dessen verpflichten, am Beginne jedes Versicherungsjahres den jährlichen Zins von A_x *voraus* zu entrichten, dessen Betrag dA_x ist, A_x selbst aber von der versicherten Summe bei deren Auszahlung in Abzug bringen zu lassen. Dann ist (x) durch die jährliche Prämie dA_x auf das Kapital $1 - A_x$ versichert, und es bleibt nur die Frage nach der jährlichen Prämie P_x zu beantworten, durch welche (x) die Versicherung auf das Kapital 1 erlangt; diese aber ergibt sich aus der Proportion:

$$P_x : dA_x = 1 : (1 - A_x),$$

aus welcher

$$P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x}$$

Gebarung einer Todesfallversicherung,
abgeschlossen von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren auf das Kapital 1 gegen Zahlung der jährlichen Prämie 0,34116.

$3\frac{1}{2}\%$.

Versicherungsjahr	Fonds am Beginn	Prämien-einnahme	Zu-sammen	Zinsen	Fonds am Schlusse	Schaden-zahlung	Rest
1	0,00	434,30	434,30	15,19	449,49	402	47,50
2	47,50	297,15	344,65	12,06	356,71	296	60,71
3	60,71	196,17	256,88	8,98	265,86	209	56,86
4	56,86	124,87	181,73	6,36	188,09	144	44,09
5	44,09	75,74	119,83	4,19	124,02	93	31,02
6	31,02	44,01	75,03	2,63	77,66	58	19,66
7	19,66	24,22	43,88	1,54	45,42	34	11,42
8	11,42	12,62	24,04	0,84	24,88	18	6,88
9	6,88	6,48	13,36	0,47	13,83	10	3,83
10	3,83	3,07	6,90	0,24	7,14	5	2,14
11	2,14	1,37	3,51	0,12	3,63	3	0,63
12	0,63	0,34	0,97	0,03	1,00	1	0,00
		1210,34		52,66		1273	

Prämieneinnahme:	1210,34
Zugewachsene Zinsen:	52,66
Summe:	1273,00.

1) Vgl. Text Book II, p. 147ff.

folgt; dies geht aber in (6) über, wenn man beachtet, daß nach (7*) $1 - A_x = da_x$ ist.

Das vorstehende, dem in Nr. 304 vorgeführten analoge Beispiel bringt ziffernmäßig den Nachweis, daß die sukzessive eingezahlten Jahresprämien nebst ihren fortlaufenden Zinsen wirklich ausreichen, um die versicherten Summen zu decken. Als Grundlage dienen die Daten der Tafel VIII. 1273 Personen im Alter von 90 Jahren schließen gleichzeitig Todesfallversicherungen gegen die jährliche Prämie 0,34116 ab; der durch die erste Einzahlung entstandene Fonds per 434,30 wächst im Laufe des ersten Jahres um die $3\frac{1}{2}\%$-igen Zinsen per 15,19 auf 449,49 an, vermindert sich aber am Schlusse desselben durch die Auszahlung von 402, verursacht durch die 402 Todesfälle dieses Jahres, auf 47,50. Dies ist der Anfangsfonds des zweiten Jahres, der sich sofort durch die Einzahlungen der 871 Überlebenden auf 344,65 und dann im Laufe des Jahres um die Zinsen auf 356,71 erhöht, um sodann durch die Auszahlungen auf 60,71 zu sinken usf. Am Schlusse des zwölften Jahres ist der Fonds auf 1 reduziert und reicht nun gerade hin, den letzten Todesfall auszuzahlen.

Wenn ein anderer Liquidationsmodus des versicherten Kapitales als der normale vereinbart ist, so sollte die Jahresprämie eine Abänderung — Erhöhung — erfahren; doch wird hiervon meist Umgang genommen [s. Nr. 304, 4]. Nur zur Beurteilung des Einflusses seien einige Zahlenwerte angeführt. Bei jährlicher, semestraler, sofortiger Auszahlung beträgt die Jahresprämie für eine 35-jährige Person nach Tafel VIII (s. Nr. 277—278) beziehungsweise

$$0{,}02068, \quad 0{,}02086, \quad 0{,}02104,$$

so daß bei einem versicherten Kapital von 1000 eine Prämie von

$$20{,}68, \quad 20{,}86, \quad 21{,}04$$

zu zahlen wäre.

Entsprechend den Fortschritten in der Sterblichkeitsmessung kommen in neuerer Zeit verschärfte Rechnungsweisen in Aufnahme, bei denen auch dem Moment der unmittelbaren Auszahlung des versicherten Kapitales Ausdruck verliehen wird; insbesondere aber wird auf den Einfluß der Selektion Rücksicht genommen entweder durch die Benutzung einer zweifach abgestuften oder einer einfach abgestuften Tafel, bei der die Wirkung der ersten Jahre nach Abschluß der Versicherung ausgeschaltet ist. Um zu zeigen, in welchem Maße die Versicherungswerte und Prämien von der Wahl der Grundlagen abhängen, sind in der folgenden Tabelle die Leibrentenwerte, die Werte der lebenslänglichen Todesfallversicherung und der für sie entfallenden lebenslänglich zu zahlenden Jahresprämie nach den Tafeln O^M, $O^{M(5)}$ und $O^{[M]}$ bei $3\frac{1}{2}\%$-iger Rechnung angegeben.

Alter	O^M			$O^{M(5)}$			$O^{[M]}$			Eintrittsalter
x	a_x	A_x	P_x	a_x	A_x	P_x	$a_{[x]}$	$A_{[x]}$	$P_{[x]}$	$[x]$
20	21,808	0,26254	0,01204	21,299	0,24977	0,01314	21,521	0,27224	0,01265	20
30	19,769	,33150	,01677	19,542	,33915	,01735	19,793	,33067	,01671	30
40	17,298	,41506	,02400	17,204	,41823	,02431	17,511	,40784	,02329	40
50	14,330	,51541	,03597	14,282	,51704	,03620	14,693	,50314	,03424	50
60	10,972	,62897	,05733	10,953	,62962	,05748	11,525	,61027	,05295	60
70	7,616	,74245	,09749	7,614	,74252	,09753	8,371	,71691	,08564	70
80	4,771	,83869	,17580	4,770	,83869	,17581				
90	2,773	,90623	,32682	2,773	,90623	,32682				
100	1,547	,94779	,61262	1,547	,94779	,61262				

Es führt $O^{M(5)}$ zu den höchsten Werten von A_x und P_x, $O^{[M]}$ zu den niedrigsten Werten von $A_{[x]}$, $P_{[x]}$, wenn man vom niedrigsten in der Tabelle angeführten Alter absieht. Aber die Differenzen zwischen O^M und $O^{M(5)}$ nehmen mit steigendem Alter ab und verschwinden schließlich ganz, während die Differenzen dieser zwei Tafeln gegen $O^{[M]}$ mit wachsendem Alter zunehmen. Noch deutlicher wird das gegenseitige Verhältnis der drei Tafeln, wenn man die A_x, P_x aus $O^{M(5)}$ und die $A_{[x]}$, $P_{[x]}$ in Prozenten der aus O^M stammenden Zahlen ausdrückt; es beträgt bei

Alter	A_x	P_x	$A_{[x]}$	$P_{[x]}$
30	102,31	103,46	99,75	99,64
40	100,76	101,25	98,26	97,04
50	100,32	100,64	97,62	95,19
60	100,10	100,26	97,02	92,36

307. Einige Beispiele von Jahresprämien. Das in Nr. 305 erläuterte allgemeine Prinzip der Bestimmung der jährlichen Prämie wird im nachfolgenden auf einige wichtige Versicherungsformen zur Anwendung gebracht.

1. *Jahresprämie für eine um n Jahre aufgeschobene Leibrente 1, zahlbar während der Aufschubzeit (Altersrente).*

Der Wert der Versicherung ist

$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämienzahlung

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

daraus ergibt sich

$$P_x = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{8}$$

Beispielsweise ist nach Tafel VIII

$$|_{30}P_{30} = \frac{80\,839{,}8}{621\,199 - 80\,839{,}8} = 0{,}15242,$$

so daß für eine Rente von 500 durch 30 Jahre 76,21 jährlich zu zahlen wären.

2. *Jahresprämie für eine Erlebensversicherung.*

Ist (x) auf das Kapital 1, zahlbar nach n Jahren im Erlebensfalle, versichert, so ist

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

der Wert dieser Versicherung; soll die jährliche Prämie P_x durch die Versicherungsdauer gezahlt werden, so ist der Wert hiervon

$$P_x \cdot |_n\mathfrak{a}_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

folglich ist

$$P_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{9}$$

Beispielsweise hat man nach Tafel VIII

$$|_{10}P_{20} = \frac{31\,953}{1\,025\,625 - 621\,199} = 0{,}079008;$$

für ein Kapital von 10000 wäre also durch 10 Jahre die jährliche Prämie von 790,08 zu bezahlen. Legte die Person die Prämien, statt sie in der Versicherungsanstalt einzuzahlen, in einer den rechnungsmäßigen Zinsfuß $3\frac{1}{2}\%$ gewährenden Sparkasse auf Zinseszins an, so erhielt sie bei Vollendung des 30. Lebensjahres 9592,75 *M*; durch die Versicherung sind also 417,25 *M* gewonnen.

3. *Jahresprämie für eine Todesfallversicherung bei abgekürzter Prämienzahlung.*

Soll die Prämienzahlung bei dem Alter t aufhören, so steht dem Werte

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

der Versicherung der Wert der Prämienzahlung:

$$P_x \cdot |_{t-x}\mathfrak{a}_x = \frac{N_x - N_t}{D_x} P_x$$

gegenüber; die erforderliche Prämie ist also

$$P_x = \frac{M_x}{N_x - N_t}. \tag{10}$$

Für einen 35-jährigen z. B. beträgt dies, wenn die letzte Prämie bei Antritt des 70. Jahres gezahlt werden soll, nach Tafel VIII

$$|_{35}P_{35} = \frac{9805{,}72}{474\,131 - 25\,527{,}8} = 0{,}02186,$$

so daß bei 1000 versichertem Kapital die jährliche Prämie 21,86 ausmacht.

4. *Jahresprämie für eine Todesfallversicherung bei n-jähriger Karenz und lebenslänglicher Prämienzahlung.*

Der Wert der Versicherung ist

$$_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämienzahlung

$$P_x \cdot a_x = \frac{N_x}{D_x} P_x;$$

mithin ist

$$P_x = \frac{M_{x+n}}{N_x}. \tag{11}$$

Bei 10-jähriger Karenz ist beispielsweise nach Tafel VIII:

$$P_{35} = \frac{7769{,}87}{474\,131} = 0{,}01639.$$

5. *Jahresprämie für eine kurze Todesfallversicherung, zahlbar bis zum Tode, längstens durch die Versicherungsdauer.*

Beträgt diese n Jahre, so ist

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

der Wert der Versicherung und

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

der Wert der Prämienzahlung; daraus folgt

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{12}$$

Bei dieser Versicherung kommt das Kapital, wenn der Tod innerhalb n Jahren erfolgt, am Ende des Sterbejahres zur Auszahlung.

Die Versicherung kann aber auch so abgeschlossen werden, daß das Kapital zu *bestimmtem Termin*, also nach n Jahren ausgefolgt wird, vorausgesetzt, daß die versicherte Person vorher starb. Unter dieser Voraussetzung ist der Wert der Versicherung

$$v^n (1 - {}_np_x) = \frac{v^n D_x - D_{x+n}}{D_x},$$

der Wert der Prämienzahlung derselbe wie vorhin, die Prämie also

$$P_x = \frac{v^n D_x - D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{13}$$

6. *Jahresprämie für eine gemischte Versicherung.*

Die Versicherungsdauer betrage n Jahre, und dies sei auch die längste Dauer der Prämienzahlung. Nach Nr. 270 ist

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = 1 - d_{|n}a_x$$

der Wert der Versicherung, jener der Prämienzahlung beträgt

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

die Prämie hat also den Ausdruck

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{14}$$

oder

$$P_x = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d. \tag{15}$$

In der ersten Form erscheint sie als Summe der Prämien für eine kurze Todesfallversicherung und eine Erlebensversicherung; die erste Komponente hat eine Abänderung zu erfahren, wenn für den Fall des Ablebens sofortige Zahlung der versicherten Summe bedungen ist; man kann dann P_x nach der Formel

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} (1+i)^{\frac{1}{2}} + \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

rechnen, wenn man nicht schon in der Bildung der Kolumnen C_x, M_x dem Umstand der sofortigen Zahlung Rechnung getragen hat, wie dies am Schlusse von Nr. 277 bemerkt worden ist.

Nach dem an dieser Stelle erklärten Vorgange schreibt sich die Jahresprämie für die gemischte Versicherung, wenn der Rechnung eine zweifach abgestufte Tafel zugrunde gelegt und die sofortige Zahlung im Falle des Todes berücksichtigt wird:

$$P_x = \frac{\overline{M}_{[x]} - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{N_{[x]} - N_{x+n}}; \tag{14*}$$

dabei ist vorausgesetzt, daß die Versicherungsdauer n den Umfang der Vorperiode, auf welche die Selekttafel angelegt ist, übertrifft, so daß die Zahlen D_{x+n}, N_{x+n}, $\overline{M}_{x+n}$ aus der Schlußtafel stammen.

Tafel VIIa enthält in der Kolonne $10^3\, P_{x,\overline{n}|}$ die Jahresprämien für die gemischte Versicherung zu den Schlußaltern oder Zielen $x + n = 50, 55, 60, 65$ auf Grund der Sterbetafel AH_G^M aus den Beobachtungen an österreichischen und ungarischen, auf diese Kombination versicherten männlichen Personen zu $3\frac{1}{2}\%$, wenn 1000 die versicherte Summe ist. Hiernach hat eine 30-jährige Person, die die Versicherung zum 65. Lebensjahre, also auf die Dauer von 35 Jahren abschließt, eine Nettoprämie von 19,95 zu zahlen.

7. *Jahresprämie für eine Versicherung mit bestimmter Verfallzeit.*

Nach Nr. 271 ist der Wert einer derartigen, auf n Jahre abgeschlossenen Versicherung

$$A_{\overline{n|}} = v^n;$$

wird jährliche Prämienzahlung bis zum Tode oder längstens durch die Versicherungsdauer bedungen, so ist deren Wert

$$P_x \cdot {}_{|n}a_x = P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x};$$

die Prämie hat also zu betragen

$$P_x = \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+n}}. \tag{16}$$

Diese Versicherung ist die Umkehrung der Versicherung auf eine kurze Rente gegen einmalige Prämie, nur daß letztere von der Versicherungsanstalt und am Schlusse der Versicherungsdauer gezahlt wird.

8. *Prämie für eine gegenseitige Überlebensrente, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Der Wert der Rente für die Verbindung (x), (y) ist (Nr. 282)

$$a_{\overset{[1]}{xy}} = a_x + a_y - 2a_{xy},$$

der Wert der Prämienzahlung

$$P \cdot a_{xy},$$

die Jahresprämie also

$$P = \frac{a_x + a_y}{a_{xy}} - 2. \tag{17}$$

Nach dem in der zitierten Nummer gerechneten Beispiel ist

$$a_{30,45} = 14{,}023$$
$$a_{30} = 19{,}441$$
$$a_{45} = 15{,}706,$$

folglich

$$P = \frac{35{,}147}{14{,}023} - 2 = 0{,}50638.$$

9. *Jahresprämie für eine einseitige Überlebensrente, zahlbar durch die Dauer der Verbindung (Witwen- und Waisenpension).*

Aus dem Werte der Rente:

$$a_{y|x} = a_x - a_{xy}$$

und dem gleichen Werte der Prämienzahlung wie vorhin berechnet sich die jährlich zu zahlende Prämie

$$P = \frac{a_x}{a_{xy}} - 1. \tag{18}$$

Ein Ehepaar, der Mann 45, die Frau 30 Jahre alt, hätte also durch die Zeit seines Zusammenlebens eine jährliche Prämie von

$$P = 800\left(\frac{19{,}441}{14{,}023} - 1\right) = 800 \cdot 0{,}38636 = 309{,}09$$

zu erlegen, damit der Frau nach dem eventuell früher erfolgenden Tode des Mannes eine Leibrente von 800 zufalle.

10. *Jahresprämie für eine gegenseitige Überlebensversicherung, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Aus dem Werte

$$A_{xy} = 1 - d\,\mathfrak{a}_{xy}$$

der Versicherung [Nr. 286, (86)] und dem Werte

$$P\mathfrak{a}_{xy}$$

der Prämienzahlung folgt

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}_{xy}} - d. \tag{19}$$

11. *Jahresprämie für eine einseitige Überlebensversicherung, zahlbar durch die Dauer der Verbindung.*

Nach der in Nr. 290 entwickelten Näherungsformel (93) wäre

$$A^1_{xy} = 1 + \frac{D_{y+1}}{D_y}\,\mathfrak{a}_{x,y+1} - \mathfrak{a}_{xy}$$

der Wert der Versicherung, dem $P\mathfrak{a}_{xy}$ als Wert der Prämienzahlung gegenübersteht; daraus ergibt sich

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}_{xy}} + \frac{D_{x+y}}{D_y}\,\frac{\mathfrak{a}_{x,y+1}}{\mathfrak{a}_{xy}} - 1. \tag{20}$$

Benutzt man aber die strenge Formel (94), Nr. 290 für A^1_{xy}, so wird

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathfrak{a}_{xy}} - d + \frac{\mathfrak{a}_{x-1,y} - 1}{p_{x-1}\,\mathfrak{a}_{xy}} - \frac{\mathfrak{a}_{x,y-1} - 1}{p_{y-1}\,\mathfrak{a}_{xy}}\right]. \tag{21}$$

Dem an der angezogenen Stelle gerechneten Falle zufolge ergäbe sich als Jahresprämie für die Verbindung einer 35-jährigen mit einer 25-jährigen Person, wenn das Kapital 1 am Ende des Sterbejahres der ersten zur Auszahlung kommen soll, falls die zweite sie überlebt, nach Formel (20):

$$P = \frac{0{,}223}{16{,}264} = 0{,}013711,$$

nach Formel (21):

$$P = \frac{0{,}236}{16{,}264} = 0{,}014510.$$

12. *Jahresprämie, zahlbar während der Aktivität, für die Anwartschaft auf eine Invalidenrente.*

In Nr. 295 ist für die Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenrente ein Ausdruck von der Form

$${}^{ai}\mathfrak{a}_x = \frac{N^{ai}_x}{D^a_x}$$

gefunden worden; für N_x^{ai} ist je nach der gewünschten Strenge und nach dem Auszahlungsmodus der Rente einer der dort durch die Gleichungen (7) bis (7***) gekennzeichneten Werte zu nehmen. Der Wert der Prämienzahlung drückt sich durch $P_x {}^a\mathrm{a}_x = P_x \frac{N_x^a}{D_x^a}$ aus; mithin hat die Prämie

$$P_x = \frac{\mathrm{N}_x^{ai}}{N_x^a} \tag{22}$$

zu betragen.

Sind die Invaliditätsanwartschaften und die Aktivitätsrenten selbst gerechnet, so ergibt sich P_x mittels Division von ${}^{ai}\mathrm{a}_x$ durch ${}^a\mathrm{a}_x$. Mit Hilfe der Tafeln IX und X findet man beispielsweise die zur Begründung einer Invalidenrente von 600 erforderliche Jahresprämie, wenn 30 das Eintrittsalter ist,

$$P_{30} = 600 \cdot \frac{1{,}92356}{16{,}8525} = 68{,}48;$$

dabei ist bezüglich der Prämie monatliche Zahlung vorausgesetzt.

308. Prämie bei Einbeziehung der Invalidität. In neuerer Zeit wird die Lebensversicherung in eigenartiger, den Bedürfnissen vieler Kreise entgegenkommender Weise mit der Invalidität in Verbindung gebracht: Um für den Fall eintretender Berufsunfähigkeit vor der Notwendigkeit des Aufgebens einer Lebensversicherung zu bewahren, wird die Prämie von Anfang an so eingerichtet, daß bei Eintritt der Invalidität jede weitere Prämienzahlung aufhört. Neben dieser Form kommt auch noch eine zweite vor, bei der dem Versicherten überdies für die Dauer der Invalidität eine bescheidene im Verhältnis zur versicherten Summe festgesetzte Rente ausbezahlt wird. Diese Invaliditätszusatzversicherung wird vornehmlich an die gemischte, wohl auch an die lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung angeschlossen.

Wenn wir den Fall der bloßen Enthebung von fernerer Prämienzahlung ins Auge fassen, so besteht der Unterschied darin, daß sich nun die Prämienzahlung nicht mehr auf eine Leibrente, sondern auf eine Aktivitätsrente zu stützen hat. Die dazu erforderliche Aktivitätsordnung wird dann, nachdem bezüglich der Invaliditätswahrscheinlichkeiten eine Wahl getroffen worden, aus *der* Sterblichkeitstafel abgeleitet, auf die sich die Hauptversicherung gründet.

Es bezeichne w_x' zum Unterschiede von der bisherigen Auffassung (Nr. 249) die Invaliditätswahrscheinlichkeit unter dem Gesichtspunkte, daß unter den Aktiven keine Sterblichkeit herrscht, daß also die aktiv gestorbenen als Austretende behandelt werden, die „reine oder unabhängige“ Invaliditätswahrscheinlichkeit, bei deren Anwendung das Invalidwerden und Sterben voneinander unabhängige Ereignisse sind;

ferner werde angenommen, daß die Invaliden dieselbe Sterblichkeit aufweisen, wie die Aktiven, nämlich die Sterblichkeit der zugrunde gelegten Sterbetafel; dann wird sich, wenn man bei dem Alter x nur Aktive voraussetzt und demgemäß A_x mit l_x' übereinstimmen läßt, die Abfallsordnung der Aktiven nach der Formel

$$A_{x+\nu+1} = A_{x+\nu}\, p_{x+\nu}(1 - w'_{x+\nu}) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{α}$$

berechnen.

Dies gilt, wenn es sich um eine Aggregattafel handelt. Wird aber zur Prämienbemessung eine Selekttafel verwendet, dann dient die Formel (α) zunächst zur Ableitung der *Schluß*tafel, die der Schlußtafel der Selekttafel entspricht; von dieser aus wird dann der übrige Teil der zweifach abgestuften Aktivenordnung, wenn 10 Anfangsjahre unterschieden sind, nach folgenden Formeln vor sich gehen:

$$\begin{aligned} A_{[x]+9} &= \frac{A_{x+10}}{p_{[x]+9}\left(1 - w'_{x+9}\right)} \\ A_{[x]+8} &= \frac{A_{[x]+9}}{p_{[x]+8}\left(1 - w'_{x+8}\right)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{[x]} &= \frac{A_{[x]+1}}{p_{[x]}\left(1 - w'_x\right)}; \end{aligned} \tag{β}$$

darin ist die erste Zahl, A_{x+10}, der Schlußtafel entnommen, die bei dieser Anordnung für *alle* Eintrittsalter gemeinsam gilt[1]).

Auf Grund der Aktivenordnung berechnet man die auf n Jahre abgekürzte Aktivenrente

$$^a\mathrm{a}_x = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a} \quad \text{oder} \quad ^a\mathrm{a}_{[x]} = \frac{N_{[x]}^a - N_{x+n}^a}{D_{[x]}^a} \tag{γ}$$

als Wert der Einheit der Prämienzahlung und damit die Prämie für eine gemischte Versicherung unter der Festsetzung, daß die Prämienzahlung nach eventuellem Eintritt der Invalidität aufzuhören hat:

$$^iP_x = \frac{A_{x,\overline{n}|}}{^a\mathrm{a}_x} \quad \text{oder} \quad ^iP_{[x]} = \frac{A_{[x],\overline{n}|}}{^a\mathrm{a}_{[x]}}, \tag{23}$$

je nachdem mit einer Aggregat- oder einer Selekttafel gerechnet wird. Vergleicht man diese Prämien mit den normalen Prämien P_x, $P_{[x]}$ für dieselbe Hauptversicherung, so geben die Differenzen $^iP_x - P_x$, $^iP_{[x]} - P_{[x]}$ die Zuschlagsprämie für die zugestandene Prämienfreiheit im Falle der Invalidität. Die verhältnismäßige Kleinheit dieser Zuschlagsprämie läßt die Kombination als zweckmäßig erscheinen; sie beträgt beispiels-

1) Vgl. J. Karup, Die Reform des Rechnungswesens etc., Jena 1903, p. 90 und Tab. 19 u. 20.

weise (netto) nach den neuen Tarifen der Gothaer Bank[1]) bei 1000 Versicherungssumme und den Fälligkeitsaltern

	50	55	60
für $x = 25$	0,65	0,81	1,03
„ $x = 30$	1,00	1,24	1,56
„ $x = 35$	1,61	1,96	2,42
„ $x = 40$	2,46	3,01	3,72.

Ist für den Fall der Invalidität auch eine Rente von $\mathfrak{p}$ Prozent der versicherten Summe zugesichert, so kommt zu $A_{x.\overline{n}|}$ noch der Wert der Anwartschaft auf eine Invalidenrente im Betrage $\frac{\mathfrak{p}}{100}$ hinzu.

309. Unterjährige Prämienzahlung. Um dem Versicherungsnehmer die Abtragung seiner Verpflichtung gegenüber dem Versicherer noch weiter zu erleichtern, wird die ratenweise Bezahlung der Jahresprämie gewährt; allerdings erfordert dies eine Erhöhung der jährlichen Zahlung gegenüber der normalen Jahresprämie, die unter der Voraussetzung gerechnet ist, daß sie jedesmal am Beginne des Versicherungsjahres voll erlegt wird.

Betrachtet man z. B. bei der Todesfallversicherung die im Sterbejahre noch nicht bezahlten Prämienraten als *gestundet* und bringt sie bei Auszahlung des versicherten Kapitales in Abzug, so besteht die einzige Folge der unterjährigen Prämienzahlung in einem Zinsverlust, der durch eine entsprechende Erhöhung der jährlichen Zahlung hereingebracht werden muß.

Es sei P die normale, $P^{(m)}$ die in m gleichen Raten zahlbare Jahresprämie. Die letztere ergibt sich aus der Erwägung, daß die auf den Jahresbeginn diskontierten Raten zusammen die normale Prämie P ergeben müssen; die Diskontierung vollzieht man dabei zu einem höheren Zinsfuße i' als derjenige, der sonst zur Grundlage genommen ist. Man hat also den Ansatz:

$$P = \frac{P^{(m)}}{m}\left[1 + v'^{\frac{1}{m}} + v'^{\frac{2}{m}} + \cdots + v'^{\frac{m-1}{m}}\right]$$

$$= \frac{P^{(m)}}{m}\,\frac{1 - v'}{1 - v'^{\frac{1}{m}}} = \frac{P^{(m)}}{m}\,\frac{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}}{(1+i')^{\frac{1}{m}} - 1}$$

$$= P^{(m)}\,\frac{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}}{j'_{(m)}},$$

aus welchem sich

$$P^{(m)} = \frac{j'_{(m)}}{d'(1+i')^{\frac{1}{m}}}\,P \tag{24}$$

1) Ibid., Tabelle (5a), p. 25*.

ergibt. Entwickelt man den Koeffizienten von P nach Potenzen von i', so erhält man bis zu Gliedern der zweiten Ordnung

$$1 + \frac{m-1}{2m} i' - \frac{m^2-1}{6m^2} i'^2 + \cdots$$

Bei Anrechnung von 6% Verzugszinsen wegen der ratenweisen Prämienzahlung liefert diese Formel die Ansätze:

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= 1{,}015\, P, \\ P^{(4)} &= 1{,}022\, P, \\ P^{(12)} &= 1{,}026\, P, \\ \bar{P} = P^{(\infty)} &= 1{,}029\, P; \end{aligned} \tag{25}$$

es variiert also der Zuschlag zur normalen Prämie zwischen $1\frac{1}{2}$ und 3% der letzteren.

Um beispielsweise in strenger Rechnung die in Vierteljahrsraten zahlbare Prämie zu finden, die eine 35-jährige Person für die lebenslängliche Todesfallversicherung auf 10000 bei sofortiger Liquidierung des Kapitales zahlen müßte, hat man die am Schlusse von Nr. 306 mit 210,40 ermittelte normale Prämie 1,022 zu multiplizieren; dies gibt 215,03. Das wäre die Nettoprämie; wird auf diese ein 12%-iger Zuschlag erhoben, so beträgt die Jahresbruttoprämie 240,83, die Quartalsrate also 60,21.

Man kann die unterjährige Prämienzahlung auch in dem Sinne verstehen, daß in jenem Jahre, in welchem der Tod, die Invalidität oder dgl. eintritt, nur die vor diesem Ereignis fälligen Raten bezahlt werden; die Prämienzahlung ist dann als eine an die Anstalt gezahlte m-tel-Rente zu behandeln. Hiernach ist die in m Raten zahlbare Jahresprämie für eine Todesfallversicherung:

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x^{(m)}}, \tag{26}$$

für eine Versicherung auf Invalidenrente:

$$P_x^{(m)} = \frac{{}^{ai}\mathfrak{a}_x}{{}^{a}\mathfrak{a}_x^{(m)}}. \tag{27}$$

Als erstes Beispiel für eine in diesem Sinne geführte Rechnung, die sich den tatsächlichen Verhältnissen anpaßt, diene die Bestimmung der quartaliter zahlbaren Jahresprämie, die eine 35-jährige Person für eine Todesfallversicherung per 10000 zu zahlen hätte, wenn das Kapital unmittelbar nach dem Ableben zu liquidieren ist; als Grundlage soll Tafel VIII verwendet werden.

Es ist für das Kapital 1

$$P_{35}^{(4)} = \frac{\bar{A}_{35}}{\mathfrak{a}_{35}^{(4)}};$$

nun hat man nach Nr. 278, (61):

$$\bar{A}_{35} = 1{,}0175\, A_{35} = 1{,}0175 \cdot 0{,}37949 = 0{,}38613,$$

und nach der Tabelle in Nr. 273:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{35}^{(4)} &= 1{,}000093\ \mathfrak{a}_{35} - 0{,}38046 \\ &= 1{,}000093 \cdot 18{,}349 - 0{,}38046 \\ &= 17{,}96924; \end{aligned}$$

daher ist

$$P_{35}^{(4)} = \frac{0{,}38613}{17{,}96924} = 0{,}02149;$$

die zu zahlende Nettoprämie beträgt also 214,90 (vgl. das Beispiel in Nr. 306).

An zweiter Stelle soll die monatlich zahlbare Jahresprämie bestimmt werden, die ein 40-jähriger Aktiver für die Anwartschaft auf eine Invalidenrente von 500 nach den Grundlagen der Tafeln IX und X zu zahlen hätte.

Für die Rente 1 ist die Prämie

$$P_{40}^{(12)} = \frac{{}^{ai}\mathfrak{a}_{40}}{{}^{a}\mathfrak{a}_{40}^{(12)}} = \frac{2{,}64042}{13{,}5721} = 0{,}19455$$

zu zahlen, für 500 also die Jahresprämie 97,28 in Monatsraten zu 8,11.

§ 2. Veränderliche Prämien.

310. Allgemeines über variable Prämien. Natürliche Prämienzahlung. Theoretisch ist jede Prämienzahlung zulässig, bei der Leistung und Gegenleistung dem Barwerte nach gleich sind; dem wäre auch praktisch so, wenn jeder Versicherungsnehmer verhalten werden könnte, den Versicherungsvertrag bis zu dessen natürlichem Ablaufe einzulösen.

In Wirklichkeit gibt es jedoch neben dem normalen, mit der Erreichung des Zwecks verbundenen Ablauf der Versicherungen einen nicht normalen, den man, welches auch die Veranlassung sein und wie sich seine endgültige Abwicklung gestalten möge, mit dem zusammenfassenden Namen *Storno* bezeichnet. Dieser Umstand führt zu einer Einschränkung der theoretisch möglichen Prämienzahlungsmodalitäten dahin, daß nur solche praktisch verwertbar sind, *bei welchen die versichernde Anstalt in keinem Stadium dem Versicherungsnehmer gegenüber im Vorschusse ist.* Indessen wird in neuerer Zeit diesem Grundsatz nicht unbedingte Geltung eingeräumt (vgl. Nr. 333).

Die Ausführung dieses Grundsatzes verlangt, daß Schadenzahlung niemals vor der Prämienzahlung beginnt, und daß zu jeder Zeit die

bezahlten (Netto-) Prämien, die bis dahin aufgelaufenen Schäden zum mindesten decken. Die Nichteinhaltung dieser Forderung hätte im Falle des Aufgebens einer Versicherung einen Schaden für die Anstalt zur Folge, weil auf die stornierte Polize weniger eingezahlt worden wäre, als sie rechnungsmäßig zu den mittlerweile ausgezahlten Versicherungssummen hätte beitragen sollen. Und eine Prämienzahlungsweise, welche dem obigen Grundsatze nicht genügt, gäbe geradezu den Anreiz zum Aufgeben der Versicherung; denn der Austretende könnte sich sofort die gleichen Vorteile bei einer andern Anstalt, die nach denselben oder gar nach günstigeren Grundlagen rechnet, billiger erkaufen.

Bei Versicherungen, bei denen mit der Auszahlung erst zu einem späteren bestimmten Zeitpunkte begonnen wird, wie bei aufgeschobenen Renten und Todesfallversicherungen, bei Erlebensversicherungen, wäre gegen eine spätere Aufnahme der Prämienzahlung nichts einzuwenden, wenn es überhaupt einen Sinn hätte, eine Versicherung abzuschließen, ohne auch gleich mit der Prämienzahlung anzufangen.

Anders bei Versicherungen, bei welchen unmittelbar nach dem Abschluß auch schon Auszahlungen eintreten können, wie bei Todesfall- und gemischten Versicherungen. Hier *muß* auch die Prämienzahlung sofort aufgenommen und in einem Tempo geführt werden, daß der obige Grundsatz beständig gewahrt bleibe.

Einen Maßstab für dieses Tempo bietet die *natürliche Prämienzahlung*. Unter der *natürlichen Prämie*, die eine Person (x) für eine bestimmte Versicherung zu zahlen hat, versteht man die der Versicherung auf ein Jahr entsprechende Prämie, durch die also die Schäden des nächstfolgenden Jahres gedeckt werden. In diesem Belange ist die natürliche Prämie der *Umlage* analog, nur daß jene im voraus bemessen und bezahlt, diese aber erst am Schlusse des Jahres nach Maßgabe der wirklich eingetretenen Schäden auf die Versicherten überwälzt wird.

Die natürliche Prämie eines x-jährigen für eine Todesfallversicherung auf das Kapital 1, zahlbar am Ende des Sterbejahres, beträgt

$$v q_x = v \frac{d_x}{l_x} = \frac{C_x}{D_x}; \tag{28}$$

sie variiert mit dem Alter wie die Sterbenswahrscheinlichkeit. Will ein x-jähriger sich durch natürliche Prämienzahlung versichern, so hat er, so lange er lebt, der Reihe nach die Prämien

$$v q_x, \quad v q_{x+1}, \quad v q_{x+2}, \cdots$$

zu zahlen. Der Wert dieser Anwartschaften bei Abschluß der Versicherung ist

$$vq_x + v^2 q_{x+1}\; {}_1p_x + v_3 q_{x+2}\; {}_2p_x + \cdots$$
$$= v\frac{d_x}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^3 \frac{d_{x+2}}{l_{x+2}} \frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$
$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} = A_x,$$

also tatsächlich gleich dem Werte der Versicherung.

Für eine gemischte, auf n Jahre lautende Versicherung hätte ein x-jähriger der Reihe nach die natürlichen Prämien

$$vq_x,\quad vq_{x+1},\quad vq_{x+2}, \cdots\quad vq_{x+n-2},\quad v$$

zu zahlen; denn im letzten Jahre kommt das Kapital, wenn es nicht schon früher fällig wurde, sicher zur Auszahlung; der Wert dieser zu erwartenden Prämienzahlungen ist

$$vq_x + v^2 q_{x+1}\; {}_1p_x + v^3 q_{x+2}\; {}_2p_x + \cdots + v^{n-1} q_{x+n-2}\; {}_{n-2}p_x + v^n\; {}_{n-1}p_x$$
$$= v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1}\frac{d_{x+n-2}}{l_x} + v^n\frac{l_{x+n-1}}{l_x};$$

ersetzt man l_{x+n-1} durch $d_{x+n-1} + l_{x+n}$, so verwandelt sich dies in

$$\frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

also in den Barwert der Versicherung.

Soll eine Prämienzahlung dem im Eingange aufgestellten Grundsatze genügen, so muß in *jedem* Zeitpunkte die Summe der auf ihn reduzierten Prämienzahlungen die Summe der auf denselben Augenblick reduzierten natürlichen Prämien übertreffen oder ihr mindestens gleichkommen.

Die natürliche Prämienzahlung wird, von einigen amerikanischen Gesellschaften abgesehen, in der Lebensversicherung nur wenig geübt; dagegen ist sie bei der Realversicherung das herrschende Prinzip.

311. Abgestufte Prämien. In den Geschäftsplänen mancher Versicherungsunternehmungen kommen neben konstanten auch abgestufte Prämien vor. Der Grund für diese Wahl der Prämienabtragung liegt in mancherlei Motiven: man will die Prämienzahlung mit der Gewinnverteilung in einen zweckmäßigen Konnex bringen, will den verschiedenen wirtschaftlichen Verhältnissen der Versicherungswerber entgegenkommen und will schließlich für die Deckung gewisser Verwaltungsauslagen planmäßig vorsorgen.

Die Abstufung besteht zumeist darin, daß man nach einer gewissen Anfangsperiode die Prämie erhöht oder erniedrigt, daß man also mit kleinen Prämien anfängt und mit großen Prämien schließt oder den umgekehrten Modus wählt.

Einige an die Praxis sich anlehnende Beispiele werden diese Art der Prämienbestimmung am besten verdeutlichen.

Angenommen, für eine lebenslängliche Todesfallversicherung, die eine Person (x) auf ihr Leben abschließt, werde durch die ersten fünf Jahre eine Prämie ${}_{|5}P_x$, durch die ganze folgende Zeit die Prämie ${}_{5|}P_x$ gezahlt; dann gilt der Ansatz:

$$A_x = {}_{|5}P_{x\,|5}\mathfrak{a}_x + {}_{5|}P_{x\,5|}\mathfrak{a}_x, \tag{29}$$

aus dem sich nach Annahme der einen Prämie die andere oder nach Annahme ihrer Differenz beide bestimmen lassen. Setzt man

$${}_{5|}P_x = {}_{|5}P_x + \varDelta_x, \tag{30}$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}_{|5}P_x &= \frac{A_x - \varDelta_{x\,5|}\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x} \\ {}_{5|}P_x &= \frac{A_x + \varDelta_{x\,|5}\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x}; \end{aligned} \tag{31}$$

bei $\varDelta_x > 0$ findet ein Übergang von niedrigen zu hohen, bei $\varDelta_x < 0$ ein Übergang von hohen zu niedrigen Prämien statt.

Ist insbesondere die Bestimmung getroffen, daß sich bei allen Altern nach 5 Jahren die bis dahin gezahlte niedrige Prämie um einen bestimmten Bruchteil Θ ihres Betrages erhöht, so ist

$$\varDelta_x = \Theta_{|5}P_x$$

und es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} {}_{|5}P_x &= \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x + \Theta_{5|}\mathfrak{a}_x} = \frac{M_x}{N_x + \Theta N_{x+5}}, \\ {}_{5|}P_x &= (1 + \Theta)_{|5}P_x. \end{aligned} \tag{32}$$

Unter derselben Voraussetzung schreiben sich die Prämien für eine gemischte Versicherung mit der Laufzeit n:

$$\begin{aligned} {}_{|5}P_x &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} + \Theta N_{x+5}} \\ {}_{5|}P_x &= (1 + \Theta)_{|5}P_x. \end{aligned} \tag{33}$$

Ändert man in diesen Formeln das Vorzeichen von Θ, so hat man es mit großer Anfangs- und kleiner Schlußprämie zu tun.

Die Erhöhung oder Erniedrigung kann aber auch zur versicherten Summe in ein festes Verhältnis gebracht werden; bestimmt man z. B., daß sich die Prämie vom 6. Jahre an um $3\,^0\!/_{00}$ der versicherten Summe erniedrigen soll, so ist

$$\varDelta_x = -0{,}003$$

und die Formeln (31) geben für eine gemischte Versicherung mit der Laufzeit n:

$$\begin{aligned} {}_{|5}P_x &= \frac{A_{x,\overline{n|}} + 0{,}003\,{}_{5|}\mathfrak{a}_x}{{}_{|n}\mathfrak{a}_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + 0{,}003\,N_{x+5}}{N_x - N_{x+n}} \\ {}_{5|}P_x &= {}_{|5}P_x - 0{,}003. \end{aligned} \tag{34}$$

Um ein ziffermäßiges Beispiel für diese verschiedenen Zahlungsmodalitäten zu geben, sei eine gemischte Versicherung vom 30. zum 60. Lebensjahr gerechnet einmal für gleichbleibende Prämienzahlung, dann für den Fall, daß sich nach 5 Jahren die Prämie um 20% erhöht, endlich unter der Annahme, daß sie sich nach 5 Jahren um 3‰ des Kapitals ermäßigt. Mit den Grundlagen der Tafel VIII hat man:

für den ersten Modus $\frac{13679,86}{540359,2} = 0,025316$

für den zweiten Modus $\frac{13679,86}{635185,4} = 0,021540$ Anfangs-, 0,025848 Endprämie,

für den dritten Modus $\frac{15102,253}{540359,2} = 0,027948$ Anfangs-, 0,024948 Endprämie; bei einer Versicherungssumme von 1000 ist also nach dem ersten Modus konstant 25,32, nach dem zweiten Modus durch fünf Jahre 21,54, dann 25,85, nach dem dritten Modus durch fünf Jahre 27,95, von da ab 24,95 zu zahlen.

§ 3. Prämienrückgewähr.

312. Allgemeine Bemerkungen. Die Versicherungskombinationen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: bei den einen kommt es unbedingt zu Leistungen des Versicherers an den Versicherten, bei den andern tritt dies nur bedingt ein.

Bei den Versicherungen der zweiten Gruppe kann es also vorkommen, daß der Versicherte Einzahlungen leistet, ohne hierfür eine Gegenleistung zu empfangen: der Laie erblickt in einem solchen Geschäfte ein Glücksspiel, auf einen Gewinn des Unternehmers angelegt. Um einen solchen negativen Erfolg der Versicherung zu vermeiden, verbindet man mit ihr die (volle oder teilweise) *Rückgewähr* der eingezahlten Prämien für den Fall, daß der eigentliche Versicherungszweck nicht erreicht wird. Hierdurch wird also eine Versicherung der zweiten Gruppe in eine der ersten Gruppe umgewandelt.

Es kommt aber auch vor, daß man Versicherungen der ersten Gruppe mit Prämienrückgewähr ausstattet; sie hat hier hauptsächlich den Zweck, den Anreiz zum Versichern zu erhöhen.

Die Prämienrückgewähr begegnet häufig der irrtümlichen Auffassung, als ob sie dazu bestimmt wäre, den Versicherten vor „Schaden“ zu bewahren. In Wirklichkeit aber ist sie nichts anderes als eine neben der Hauptversicherung einhergehende zweite Versicherung, die nach denselben Grundsätzen berechnet wird und bezahlt werden muß wie jene. Bei jeder Versicherung muß es, nachdem alle Geschäfte abgewickelt sind, eine Gruppe Versicherter geben, die einen „Schaden“ erlitten, d. h. unter Einrechnung der Zinseszinsen mehr eingezahlt als

empfangen haben, der eine zweite Gruppe anderer gegenübersteht, die von der Versicherung einen effektiven „Nutzen“ hatten. Von diesem retrospektiven Standpunkte darf aber das Versicherungswesen, als eine Institution zur *Vorsorge für die ungewisse Zukunft*, überhaupt nicht betrachtet und beurteilt werden. Wohl aber kann man sagen, daß eine Kombination mit Prämienrückgewähr, je weiter diese geht, sich umso weiter von dem Wesen einer Versicherung entfernt und dem Charakter einer bloßen Verwaltung der eingezahlten Gelder nähert. Das wirtschaftliche Moment kann dann erheblich zurücktreten, ja geradezu fraglich werden, und die Berechtigung nur noch in dem moralischen Zwange zum Sparen erblickt werden.

Die Rückerstattung der Prämien erfolgt in mannigfachen Formen. Die wirklich eingezahlten Prämien werden zur Gänze oder zu einem im voraus festgesetzten Teile, unverzinst oder selbst mäßig verzinst, ersetzt; ihre Rückzahlung erfolgt entweder, sobald die Nichterreichung des eigentlichen Versicherungszweckes feststeht, oder erst zu jenem Termine, wo er erreicht worden wäre, bei Versicherungen der ersten Gruppe unter Umständen bei Fälligkeit der Hauptversicherung. Die Rückgewähr bezieht sich ausschließlich auf die Bruttoprämien, weil die Nettoprämien, lediglich für die interne Gebarung maßgebend, im Verkehr mit den Versicherten nicht in Rechnung kommen.

Der übliche Weg zur Bestimmung der Nettoprämie für eine Versicherung mit Einschluß der in bestimmter Weise vereinbarten Prämienrückgewähr besteht in der Bildung eines Ansatzes, dessen eine Seite den Gesamtbarwert der Versicherung, der Hauptversicherung wie der Rückgewähr, dessen andere Seite den Wert der Nettoprämienzahlung darstellt; die erstgenannte Seite enthält die Bruttoprämie, die nach der adoptierten Regel für die Bemessung des Zuschlags durch die Nettoprämie auszudrücken ist, bevor an die Bestimmung der letzteren geschritten wird. In manchen Fällen kann durch eine besondere Auffassung der Sachlage die Lösung leichter herbeigeführt werden. Das wird am besten an einigen Beispielen zu zeigen sein.

313. Beispiele von Prämienrückgewähr. 1. *Erlebensversicherung gegen einmalige Prämienzahlung und Rückgewähr der Prämie im Falle vorzeitigen Todes.*

Eine Person (x) schließe eine Erlebensversicherung auf das Kapital 1 auf n Jahre ab und bedinge die Rückerstattung der geleisteten einmaligen Prämie für den Fall, daß sie vor Erreichung des Alters $x+n$ sterben sollte.

Bezeichnet E die Nettoprämie für die so kombinierte Versicherung, ist $E' = kE + c$ die zugehörige Bruttoprämie, so besteht die Verpflichtung der Anstalti n der Auszahlung der Erlebensversicherung im Betrage 1, eventuell einer kurzen Todesfallversicherung auf die

Summe E'; die Nettogegenleistung des Versicherten in der Prämie E. Hiernach besteht der Ansatz:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} E' = E,$$

woraus nach Substitution des Ausdrucks für E' folgt:

$$E = \frac{D_{x+n} + c(M_x - M_{x+n})}{D_x - k(M_x - M_{x+n})}. \tag{35}$$

Aus E leitet sich nachträglich E' ab. Die Differenz zwischen E und $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ ist die Zusatzprämie für die Rückgewähr. Die Rechnung setzt voraus, daß E', wenn es zur Auszahlung kommt, am Schlusse des Sterbejahres fällig wird.

2. *Aufgeschobene Leibrente gegen einmalige Prämie mit Rückgewähr derselben, wenn innerhalb der Aufschubzeit der Tod eintritt.*

Der Ansatz für diesen Fall unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, daß an die Stelle der Erlebensversicherung $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ die aufgeschobene Rente $\frac{N_{x+n}}{D_x}$ tritt.

3. *Aufgeschobene Leibrente gegen einmalige Prämie mit unbedingter Rückgewähr derselben beim Tode.*

Für die Ableitung der Bruttoprämie aus der Nettoprämie bestehe die Norm $E' = (1 + \varkappa)E$.

Die Verpflichtung des Versicherers besteht aus der aufgeschobenen Leibrente vom Jahresbetrage 1 und aus einer lebenslänglichen Todesfallversicherung auf den Betrag E'; man hat also, da ihr die Nettoverpflichtung E des Versicherten gegenübersteht, die Gleichung:

$$\frac{N_{x+n}}{D_x} + E'A_x = E,$$

die sich in die Form

$$N_{x+n} + (1 + \varkappa)E(D_x - dN_x) = ED_x$$

umsetzen läßt; man erhält also

$$E = \frac{N_{x+n}}{(1+\varkappa)dN_x - \varkappa D_x}. \tag{36}$$

Der Fall läßt auch folgende Auffassung zu. Da der Unternehmer gehalten ist, die Bruttoeinlage E' unbedingt zurückzuerstatten, so muß er mit den jährlichen diskontierten Zinsen dE', die sie trägt und die er durch die ganze Lebensdauer des (x) bezieht, bestreiten den Nettobarwert der aufgeschobenen Rente und den Zuschlag $\varkappa E$ zur Nettoprämie; es muß hiernach die Gleichung bestehen:

$$dE'\mathfrak{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} + \varkappa E,$$

die auch so geschrieben werden kann:

$$(1 + \varkappa) d E N_x = N_{x+n} + \varkappa E D_x;$$

daraus aber folgt für E tatsächlich derselbe Wert wie vorhin.

Aus E leitet man nachträglich E' ab.

4. *Erlebensversicherung gegen jährliche Prämienzahlung während der Versicherungsdauer und Rückgewähr der eingezahlten Prämien im Falle vorzeitigen Todes.*

Die für die ganze Leistung entfallende Nettoprämie heiße P und die Bruttoprämie P' leite sich aus ihr nach der Regel $P' = kP + c$ ab.

Auf der Seite des Versicherers steht nun die Erlebensversicherung auf das Kapital 1 und eine kurze steigende Todesfallversicherung mit dem Anfangsbetrage P' und einer ebenso großen jährlichen Steigerung; auf der Seite des Versicherten der Nettobarwert seiner Prämienzahlung. Dies gibt den Ansatz:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x} P' = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

aus dem sich nach Ersetzung von P' durch $kP + c$ berechnet:

$$P = \frac{D_{x+n} + c\{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}\}}{N_x - N_{x+n} - k\{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}\}}. \tag{37}$$

5. *Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung und Rückerstattung der Hälfte der eingezahlten Prämien bei Ablauf der Prämienzahlung oder im Falle des früheren Todes.*

Es sei (x) für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert gegen eine längstens n Jahre währende Prämienzahlung; erlebt er das Ende dieses Zeitraumes, so wird ihm die Hälfte aller eingezahlten Prämien sofort zurückerstattet; stirbt er vorher, so erhält er außer dem Kapital 1 auch noch die Hälfte der wirklich eingezahlten Prämien.

Zwischen der Nettoprämie P und der Bruttoprämie P' bestehe der Zusammenhang $P' = (1 + \varkappa) P$.

Die Verpflichtung des Versicherers setzt sich zusammen aus der Todesfallversicherung auf das Kapital 1, aus einer mit $\frac{P'}{2}$ beginnenden und jährlich um $\frac{P'}{2}$ steigenden Todesfallversicherung auf n Jahre und schließlich aus einer Erlebensversicherung mit der Dauer n auf $\frac{nP'}{2}$; dem steht der Wert der Nettoprämienzahlung des Versicherten gegenüber. Der Ansatz lautet also:

$$\frac{M_x}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x} \frac{P'}{2} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{nP'}{2} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} P;$$

daraus ergibt sich:

$$P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n} - \frac{1+\varkappa}{2}\{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n} + n D_{x+n}\}}. \tag{38}$$

Auszahlung des Kapitals und Rückerstattung sind dabei am Ende des Sterbejahres gedacht.

6. *Gemischte Versicherung gegen jährliche Prämienzahlung während der Versicherungsdauer mit unbedingter Rückgewähr der Prämien.*

Die Versicherungsdauer betrage n Jahre, die totale Nettoprämie sei P, die Bruttoprämie $P' = (1+\varkappa)P$. Die Verpflichtung des Unternehmers zerfällt in zwei Erlebensversicherungen, die eine auf die Summe 1, die andere auf die Summe nP' lautend, dann in eine auf n Jahre abgekürzte Todesfallversicherung auf das Kapital 1 und in eine mit P' beginnende, jährlich um P' steigende Todesfallversicherung auf n Jahre; all dem steht die Nettoprämienzahlung des Versicherten gegenüber. Dieser Analyse entspricht der Ansatz:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x}(1+nP') + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}P' = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}P,$$

aus dem sich nach Ersetzung von P' durch $(1+\varkappa)P$ ergibt:

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (1+\varkappa)\{R_x - R_{x+n} + n(D_{x+n} - M_{x+n})\}}. \quad (39)$$

Bei $x = 40$, $n = 25$, einem Zuschlag von 12% auf die Nettoprämie und der versicherten Summe 1000 geben die Grundlagen der Tafel VIII

die Nettoprämie $P = 123{,}87$,
die Bruttoprämie $P' = 138{,}73$;

der Versicherte erhält, wenn er das Alter 65 erreicht, $1000 + 25 \cdot 138{,}73 = 4468{,}25$, und sollte er früher sterben, so werden an seine Erben außer dem Kapital 1000 noch die bis dahin bezahlten Prämien ausgefolgt. Von der Nettoprämie entfallen

$$1000\,\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 33{,}78 \text{ auf die Hauptversicherung,}$$

$$138{,}73\,\frac{R_{40} - R_{65} - 25\,M_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 30{,}62 \text{ auf die Rückgewähr im Todesfall,}$$

$$138{,}73\,\frac{D_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 59{,}47 \text{ auf die Rückgewähr im Erlebensfall,}$$

zusammen 123,87.

Das Beispiel zeigt, wie bei einer weitgetriebenen Rückgewähr die Hauptversicherung zurücktritt.

7. *Unmittelbare Leibrente mit Rückerstattung eines bestimmten Bruchteils der kapitalischen Einlage beim Tode des Rentners.*

Diese Kombination soll dem Wunsche Rechnung tragen, daß der Rentner bei seinem Ableben über ein Kapital verfügen kann.

Aus der für die ganze Versicherung erforderlichen Nettoeinlage E werde die Bruttoeinlage E' nach der Formel $E' = (1+\varkappa)E$ abgeleitet.

Der Versicherer hat außer der Zahlung einer nachschüssigen Leibrente vom Betrage 1 auch für eine Todesfallversicherung auf den Betrag $\Theta E'$ $(0 < \Theta \leqq 1)$ aufzukommen; der Versicherte leistet die Nettoeinzahlung E. Der resultierende Ansatz

$$a_x + \Theta E' A_x = E$$

schreibt sich nach Ersetzung von E' auch so:

$$a_x = [1 - (1 + \varkappa)\Theta\{1 - d(a_x + 1)\}]E$$
$$= \left[1 - (1 + \varkappa)\Theta\left\{\frac{1}{1+i} - \frac{i}{1+i}a_x\right\}\right]E,$$

woraus schließlich

$$E = \frac{(1+i)a_x}{1 + i - (1+\varkappa)\Theta(1 - i a_x)} \tag{40}$$

folgt.

Zu einem Grenzfall, der freilich schon den praktischen Boden verläßt, führt die Annahme, die Rückgewähr werde am *Anfang* des Sterbejahres fällig, weshalb A_x durch $(1 + i)A_x$ zu ersetzen ist, sie erstrecke sich ferner auf die ganze Einlage $(\Theta = 1)$ und von einem Zuschlag auf die Nettoprämie werde abgesehen $(\varkappa = 0)$. Die Formel gibt dann die naturgemäße Antwort

$$E = \frac{1}{i},$$

wonach die Einlage der im nachhinein fälligen ewigen Rente gleich zu sein hat. In der Tat, wenn man ein Kapital erlegt, dessen jährlicher Zinsertrag der Rente gleichkommt, so bleibt es — wenn von Verwaltungskosten abgesehen wird — unangetastet und kann bei dem wann immer erfolgenden Tode unverkürzt zurückerstattet werden. Es handelt sich dabei um eine reine Vermögensverwaltung und nicht um ein Versicherungsgeschäft.

8. *Einmalige Überlebensrente, zahlbar an* (y) *vom Tode des* (x) *angefangen, gegen einmalige Prämie und Rückgewähr derselben, wenn* (y) *vor* (x) *sterben sollte.*

Die Nettoprämie sei E, ihr Zusammenhang mit der Bruttoprämie $E' = kE + c$. Die Verpflichtungen des Versicherers bestehen in der Überlebensrente $\mathfrak{a}_{x|y}$ vom Betrage 1, eventuell in einer Überlebensversicherung $A_{x\overset{1}{y}}$ im Betrage E'; die Nettoleistung des Versicherten ist E. Man hat also zu setzen:

$$\mathfrak{a}_{x|y} + A_{x\overset{1}{y}} E' = E$$

und findet daraus

$$E = \frac{\mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{xy} - c A_{x\overset{1}{y}}}{1 - k A_{x\overset{1}{y}}} \tag{41}$$

Es versichere beispielsweise ein 50-jähriger Mann seiner um 10 Jahre jüngeren Frau eine Witwenrente im Jahresbetrage 800, be-

dinge sich aber die Rückerstattung des erlegten Kapitals, wenn die Frau vor ihm sterben sollte.

Nach den Grundlagen der Tafel VIII ist

$$a_{40} = 17{,}104,$$

ferner fand sich in Nr. 290

$$a_{50,40} = 12{,}278,$$

$$A_{50,\overset{1}{40}} = 0{,}19794;$$

mit diesen Elementen und bei der Festsetzung $k = 1{,}06$, $c = 0{,}1$ berechnet sich die Nettoprämie für die Rente 1 mit

$$E = 6{,}1264,$$

die Bruttoprämie mit

$$E' = 1{,}06 \cdot 6{,}1264 + 0{,}1 = 6{,}59398;$$

die kapitalische Einlage beträgt also $800 E' = 5275{,}18$. Von der Nettoprämie entfallen rund 3860 auf die Hauptversicherung und 1040 auf die Rückgewähr.

§ 4. Durchschnittsprämien. Sozialversicherung.

314. Soziale Versicherungseinrichtungen. Die Versicherungseinrichtungen, wie sie von Großunternehmungen für ihre Angestellten, vom Staate für ganze Berufskreise und Bevölkerungsschichten auf sozialpolitischer Grundlage ins Werk gesetzt werden, unterscheiden sich in ihrem Plane und Betriebe in mehrfacher Beziehung von der privaten Versicherung.

Ein erstes und wesentliches Merkmal dieser Einrichtungen ist die Ausübung eines *Zwanges* zur Versicherung überhaupt und insbesondere zur Versicherung bei einer bestimmten dazu gegründeten Organisation. Dieser Zwang hat zur Folge, daß der Kreis der Versicherten mit einemmale gegeben ist kraft der Bestimmungen des Dienstvertrags, beziehungsweise des Gesetzes, das die Einrichtung regelt. Die Anwerbung von Versicherten und der damit verbundene Kostenaufwand entfallen; es unterbleibt aber auch naturgemäß jede Auslese seitens des Versicherungsträgers, sobald einmal die Zugehörigkeit zu dem Unternehmen, beziehungsweise zu dem vom Gesetz umschriebenen Personenkreise gegeben ist. Bei Unternehmungen, die selbst als Versicherer auftreten, wird die Auslese allerdings bei der Aufnahme in den Dienst vollzogen.

Ein zweites unterscheidendes Merkmal liegt darin, daß es die Privatversicherung mit versicherten Individuen, die soziale Versicherung mit Personengruppen zu tun hat. Die Privatversicherung geht nach dem Grundsatze vor, daß bezüglich eines jeden Versicherten zwischen Leistungen und Gegenleistungen das versicherungstechnische Gleichgewicht zu bestehen habe. Diesen Grundsatz kann die soziale

Versicherung nur gegenüber einzelnen Gruppen oder gegenüber dem ganzen Bestande ihrer Versicherten zur Durchführung bringen, von einer bis zur einzelnen Person gehenden Individualisierung muß sie absehen.

Die Gründe hierfür sind mannigfach. Vor allem erfordert das soziale Moment einen gewissen Ausgleich der wirtschaftlichen Unterschiede; der stärkere, jüngere muß dem schwächeren, älteren zu Hilfe kommen. Die unvermittelte Einführung einer Versicherung bestimmter Leistungen für einen ganzen dafür in Aussicht genommenen Personenkreis würde sich als geradezu undurchführbar erweisen, wollte man die Beiträge den individuellen Anwartschaften entsprechend feststellen; die älteren Personen wären außer Stande, für die auf sie entfallende Beitragslast aufzukommen.

Zu diesen tiefliegenden Momenten kommen noch Rücksichten auf die technische Durchführbarkeit. Die individualisierende Behandlung würde bei einer Massenversicherung einen so gewaltigen Verwaltungs- und Rechnungsapparat erfordern, daß ein sehr beträchtlicher Teil der Beiträge dem eigentlichen Zweck entzogen werden müßte. Es sind also Vereinfachungen notwendig. Bei einem sehr umfangreichen Bestande erweist es sich beispielsweise als undurchführbar oder doch als sehr umständlich, die Versicherungsleistungen zu individualisieren, d. h. nach dem wirklichen Gehalte, dem wirklichen Lohne zu bemessen; was nämlich bei einem Unternehmen selbst großen Umfangs noch tunlich ist, ist nicht mehr zu bewältigen, wenn es sich um ganze Berufskreise oder Volksschichten handelt. Es erfolgt dann die Einreihung der Versicherten in eine mäßige Anzahl von Gehalts- beziehungsweise Lohnklassen, nach denen die Versicherungsleistungen abgestuft werden; der individuelle Gehalt oder Lohn dient nur dazu, die Klasse zu bestimmen, und danach richtet sich alles übrige.

Aus dem Umstande, daß die Beitragslast nicht den persönlichen Anwartschaften entsprechend verteilt wird, könnte das Bedenken abgeleitet werden, daß es doch nicht angehe, einen Zwang dahin auszuüben, daß irgend jemand für die versicherten Anwartschaften mehr leiste, als ihrem versicherungstechnisch festgestellten Werte entspricht, da sich der Betreffende dann bei freier Wahl auf die gleichen Anwartschaften bei einer privaten Unternehmung billiger versichern könnte. Dieses Bedenken entfällt aber infolge der bei sozialen Einrichtungen der hier gedachten Art bestehenden Mitwirkung dritter Personen an der Tragung der Beitragslast: die Unternehmung, der Arbeitgeber oder der Staat nimmt einen Teil derselben auf sich oder trägt zu den fällig gewordenen Leistungen bei. So kommt es, daß die von den Versicherten selbst geleisteten Beiträge weit hinter dem Werte der ihnen gebotenen Leistungen zurückbleiben.

Bevor über die Verteilung der Beitragslast weiter gesprochen

wird, erscheint es notwendig, die verschiedenen Arten der Aufbringung der Mittel zur Bestreitung der versicherten Leistungen zu erörtern.

315. Aufbringung der Mittel. I. Angenommen, eine soziale Versicherungseinrichtung sei mit Renten und mit einmaligen Leistungen irgend welcher Art ausgestattet. In jeder Verwaltungsperiode, als welche zumeist das Kalenderjahr gilt, werden dann bestimmte Rentenraten und bestimmte einmalige Zahlungen fällig. Wird dieser Jahresaufwand nebst den aufgelaufenen Verwaltungskosten am Schlusse des Jahres festgestellt und nach einem aus der Natur der Sache abzuleitenden Schlüssel auf die Versicherten verteilt und daraufhin eingehoben, so spricht man von einer Deckung des Bedarfs durch das *Umlageverfahren.*

Statistische Erfahrungen über den Verlauf der maßgebenden Massenerscheinungen sind bei einem solchen Verfahren nicht erforderlich. Eine Ansammlung von Deckungskapitalien findet nicht statt, jedes Jahr bringt seinen Aufwand selbst auf und sorgt nicht für die Zukunft, es sei denn, daß aus Sicherheitsrücksichten Rücklagen gebildet werden, für die, so lange es notwendig, auf die Umlage ein Aufschlag gemacht wird. Nimmt man an, die Struktur des versicherten Bestandes — wobei unter Struktur alle jene Umstände gemeint sein sollen, die auf die finanzielle Gebahrung Einfluß nehmen — bleibe konstant, so wird das jährliche Erfordernis wegen der Nachwirkung der Rentenansprüche vom Beginn der Versicherung an anhaltend steigen, weil zu den in den Vorjahren bewilligten Renten immer wieder neue hinzukommen, und dieses Anwachsen des Jahreserfordernisses und damit auch der Umlage dauert so lange, bis der *Beharrungszustand* eintritt, bis der Abfall der Renten dem Zugang neuer das Gleichgewicht hält.

Dieses Anwachsen der Umlage, davon herrührend, daß die Gegenwart auch für die Vergangenheit aufkommen muß, kann je nach dem eingenommenen Standpunkte als Vorteil oder als Nachteil des Umlageverfahrens aufgefaßt werden: als Vorteil, weil es die mit der Versicherung verbundene Last allmählich anwachsen läßt und dadurch die Einführung erleichtert, als Nachteil, weil eine spätere Zeit an den in der Vergangenheit erwachsenen Lasten schwer zu tragen hat.

Weil das Umlageverfahren auf einen Ausgleich in der Frequenz der versicherten Ereignisse während einer längeren Periode verzichtet, muß die Umlage den jährlichen Schwankungen folgen; der Umstand, daß sich ihre Höhe nicht voraussehen und in Rechnung bringen läßt, wird als wirtschaftlicher Nachteil des Verfahrens empfunden.

Wenn eine auf dem eben geschilderten Umlageverfahren beruhende Einrichtung ihre weitere Tätigkeit einstellte, so wäre damit allen bereits erwachsenen Ansprüchen und allen Anwartschaften auf solche

ein Ende gesetzt, weil weder für die Weiterzahlung der bereits zugesprochenen Renten vorgesorgt noch auch für die vorhandenen Versicherten irgend etwas aufgespeichert ist (von eventuellen Rücklagen abgesehen, deren Tragweite doch immer nur eine beschränkte sein kann).

Auf dem Umlageverfahren ist der Hauptsache nach die reichsdeutsche Unfallversicherung aufgebaut.

II. Man spricht von einem *Kapitaldeckungsverfahren*, wenn für die während einer Verwaltungsperiode zuerkannten Renten die Deckungskapitalien aufgebracht werden. Das Erfordernis eines Jahres setzt sich dann aus den Barwerten der in diesem Jahre zugesprochenen Renten und aus den fällig gewordenen einmaligen Leistungen zusammen, wenn solche im Versicherungsplane vorkommen. Es findet also eine Ansammlung von Kapitalien statt, aber nicht für alle, sondern nur für diejenigen Versicherten, die in den Bezug einer Rente getreten sind. Das wesentlichste Merkmal dieses Verfahrens besteht darin, daß eine flüssig gewordene Rente im Anfange schon für alle Zukunft gedeckt ist, daß also jedes Versicherungsjahr für die Schäden (im weiteren Sinne), die es verursacht hat, endgültig aufkommt.

Bliebe der Kreis der Versicherten seiner Struktur nach gleich, wäre die Frequenz der rentenbegründenden und auch der einmalige Leistungen herbeiführenden Ereignisse stabil und hingen endlich die Renten ihrer Höhe nach von der Dauer der Zugehörigkeit zur Versicherung nicht ab, so würde sich auch das jährliche Erfordernis, von Schwankungen abgesehen, auf gleicher Höhe erhalten. Selbst bei einem an Umfang zunehmenden Versichertenkreise bliebe, wenn die übrigen Voraussetzungen zuträfen, das *relative* Erfordernis (absolutes Erfordernis im Verhältnis zur Zahl der versicherten Personen) wesentlich unveränderlich.

Anders schon gestaltet sich die Sachlage, wenn mit der Zugehörigkeitsdauer wachsende Renten statuiert sind. Das Jahreserfordernis setzt dann bei Einführung der Versicherung mit einem niedrigen Betrage ein, der sich mit der Dauer ihres Bestandes, weil immer höhere und höhere Renten zufallen, steigert, bis es wieder nach einer gewissen Dauer zu einem Beharrungszustande kommt, bei dem Abfall und Neuzugang von Renten verschiedener Höhe sich aufheben.

Die Aufbringung des Jahreserfordernisses kann nun auch bei dem Kapitalsdeckungsverfahren im Wege der *Umlage* geschehen, indem durch eine Nachhineinrechnung die Deckungskapitalien der in dem Jahre bewilligten Renten und die ausbezahlten Einmalleistungen nebst den aufgelaufenen Verwaltungskosten einem Teilungsschlüssel gemäß auf die Gesamtheit der Versicherten verteilt und eingehoben werden. In dem vorhin gedachten idealen Falle würde bei konstanten Renten die Umlage unter Schwankungen ein gewisses Niveau ein-

halten, bei steigenden Renten aber dieselbe steigende Tendenz aufweisen wie bei dem unter I. besprochenen reinen Umlageverfahren. An statistischen Erfahrungen sind jetzt solche nötig, die zur Bestimmung der Rentenbarwerte dienen, also Sterbetafeln oder Ausscheideordnungen der Rentner.

Die Aufbringung des Jahreserfordernisses kann aber auch auf ein *Prämien*verfahren gegründet werden, indem das jährliche Erfordernis an Deckungskapitalien, Einmalleistungen und Verwaltungskosten im voraus abgeschätzt und durch Einziehung von nach einem Tarif geregelten Prämien hereingebracht wird. Der Tarif kann auf verschiedene in der Natur der Sache liegende Momente Rücksicht nehmen; befindet sich darunter auch das Alter der Versicherten, so spricht man von *Individualprämien;* spielt das Alter im Tarif keine Rolle, so spricht man von *einheitlicher Prämie,* die insbesondere nach ihrer Konstruktion eine *Durchschnittsprämie* sein kann. Die Vorausbestimmung des jährlichen Erfordernisses zum Zwecke der Prämienbemessung setzt viel weitergehende statistische Erfahrungen voraus, als beim Umlageverfahren notwendig sind.

Denkt man sich, eine Versicherungseinrichtung, die auf dem Prinzip der kapitalischen Deckung der bereits angefallenen Renten beruht, stellte in einem Augenblicke ihre weitere Tätigkeit ein, so ist der Sachverhalt folgender: alle bis dahin zuerkannten Renten sind bis zu ihrem völligen Ablaufe gedeckt, für die Versicherten aber, die noch nicht in den Rentengenuß getreten sind, ist nichts vorhanden; ihre Beiträge haben nur dazu gedient, die zu ihrer Zeit entstandenen Schäden zu decken.

III. Die Aufbringung der Mittel für eine mit Renten ausgestattete Versicherungseinrichtung kann schließlich nach einem Plane erfolgen, der auch die *Anwartschaften* auf Renten einbezieht und für ihre Deckung sorgt. Eine auf diesem Prinzip aufgebaute Versicherung besitzt in einem gegebenen Augenblick nicht bloß die Deckungskapitalien für die bereits flüssig gewordenen Renten bis zu ihrem Ablauf, sondern auch für die noch im Versicherungsverhältnis stehenden sind Gelder angesammelt, die sie in den Stand setzen würden, die gleichen Ansprüche gegen Fortzahlung der gleichen Beiträge bei einem andern analog eingerichteten Unternehmen zu erwerben, wenn diesem jene Gelder als Grundfonds übergeben würden.

Dieser Modus ist bei Pensionsinstituten üblich.[1])

1) Über die verschiedenen Methoden der Mittelaufbringung in der Sozialversicherung sind eingehende Untersuchungen teils allgemeiner, teils auf die deutsche und die österreichische Invalidenversicherung (letztere im Werden) im besonderen Rücksicht nehmender Natur veröffentlicht worden; es seien hier angeführt: L. v. Bortkiewicz, Die Deckungsmethoden der Sozialversicherung (Gutachten etc. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch. Wien 1909, I, 1. Bd.,

316. Durchschnittsprämie bei einer Pensionsversicherung. Für die Angestellten eines Großunternehmens, für die Angehörigen eines bestimmten Berufs o. dgl. wird eine obligatorische Fürsorgeeinrichtung auf versicherungstechnischer Basis ins Leben gerufen, die etwa folgende Leistungen gewähren soll:

a) Invalidenrenten an invalid gewordene Mitglieder;

b) Witwenpensionen an die nach verstorbenen aktiven und invaliden Mitgliedern verbliebenen Frauen;

c) Renten an die nach eben solchen Mitgliedern und nach verstorbenen Witwen verbleibenden Waisen bis zu einem gewissen Alter;

d) Abfertigungen an Mitglieder, die innerhalb der Karenz für die Invalidenrente invalid werden;

e) Abfertigungen an die Witwen der innerhalb der Karenz verstorbenen Mitglieder;

f) Sterbegelder.

Die Höhe der Leistungen a) bis e) richte sich nach den Bezügen zur Zeit der Fälligkeit, die Höhe der Renten a) bis c) auch nach der Dienstdauer.

Die zur Sicherstellung dieser Leistungen erforderlichen Mittel sollen durch eine nur von den anrechenbaren Bezügen abhängige, also in Prozenten dieser Bezüge ausgedrückte Prämie aufgebracht werden.

Die Berechnung dieser Prämie geschieht auf Grund der Annahme, daß Umfang und Struktur des Kreises der Versicherten dieselben bleiben wie zu Beginn. Unter dieser Annahme werden die einzelnen Anwartschaften bewertet, wobei Personen, die von dem hier einzunehmenden Standpunkte als von gleicher Art zu gelten haben, zusammengefaßt werden können. Man wird also für den ganzen Bestand folgende Barwerte aufzustellen haben:

1. Barwert der Anwartschaften auf Invalidenpension;
2. Barwert der Anwartschaften auf Witwenpension;
3. Barwert der Anwartschaften auf Waisenpension;
4. Barwert der künftigen Abfertigungen an die während der Karenz invalid gewordenen Mitglieder;
5. Barwert der künftigen Abfertigungen an die Witwen der während der Karenz verstorbenen Mitglieder;
6. Barwert der Sterbegelder.

---

p. 473—497); E. Blaschke, Die Prämien und Prämienreserven der Invalidenversicherung der Arbeiter (Mitteil. d. öst.-ungar. Verb. d. Privatversich.-Anst., V. (1909), p. 2—88); J. Kaan, Die Finanzsysteme in der öffentlichen und der privaten Versicherung (ibid., p. 63—107). Eine orientierende Darstellung mit besonderer Berücksichtigung des österreichischen Gesetzentwurfes hat R. Schromm gegeben (Gutachten etc. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch. Wien 1909, I. 1. Bd., p. 539—562).

Die Summe dieser Barwerte, bezüglich deren Berechnung auf Nr. 292—301 verwiesen wird, stellt den versicherungstechnischen Wert der an den Anfangsbestand künftig zu leistenden Zahlungen dar, er heiße A.

Seine Deckung ist durch die Beiträge der Mitglieder zu bewerkstelligen. Da diese Beiträge nur bis zum Eintritt der Invalidität oder dem eventuell früher schon erfolgten Tode zu zahlen sind, so stellen sie sich als Aktivitätsrenten dar. Es wird der Barwert eines Prozents der anrechenbaren Bezüge zu bestimmen sein. Beziehen die Mitglieder, die beim Eintritt im Alter x stehen, zusammen an anrechenbaren Bezügen die Summe b_x, so hat ein Prozent dieser Bezüge den Barwert $\frac{b_x}{100} {}^a\mathrm{a}_x^{(12)}$, wenn monatliche Beitragszahlung (im Wege des Abzugs vom Monatsgehalt) vorgesehen ist. Die Summe der Ausdrücke $\frac{b_x}{100} {}^a\mathrm{a}_x^{(12)}$ über alle vertretenen Alter bildet den Barwert B eines Gehaltsprozents als Beitragsabstattung. Aus A und B ergibt sich die *Durchschnittsprämie* in Prozenten der anrechenbaren Bezüge:

$$P_{(x)} = \frac{A}{B}.$$

Die Einklammerung von x soll die Durchschnittsbildung in bezug auf das Alter andeuten.

Sollte ein Gründungsfonds vorhanden sein oder von den Mitgliedern ein Eintrittsgeld eingehoben werden, so sind die wirklichen Beträge dieser Aktivposten vorher von A in Abzug zu bringen.

Es kann sich während des Bestandes der Einrichtung die Notwendigkeit ergeben, eine Neubestimmung der fernerhin erforderlichen Durchschnittsprämie vorzunehmen. Dann hat die Rechnung sowohl die Barwerte der bereits in Kraft erwachsenen Renten als auch die früher erwähnten Anwartschaften zu erfassen; es wird sich also der Passivposten A' nunmehr wie folgt zusammensetzen:

Barwert der flüssigen Invalidenrenten;
Barwert der flüssigen Witwenrenten;
Barwert der flüssigen Waisenrenten;
dazu die Anwartschaften 1 bis 6.

Auf der Aktivseite erscheint jetzt das vorhandene „Vermögen“ V, entstanden aus den bisher gezahlten Beiträgen, soweit sie nicht zur Bezahlung bereits fällig gewordener Versicherungsleistungen aufgebraucht worden sind. Nach Abzug dieser Post von A' ergibt sich das, was durch die künftigen Beiträge zu decken ist; somit ist nunmehr die Durchschnittsprämie:

$$P'_{(x)} = \frac{A' - V}{B}.$$

317. Durchschnittsprämie der öffentlichen Invalidenversicherung (nach dem österreichischen Gesetzentwurf). Um die bei der technischen Begründung einer derartigen Versicherungseinrichtung auftretenden Fragen und eine Methode der Beitragsbemessung in den Grundzügen vorzuführen, erscheint es als das zweckmäßigste, an ein konkretes Beispiel anzuknüpfen. Als solches diene jener Teil des österreichischen Gesetzentwurfes zur sozialen Versicherung[1]), der die Invaliden- und Altersversicherung betrifft; dem Gesetzentwurfe ging das „Programm für die Reform und den Ausbau der Arbeiterversicherung"[2]) voraus; in diesem Programm und in der „Denkschrift über die Berechnung des durchschnittlichen jährlichen Beitragserfordernisses in der Invaliden- und Altersversicherung"[3]) sind die Gedanken entwickelt, die bei der Begründung der beiden Vorlagen maßgebend waren. Hier soll der Versuch gemacht werden, diese Gedanken, soweit sie den mathematischen Aufbau betreffen, in möglichster Kürze zu entwickeln.

Von den Bestimmungen des Gesetzentwurfes seien hier nur diejenigen angeführt, die zum Verständnis der folgenden Ausführungen erforderlich sind, und zwar in jener Form, in der sie bei der Rechnung Anwendung finden.

Die normalen Leistungen an die „unselbständig Erwerbstätigen" bestehen:

a) In einer Invalidenrente, mit fünfjähriger Karenz, bestehend aus einem Grundbetrag, der sich nach der Lohnklasse richtet, und in einer jährlichen Steigerung, die mit dem 6. Jahre beginnt und nach der Beitragsleistung sich richtet, die ihrerseits auch nach der Lohnklasse abgestuft werden soll;

b) in einer Altersrente, die mit Vollendung des 65. Lebensjahres beginnt und die diesem Zeitpunkte entsprechende Höhe der Invalidenrente besitzt;

c) in Kapitalsbeträgen an die Hinterbliebenen und zwar an die Witwe nach einem Rentenempfänger oder Versicherten im Grundbetrag der ihm bereits zuerkannten bzw. gebührende Invalidenrente, an jede Waise unter 16 Jahren in der Hälfte dieses Betrages;

d) in der Beitragserstattung an weibliche Versicherte im Falle der Verehelichung und des darauffolgenden dauernden Ausscheidens aus der Versicherungspflicht, mit fünfjähriger Karenz und im Betrage der Hälfte der eingezahlten Beiträge.

Die Versicherungspflicht beginnt mit der Vollendung des 16. Lebensjahres.

1) Steht gegenwärtig in parlamentarischer Behandlung.
2) Vorgelegt am 9. Dezember 1904.
3) Wien 1909.

Der Grundgedanke, auf den sich die Bestimmung der Durchschnittsprämie stützt, besteht in folgendem: Von einem Anfangsbestande ausgehend berechnet man für die aufeinanderfolgenden Bestandsjahre der Versicherung das Gesamterfordernis an Deckungskapitalien für die anfallenden Renten und an einmaligen Leistungen unter Berücksichtigung des natürlichen Wachstums des Versichertenkreises und bildet den Anfangswert aller dieser auf die *ganze Zukunft* sich erstreckenden Ansprüche. Nach denselben Grundsätzen wird der Anfangswert aller künftigen Beitragsleistungen vom jährlichen Betrage 1 bestimmt. Der Quotient des ersten Barwerts durch den zweiten gibt das jährliche Beitragserfordernis.

Die Durchführung dieses Gedankens erfordert außer jenen statistischen Daten, die sich auf die Häufigkeit der Invalidisierungen beziehen, sowie jenen Tafeln, die zur Bewertung der verschiedenen Renten zu dienen haben, die Kenntnis des *Altersaufbaues* der Versicherten und ihrer *Zunahme* infolge des natürlichen Wachstums der Bevölkerung.

In dieser Richtung werden zwei fundamentale Annahmen gemacht, dahingehend, daß der *relative* Altersaufbau *konstant* bleibe, und daß die Zunahme des Kreises der Versicherten nach einer geometrischen Progression vor sich gehe, die durch ihren Quotienten, den *Vermehrungsfaktor*, gekennzeichnet ist.[1])

Der so eingeschlagene Weg gewährt auf der einen Seite den Vorteil, daß er manche Schwierigkeiten, die in der Natur der Sache liegen, glücklich umgeht, so insbesondere die Schwierigkeiten, die in dem abweichenden Verhalten des Anfangsbestandes gegenüber einer späteren Zeit liegen, in welcher der Beharrungszustand eingetreten sein wird. Andererseits liegen in der Annahme eines Alteraufbaues, dem ein bedeutender Einfluß auf das Rechnungsergebnis zukommt, in der Hypothese, daß der Kreis der Versicherten in bezug auf seine relative Alterszusammensetzung konstant bleiben und seinem Umfange nach gemäß einer geometrischen Reihe mit festgesetztem Quotienten wachsen werde, Momente, die ein dauernd verwendbares Resultat auf den ersten Wurf nicht versprechen; dieser Schwierigkeit kann indessen überhaupt auf keine Weise ausgewichen werden, der Gesetzentwurf sieht daher vor Ablauf von zwölf Jahren eine Revision der Rechnungen vor.

318. Elemente der Rechnung. Es sei

($\mathfrak{M}_x$) der Altersaufbau der männlichen,

($\mathfrak{W}_x$) der Altersaufbau der weiblichen versicherungspflichtigen Personen; er gestaltet sich verschieden für die Gruppen der selbständig, der unselbständig Erwerbsfähigen und der mithelfenden Familienmitglieder, die zu den Unselbständigen ge-

1) Eulers Hypothese, s. Nr. 223.

zählt werden — hier aber, wo es sich um die Darlegung der Prinzipien handelt, soll von dieser Unterscheidung abgesehen werden;

(l_x^a) die Aktivitätsordnung;

(w_x) die Reihe der Invaliditätswahrscheinlichkeiten;

c der Vermehrungsfaktor (im Gesetzentwurf mit 1,01 angenommen);

i der Zinsfuß (im Gesetzentwurf mit 0,04 angenommen);

α der Grundbetrag,

ε die jährliche Steigerung der Invalidenrente.

Wird unter $(\mathfrak{M}_x)$ auch der Anfangsbestand der männlichen Versicherten verstanden, so ist deren Bestand nach Ablauf von t Jahren durch $(c^t \mathfrak{M}_x)$ dargestellt. Für die Durchschnittsprämie ist es ohne Belang, ob der wirkliche Anfangsbestand mit $(\mathfrak{M}_x)$ übereinstimmt; sie hängt nicht von seinem Umfang, sondern nur von der relativen Zusammensetzung nach Altersklassen ab.

Über die zur Bewertung der *Invalidenrenten* verwendeten statistischen Daten ist schon in Nr. 294 das Nähere mitgeteilt worden; die Barwerte der Invalidenrenten:

$$^{i}\mathrm{a}_x^{(12)}$$

werden also als gegeben vorausgesetzt.

Desgleichen können die *Anwartschaften auf Invalidenrente:*

$$^{ai}\mathrm{a}_x^{(12)} = \frac{\mathrm{N}_x^{ai}}{D_x^a}$$

als gegeben betrachtet werden, wobei im Sinne von Nr. 295, II

$$\mathrm{N}_x^{ai} = \mathrm{D}_x^{ai} + \mathrm{D}_{x+1}^{ai} + \cdots$$

$$\mathrm{D}_x^{ai} = v^{\frac{1}{2}} D_x^a w_x \, {}^{i}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$$

zu nehmen ist.

Ebenso dürfen die *Aktivitätsrenten* $^{a}\mathrm{a}_x^{(12)}$ als feststehend vorausgesetzt werden.

319. Barwert der Grundbeträge der Invalidenrenten. Nach t Jahren vom Beginn der Versicherung gerechnet ist der Bestand der Versicherten durch $(c^t \mathfrak{M}_x)$ gegeben; die in dem folgenden Jahre entstandenen Invaliden aus den Altersklassen 21 bis 64, dargestellt durch

$$(c^t \mathfrak{M}_x w_x), \qquad x = 21, 22, \cdots 64$$

treten in den Bezug der Invalidenrente, und soweit es die Grundbeträge anlangt, entsteht daraus eine auf den Beginn reduzierte Belastung

$$\sum_{21}^{64}{}_x \alpha v^{t+\frac{1}{2}} c^t \mathfrak{M}_x w_x {}^t\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}} = \alpha (cv)^t \sum_{21}^{64}{}_x v^{\frac{1}{2}} \mathfrak{M}_x w_x {}^t\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

mit der Abkürzung

$$v^{\frac{1}{2}} w_x {}^t\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}} = \mathrm{D}^t_x \tag{1*}$$

geschrieben:

$$\alpha (cv)^t \sum_{21}^{64}{}_x \mathfrak{M}_x \mathrm{D}^t_x. \tag{2}$$

Für diejenigen, die das Alter 65 aktiv erreicht haben, kommt die *Anwartschaft* auf Invalidenrente hinzu, ihr Barwert ist

$$\alpha v^t \left\{ c^t \mathfrak{M}_{65} {}^{at}\mathrm{a}^{(12)}_{65} \right\}. \tag{3}$$

Somit entsteht aus dem $\overline{t+1}$-ten Jahre des Bestandes die Barbelastung durch Grundbeträge:

$$\alpha (cv)^t \left\{ \sum_{21}^{64}{}_x \mathfrak{M}_x \mathrm{D}^t_x + \mathfrak{M}_{65} {}^{at}\mathrm{a}^{(12)}_{65} \right\}. \tag{4}$$

Durch Summierung dieses Ausdrucks in bezug auf t von $t = 5$ (Ablauf der Karenz) aufwärts ergibt sich die Gesamtbelastung aus der unbegrenzten Zukunft:

$$\alpha \frac{(cv)^5}{1 - cv} \left\{ \sum_{21}^{64}{}_x \mathfrak{M}_x \mathrm{D}^t_x + \mathfrak{M}_{65} {}^{at}\mathrm{a}^{(12)}_{65} \right\} = \frac{\alpha}{1 - cv} \mathrm{Z}_{\mathrm{I}}; \tag{I}$$

die Bedeutung von Z_{I} ist aus dem Ansatz unmittelbar ersichtlich.

320. Barwert der Grundbeträge der Aktivitätsrenten. Zur Ergänzung des vorstehenden Barwerts, der alle Invalidenrenten, auch die, welche nach Vollendung des 65. Lebensjahres anfallen, umfaßt, auf die Einbeziehung der Altersrente ist noch der Barwert der künftigen Zahlungen an Aktivitätsrenten vom Alter 65 an erforderlich. Die aus dem $\overline{t+1}$-ten Bestandsjahre stammende Belastung durch Grundbeträge stellt sich auf

$$\alpha v^t c^t \mathfrak{M}_{65} {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{65};$$

summiert man diesen Ausdruck in bezug auf t von $t = 5$ aufwärts, so ergibt sich die aus der unbegrenzten Zukunft resultierende Belastung aus diesem Titel mit

$$\alpha \frac{(cv)^5}{1 - cv} \mathfrak{M}_{65} {}^{a}\mathrm{a}^{(12)}_{65} = \frac{\alpha}{1 - cv} \mathrm{Z}_{\mathrm{II}}. \tag{II}$$

321. Barwert der Rentensteigerungen. Nach den Bestimmungen des Gesetzentwurfes ist die Rechnung so zu führen, daß die Steigerung mit dem 6. Jahre der Zugehörigkeit zur Versicherung beginnt und von da ab, wenn die Erwerbsfähigkeit andauert, bis zum 65. Jahre anhält.

Der Grundgedanke, von dem bei Bewertung dieser Steigerungen ausgegangen wird, besteht darin, daß für jedes Alter und jedes Bestandsjahr die durchschnittliche Anzahl der Steigerungen zu ermitteln gesucht wird; auf diese Durchschnittszahlen stützt sich dann die Bewertung der aus den Steigerungen entspringenden Belastung.

Durch diesen Vorgang wird den besonderen Verhältnissen der Anfangsperiode Rechnung getragen, wo Personen aller Altersklassen mit einem Male in die Versicherung eintreten, während im späteren Verlaufe der Zutritt zur Versicherung hauptsächlich in den untersten Altersklassen (16—18) sich vollziehen wird und Eintritte in den späteren Altern nur in mäßigem Grade erfolgen werden.

Gemäß dem Altersaufbau und dem natürlichen Anwachsen des Kreises der Versicherten gehen aus $\mathfrak{M}_x$ x-jährigen eines Bestandsjahres $c\mathfrak{M}_{x+1}$ $\overline{x+1}$-jährige des nächsten Bestandsjahres hervor.

Nach der Aktivenordnung gehen von l_x^a Aktiven des Alters x deren l_{x+1}^a in das Alter $x+1$ über.

Das Größenverhältnis von

$$c\mathfrak{M}_{x+1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_x \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a}$$

hat nun folgende innere Bedeutung.

Findet Gleichheit statt, so geschieht die Abminderung von $\mathfrak{M}_x$ auf $c\mathfrak{M}_{x+1}$ der Aktivenordnung gemäß, also durch dieselben Gründe wie das Ausscheiden aus der Aktivität, durch Invalidität und Tod allein.

Besteht Ungleichheit in dem Sinne

$$c\mathfrak{M}_{x+1} > \mathfrak{M}_x \frac{l_{x+1}^a}{l_x},$$

so deutet dies auf Neueintritte hin, da dann gemäß dem Altersaufbau mehr Personen vorhanden sind, als nach der Aktivenordnung zu erwarten wären, und der Neuzutritt ist durch die Differenz $c\mathfrak{M}_{x+1} - \mathfrak{M}_x \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a}$ gegeben, so daß nur

$$c\mathfrak{M}_{x+1} - \left(c\mathfrak{M}_{x+1} - \mathfrak{M}_x \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a}\right) = \mathfrak{M}_x \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a}$$

von den $c\mathfrak{M}_{x+1}$ Personen bei dem Übergang vom Alter x zum Alter $x+1$ *ein* Teilnahmsjahr absolviert haben, während die andern eben erst eingetreten sind.

Ungleichheit in dem Sinne

$$c\mathfrak{M}_{x+1} < \mathfrak{M}_x \frac{l^a_{x+1}}{l^a_x}$$

weist auf Ausscheidungen aus anderen Gründen hin, als sie bei der Aktivenordnung herrschend sind (Ausscheiden aus der Versicherungspflicht).

Die Rechnung nimmt zur Erzielung größerer Sicherheit von den beiden Abminderungsquotienten

$$c\,\frac{\mathfrak{M}_{x+1}}{\mathfrak{M}_x}, \qquad \frac{l^a_{x+1}}{l^a_x}$$

eines jeden Alters den *kleineren* als geltend an — er heiße z_x — und konstruiert mit Hilfe der Zahlenreihe (z_x) eine Abfallsordnung (K_x), indem von einer Grundzahl K_{16} der 16-jährigen der Ausgang genommen wird, so daß sukzessive

$$K_{17} = z_{16} K_{16}, \qquad K_{18} = z_{17} K_{17}, \ldots$$

Nach t-jährigem Bestande gibt es $c^t \mathfrak{M}_x$ Personen, des Alters x; davon gehörten im Sinne der eben erklärten Abfallsordnung

$$\mathfrak{M}_{x-t} \frac{K_x}{K_{x-t}}$$

der Versicherung schon bei deren Beginn an (vorausgesetzt, daß $x - t \gtreqless 16$) und haben

t Teilnahmsjahre, also $t - 5$ Steigerungen;

weiter waren

$$c\mathfrak{M}_{x-t+1} \frac{K_x}{K_{x-t+1}}$$

Personen zu Ende des ersten Bestandsjahres vorhanden, diese haben

t oder $t - 1$ Teilnahmsjahre, also $t - 5$ oder $t - 6$ Steigerungen;

weiter waren

$$c^2 \mathfrak{M}_{x-t+2} \frac{K_x}{K_{x-t+2}}$$

Personen zu Ende des zweiten Bestandsjahres vorhanden, diese haben

t, $t - 1$ oder $t - 2$ Teilnahmsjahre,

also $t - 5$, $t - 6$ oder $t - 7$ Steigerungen;

usw.; schließlich gehörten

$$c^{t-6} \mathfrak{M}_{x-6} \frac{K_x}{K_{x-6}}$$

Personen der Versicherung $t-6$ Jahre nach deren Beginn an und haben

$t, t-1, \cdots$ oder 6 Teilnahmsjahre,

also $t-5, t-6, \cdots$ oder 1 Steigerung.

In der Summe

$$\mathfrak{M}_{x-t}\frac{K_x}{K_{x-t}}+c\,\mathfrak{M}_{x-t+1}\frac{K_x}{K_{x-t+1}}+c^2\mathfrak{M}_{x-t+2}\frac{K_x}{K_{x-t+2}}+\cdots + c^{t-6}\mathfrak{M}_{x-6}\frac{K_x}{K_{x-6}}$$

sind also Personen mit $t-5$ Steigerungen $t-5$ mal, weil in jedem Summanden, Personen mit $t-6$ Steigerungen $t-6$ mal, weil in allen Summanden vom zweiten angefangen, usf., Personen mit 1 Steigerung nur einmal, weil bloß im letzten Gliede, enthalten. Diese Summe gibt also die Gesamtzahl der Steigerungen, welche sich im Anspruchsrecht der $c^t\mathfrak{M}_x$ Personen befinden, so daß also *nach t-jährigem Bestande der Versicherung auf eine Person des Alters x durchschnittlich*

$$^t s_x = \frac{K_x}{c^t\mathfrak{M}_x}\left\{c^{t-6}\frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}}+c^{t-7}\frac{\mathfrak{M}_{x-7}}{K_{x-7}}+c^{t-8}\frac{\mathfrak{M}_{x-8}}{K_{x-8}}+\cdots+\frac{\mathfrak{M}_{x-t}}{K_{x-t}}\right\} \quad (5)$$

Steigerungen entfallen.

Für Alter, für die $x-t>16$, schließt die Formel so ab, wie sie eben hingeschrieben wurde; für Alter, die der Bedingung $x-t \leqq 16$ entsprechen, schließt sie mit $c^{16-(x-t)}\frac{\mathfrak{M}_{16}}{K_{16}}$ ab, wobei sich der Exponent von c im Falle des Gleichheitszeichens auf 0 reduziert. Sobald einmal $t \overline{\gtrless} 49$ wird, schließt die Formel für *alle* Alter in der zuletzt angegebenen Weise ab.

Nachdem nun die durchschnittliche Anzahl von Steigerungen ermittelt ist, kann an die daherrührende Belastung geschritten werden; sie beträgt also für das $\overline{t+1}$-te Bestandsjahr und die Altersklasse x

$$\varepsilon\, {}^t s_x v^{t+\frac{1}{2}} c^t \mathfrak{M}_x w_x\, {}^t\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}} = \varepsilon\, {}^t s_x (cv)^t \mathfrak{M}_x \mathrm{D}^t_x,$$

wobei wieder die abkürzende Bezeichnung (1) benutzt worden ist. Dieser Ausdruck in bezug auf t von $t=6$ aufwärts, weil erst nach 6 Jahren des Bestandes Ansprüche auf Steigerungen erwachsen, und in bezug auf x von $x=22$, jenem Alter, wo Steigerungen beginnen, bis $x=64$, wo die letzten Steigerungen anfallen, summiert gibt den Barwert *aller* künftigen Steigerungen der Invalidenrenten.

Da es bei festem x nur auf die Summierung von ${}^t s_x (cv)^t$ nach t ankommt, so hat man zu bilden:

$$(cv)^6\, {}^6s_x = \frac{(cv)^6 K_x}{c^6 \mathfrak{M}_x} \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}}$$

$$(cv)^7\, {}^7s_x = \frac{(cv)^7 K_x}{c^7 \mathfrak{M}_x} \left\{ c \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}} + \frac{\mathfrak{M}_{x-7}}{K_{x-7}} \right\}$$

$$(cv)^8\, {}^8s_x = \frac{(cv)^8 K_x}{c^8 \mathfrak{M}_x} \left\{ c^2 \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}} + c \frac{\mathfrak{M}_{x+7}}{K_{x-7}} + \frac{\mathfrak{M}_{x-8}}{K_{x-8}} \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(cv)^{x-16}\, {}^{x-16}s_x = \frac{(cv)^{x-16} K_x}{c^{x-16} \mathfrak{M}_x} \left\{ c^{x-22} \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}} + c^{x-23} \frac{\mathfrak{M}_{x-7}}{K_{x-7}} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}_{16}}{K_{16}} \right\};$$

von da ab steigen nunmehr die Exponenten der cv und aller c mit jedem weiteren Jahre um je eine Einheit, während die sonstige Struktur der Formel unverändert bleibt; mithin ist, wenn man die diskontierten Zahlen

$$K_x' = v^x K_x$$

einführt,

$$\sum_6^\infty {}_t\, (cv)^t\, {}^ts = \frac{K_x'}{\mathfrak{M}_x} \left\{ \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}'} + \frac{\mathfrak{M}_{x-7}}{K_{x-7}'} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}_{16}}{K_{16}'} \right\} \sum_0^\infty (cv)^t$$

$$= \frac{1}{1-cv} \frac{K_x'}{\mathfrak{M}_x} \sum_{16}^{x-6} {}_\xi \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K_\xi'}. \tag{7}$$

Die Belastung durch die Altersklasse x beträgt also:

$$\frac{\varepsilon}{1-cv} K_x' \mathrm{D}_x^i \sum_{16}^{x-6} {}_\xi \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K_\xi'}$$

und die Belastung durch alle in Betracht kommenden Altersklassen:

$$\frac{\varepsilon}{1-cv} \sum_{22}^{64} {}_x K_x' \mathrm{D}_x^i \sum_{16}^{x-6} {}_\xi \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K_x'} = \frac{\varepsilon}{1-cv} \sum_{16}^{58} {}_\xi \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K_x'} \sum_{\xi+6}^{64} {}_x K_x' \mathrm{D}_x^i = \frac{\varepsilon}{1-cv} \mathrm{Z}_{\mathrm{III}}. \tag{III}$$

Hierdurch sind die Rentensteigerungen in Rechnung gezogen, soweit sie die *Invaliden*renten betreffen; es bleiben noch die Steigerungen die bei den *Alters*renten in Anrechnung kommen, zu bewerten.

Die durchschnittliche Zahl der Steigerungen beim Antritt der Altersrente ist im Sinne der Formel (5):

$${}^ts_{65} = \frac{K_{65}}{c^t \mathfrak{M}_{65}} \left\{ c^{t-6} \frac{\mathfrak{M}_{x-6}}{K_{x-6}} + c^{t-7} \frac{\mathfrak{M}_{x-7}}{K_{x-7}} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}_{x-t}}{K_{n-t}} \right\}$$

und die daraus resultierende Belastung hat den Barwert

$$\varepsilon\, {}^ts_{65}\, v^t c^t \mathfrak{M}_{65}\, {}^{ai}\mathbf{a}_{65}^{(12)} = \varepsilon\, {}^ts_{65}\, (cv)^t \mathfrak{M}_{65}\, {}^{ai}\mathbf{a}_{65}^{(12)};$$

die Summierung in bezug auf t von $t = 6$ aufwärts liefert die gesamte

Belastung durch die Zukunft. Da nun im gegenwärtigen Falle nach (7)

$$\sum_{6}^{\infty} (cv)^t\, {}^t s_{65} = \frac{1}{1-cv} \frac{K'_{65}}{\mathfrak{M}_{65}} \sum_{16}^{59} \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K'_\xi},$$

so ist aus den Steigerungen der nach Vollendung des 65. Lebensjahres anwartschaftlichen Invalidenrenten die Belastung

$$\frac{\varepsilon}{1-cv} K'_{65}\, {}^{ai}\mathrm{a}_{65}^{(12)} \sum_{16}^{59} \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K'_\xi} = \frac{\varepsilon}{1-cv} Z_{\mathrm{IV}} \tag{IV}$$

in Rechnung zu stellen.

Der für die Steigerungen der zusätzlichen Aktivitätsrenten resultierende Betrag ergibt sich hieraus dadurch, daß man die Invalidenrentenanwartschaft ${}^{ai}\mathrm{a}_{65}^{(12)}$ durch die Aktivitätsrente ${}^{a}\mathrm{a}_{65}^{(12)}$ ersetzt; sein Ausdruck ist demnach

$$\frac{\varepsilon}{1-cv} K'_{65}\, {}^{a}\mathrm{a}_{65}^{(12)} \sum_{16}^{59} \frac{\mathfrak{M}_\xi}{K'_\xi} = \frac{\varepsilon}{1-cv} Z_{\mathrm{V}}. \tag{V}$$

322. Barwert der Abfertigungen an Witwen und Waisen. Bezeichnet man den Abfertigungsbetrag der Witwe mit α_w (er ist gleich dem Grundbetrag α der Invalidenrente vermehrt um den staatlichen Zuschuß zu jeder fälligen Jahresrente, der mit 90 K präliminiert ist), so ist der Abfertigungsbetrag einer Waise $\frac{\alpha_w}{2}$.

Der Barwert der Abfertigungen, soweit sie aus *Todesfällen unter den Versicherten* entspringen, ist so zu rechnen wie der Barwert der Grundbeträge aus den Invalidenrenten (Nr. 319), mit der Maßgabe, daß in dem Ausdruck (1), der den Ausgangspunkt bildet, die Invaliditätswahrscheinlichkeit w_x durch die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x^{aa} der Aktiven und die Invalidenrente $\alpha\, {}^{i}\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}}$ durch die Höhe der auf einen Versicherten des Alters x entfallenden Abfertigung zu ersetzen ist; diese Abfertigung hat für die Witwe den Wert

$$\alpha_w v_x,$$

wenn v_x die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Versicherten ist, verheiratet zu sein, und für die Waisen

$$\frac{\alpha_w}{2} k_x,$$

wenn k_x die durchschnittliche Anzahl der auf einen solchen Versicherten entfallenden Kinder unter 16 Jahren bedeutet; mithin lautet der den Ausgang bildende Ausdruck mit Rücksicht auf die für diese Leistung bloß mit 1 Jahr festgesetzte Karenz:

$$\sum_{17}^{64}{}_x \alpha_w v^t c^t \mathfrak{M}_x q_x^{aa}\left(v_x + \frac{k_x}{2}\right) = \alpha_w (cv)^t \sum_{17}^{64}{}_x \mathfrak{M}_x q_x^{aa}\left(v_x + \frac{k_x}{2}\right),$$

und seine Summierung in bezug auf t von $t = 1$ aufwärts liefert

$$\frac{\alpha_w}{1 - cv} \sum_{17}^{64}{}_x \mathfrak{M}_x q_x^{aa}\left(v_x + \frac{k_x}{2}\right) = \frac{\alpha_w}{1 - cv} Z_{\text{VI}}. \qquad \text{(VI)}$$

Die Abfertigungen, so weit sie aus *Todesfällen unter Rentenempfängern* entspringen, scheiden sich für die Rechnung in solche, die Invalidenrentenempfänger, und solche, die Altersrentenempfänger betreffen.

Den Barwert der ersteren wird man ebenso zu rechnen haben wie den Barwert der Grundbeträge der Invalidenrenten, mit der Maßgabe, daß in dem Ausdruck (1) $\alpha\, {}^i\mathrm{a}^{(12)}_{x+\frac{1}{2}}$ zu ersetzen ist durch die Todesfallversicherung eines Invaliden auf den Betrag $\alpha_w\left(v_x + \frac{k_x}{2}\right)$, also durch

$$\alpha_w\left(v_x + \frac{k_x}{2}\right)\left(1 - d\, {}^i\mathrm{a}_x\right);$$

mithin tritt an die Stelle jenes Ausdrucks der neue

$$\sum_{21}^{64}{}_x \alpha_w v^t c^t \mathfrak{M}_x w_x \left(v_x + \frac{k_x}{2}\right)\left(1 - d\, {}^i\mathrm{a}_x\right)$$

und seine Summierung nach t von $t = 5$ aufwärts, entsprechend der Karenz für den Antritt der Invalidenrente, liefert für diesen Teil der Belastung den Wert

$$\alpha_w \frac{(cv)^5}{1 - cv} \sum_{21}^{64} \mathfrak{M}_x w_x \left(v_x + \frac{k_x}{2}\right)\left(1 - d\, {}^i\mathrm{a}_x\right) = \frac{\alpha_w}{1 - cv} Z_{\text{VII}}. \qquad \text{(VII)}$$

Der Barwert der von den Altersrentenempfängern stammenden Abfertigungen rechnet sich als Todesfallversicherung der in den Bezug der Altersrente eintretenden auf den Betrag $\alpha_w\left(v_{65} + \frac{k_{65}}{2}\right)$; bezeichnet man also den Barwert der Altersrente mit ${}^a\mathrm{a}_{65}$, der sich zusammensetzt aus ${}^{ai}\mathrm{a}^{(12)}_{65}$ und ${}^a\mathrm{a}^{(12)}_{65}$, so hat man in dem Ausdruck (II) lediglich $\alpha\, {}^a\mathrm{a}^{(12)}_{65}$ zu ersetzen durch

$$\alpha_w\left(v_{65} + \frac{k_{65}}{2}\right)\left(1 - d\, {}^a\mathrm{a}_{65}\right)$$

und erhält so den zweiten Teil des Barwerts der Abfertigungen nach Rentenempfängern:

$$\alpha_w \frac{(cv)^5}{1 - cv} \mathfrak{M}_{65}\left(v_{65} + \frac{k_{65}}{2}\right)\left(1 - d\, {}^a\mathrm{a}_{65}\right) = \frac{\alpha_w}{1 - cv} Z_{\text{VIII}}. \qquad \text{(VIII)}$$

Diese Rechnung ist so geführt, daß sie mit jenen Zivilstandsverhältnissen rechnet, die zur Zeit des Antrittes der Invalidenrente bzw. der Altersgrenze bestehen — in Ermangelung von Daten über die Zivilstandsverhältnisse unter den Rentenempfängern selbst —, welche Verhältnisse sich bis zum Eintritt des Todes nur im *entlastenden* Sinne ändern können, so daß aus dem Rechnungsgange eine Überwertung der Abfertigungen resultiert.[1])

323. Barwert der Beitragszahlungen. Der Bestand an Versicherten ist $(c^t \mathfrak{M}_x)$; angenommen, daß jede Person dieses Bestandes, die zwischen 16 und 64 Jahren alt ist, die Jahresprämie 1 zu zahlen hat, so resultiert aus diesem Jahre, dem $\overline{t+1}$-ten, eine Prämieneinnahme von

$$(cv)^t \sum_{16}^{64} \mathfrak{M}_x;$$

die ganze künftige Prämieneinnahme, auf den Beginn diskontiert, ergibt sich daraus durch Summierung in bezug auf t von $t = 0$ aufwärts, beträgt also

$$\frac{1}{1-cv} \sum_{16}^{64} \mathfrak{M}_x.$$

Dies gälte, wenn die ganze Jahresprämie am Beginn des Jahres auf einmal erlegt würde; macht man wegen der im Gesetzentwurfe vorgesehenen wöchentlichen Beitragsabstattung einen Abzug von 2 % (s. Nr. 309), so ergibt sich als Barwert der Beitragszahlungen

$$\frac{0{,}98}{1-cv} \sum_{16}^{64} \mathfrak{M}_x = \frac{0{,}98}{1-cv} Z_{\mathrm{IX}}. \qquad \text{(IX)}$$

324. Bildung der Durchschnittsprämien. Die Durchschnittsprämien für die drei Hauptteile der Versicherungsleistung, nämlich für die *Einheit des Rentengrundbetrages*, für die *Einheit der Rentensteigerung* und für die *Einheit der Abfertigung*, seien mit $P'_{(x)}$, $P''_{(x)}$, $P'''_{(x)}$ bezeichnet.

Der Barwert der Grundbetragseinheit für die Rentenbezüge, Invaliden- und Altersrenten, setzt sich aus den Ausdrücken (I) und (II) nach Weglassung von α zusammen, ist also

$$\frac{1}{1-cv}(Z_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{II}});$$

der Barwert der Steigerungseinheit für beiderlei Rentenbezüge besteht

1) Die Werte von v_x und k_x wurden dem Operat „Ergebnisse der über die Standesverhältnisse der Privatangestellten im Jahre 1896 eingeleiteten amtlichen Erhebungen" (I. Teil, p. 120—131) entnommen; diese Erhebungen beziehen sich allerdings auf ein von dem hier in Betracht kommenden verschiedenes Material.

aus den Teilbeträgen (III), (IV) und (V) mit Weglassung von ε, ist also

$$\frac{1}{1-cv}(Z_{III}+Z_{IV}+Z_{V});$$

der Barwert der Abfertigungseinheit ergibt sich durch Summierung der Komponenten (VI), (VII) und (VIII) nach Weglassung von α_w, beträgt daher

$$\frac{1}{1-cv}(Z_{VI}+Z_{VII}+Z_{VIII}).$$

Durch Division dieser drei Barwerte durch den Barwert (IX) der Beitragseinheit, d. i. durch

$$\frac{0{,}98}{1-cv}Z_{IX},$$

erhält man die genannten drei Durchschnittsprämien, nämlich:

$$\begin{aligned} P'_{(x)} &= \frac{Z_I+Z_{II}}{0{,}98\,Z_{IX}}, \\ P''_{(x)} &= \frac{Z_{III}+Z_{IV}+Z_V}{0{,}98\,Z_{IX}}, \\ P'''_{(x)} &= \frac{Z_{VI}+Z_{VII}+Z_{VIII}}{0{,}98\,Z_{IX}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gesamtdurchschnittsprämie für die wirklichen Leistungen ist dann:

$$P_{(x)} = \alpha P'_{(x)} + \varepsilon P''_{(x)} + \alpha_w P'''_{(x)}. \tag{9}$$

Für die Kategorie der unselbständig Erwerbstätigen ergibt sich mit den Grundlagen des Gesetzentwurfes

$$P'_{(x)} = 0{,}0607, \qquad P''_{(x)} = 1{,}301, \qquad P'''_{(x)} = 0{,}0165,$$

aus welchen Zahlen zu erkennen ist, wie stark belastend die Rentensteigerungen gegenüber den Grundbeträgen wirken und wie sehr die Abfertigungen gegen die Renten zurücktreten.

Nach dem Aufbau des Gesetzentwurfes ist

$$\alpha = 5P,$$

wenn P die jährliche Bruttoprämie bedeutet, ferner

$$\varepsilon = 0{,}2P,$$
$$\alpha_w = \alpha + 90,$$

womit gesagt ist, daß die Steigerung $\frac{2}{10}$ der jährlichen Beitragsleistung ausmacht und daß auf jede fällig gewordene Rente von Staatswegen ein Zuschuß von 90 Kronen geleistet werden soll; mit diesen Elementen berechnet sich die *Netto*durchschnittsprämie mit

$$P_{(x)} = 0{,}6462\,P + 1{,}485.$$

Der Wochenbeitrag in der III. Lohnklasse ist beispielsweise mit 36 h veranschlagt; das gibt bei Annahme von 50 Beitragswochen $P = 18\,K$, woraus

$$P_{(x)} = 13{,}12\,K;$$

es verbleiben also 4,88 K, d. i. 27,1 % von P zur Deckung der Verwaltungskosten und zur Bildung eines Sicherheitsfonds.

III. Abschnitt. Prämienreserven.

§ 1. Theorie der Prämienreserve.

325. Die Prämienreserve nach der Nettomethode. Der heutzutage noch vorherrschende Begriff der Prämienreserve und die geübte Art ihrer Berechnung sind theoretische Konstruktionen, die sich auf denselben Voraussetzungen aufbauen, wie der Begriff und die Berechnung der Nettoprämie. Diese Voraussetzungen lauten dahin, daß die versicherten Ereignisse genau gemäß den zugrunde gelegten Tafeln sich zutragen und daß die eingelegten Geldbeträge genau zu dem rechnungsmäßigen Zinsfuß sich verzinsen.

Dazu, daß diese Voraussetzungen in der Wirklichkeit niemals dauernd zutreffen, kommt der Umstand, daß die Begriffsbildung sich nicht auf das Ganze des Versicherungsgeschäftes bezieht, sondern nur einen, allerdings den wesentlichsten Teil desselben ins Auge faßt: nämlich die Erfüllung der Versicherungsansprüche; der ganze komplizierte Apparat, der zur Abwicklung und dauernden Sicherstellung des Geschäftes erforderlich ist und Aufwendungen mannigfacher Art zur Folge hat, bleibt dabei außer Betracht.

Man kann sich nun auf den Standpunkt stellen, daß all das, was die Brücke zwischen der theoretischen Konstruktion und der vielgestaltigen Wirklichkeit zu bilden hat, Sache der vorsichtigen, klugen und auf Erfahrung gegründeten Geschäftsführung sei.

Man kann aber auch die Ansicht vertreten, daß es Aufgabe der Theorie sei, auf Grund sorgfältiger Analyse aller Vorgänge das Ganze des Versicherungsbetriebes zu erfassen und alle Teile, also auch die Verwaltungskosten, die Überschüsse und ihre Verteilung, in ihren Wirkungskreis zu ziehen.

Das Richtige dürfte in der Mitte liegen. Bei der Kompliziertheit des Geschäftsganges, bei seiner Abhängigkeit von ungewissen Momenten, bedarf die Leitung sicherer Anhalte, die nur eine der Wirklichkeit angepaßte Theorie bieten kann. Dieser aber sind wieder Schranken gesetzt durch den Umstand, daß in die Zukunft kein sicherer Blick zu tun ist, daß unerwartete Vorkommnisse eintreten können, denen gegenüber die Theorie wenigstens für den Augenblick versagt und nur der gesunde praktische Sinn entscheiden kann.

Aus dieser Überlegung darf wohl der Schluß gezogen werden, daß die Theorie nicht bei den herkömmlichen versicherungsmathematischen Problemen Halt machen, vielmehr immer tiefer in den ganzen Geschäftsbetrieb einzudringen suchen soll. Ansätze dazu sind in der neueren Literatur reichlich vorhanden. Bevor auf einige darin enthaltene Ansichten eingegangen wird, muß der sachliche Inhalt dessen, was unter Prämienreserve verstanden wird, dargelegt werden.

Die *Ansammlung einer Prämienreserve* ist mit der üblichen Art der Prämienzahlung notwendig verbunden.

Folgte die Prämienzahlung dem jährlichen Risiko, fände also *natürliche* Prämienzahlung statt, so ginge die Rechnung, theoretisch gesprochen, mit jedem Jahre auf. Der Fonds, der sich am Beginn des Jahres aus den eingelaufenen Nettoprämien gebildet hat, wird am Ende des Jahres nebst den inzwischen zugewachsenen Zinsen zur Auszahlung der fällig gewordenen Leistungen aufgebraucht. Eine Ansammlung von Kapitalien findet nicht statt.

Anders bei den üblichen Arten der Prämienzahlung. Bei der einmaligen Prämienzahlung oder der kapitalischen Begründung von Versicherungen bilden die eingezahlten Nettoprämien schon zu Beginn in ihrer Gänze eine Prämienreserve, die zinstragend angelegt und verwaltet werden muß, um aus ihr die nach und nach fällig werdenden Leistungen bestreiten zu können, bis sie mit der letzten versicherten Leistung erschöpft ist. Findet jährliche konstante Prämienzahlung statt, so übersteigen die Prämien bei den meisten Versicherungsarten während einer gewissen Anfangsperiode erheblich das jährliche Risiko, werden also durch die auflaufenden Versicherungsleistungen nicht verbraucht und bauen aus den verbleibenden Resten nebst deren Zinsen und Zinseszinsen eine Prämienreserve auf. Dann aber kehrt sich das Verhältnis um, das jährliche Risiko fängt an die Prämie zu übersteigen, übersteigt sie in immer höherem Maße, und nun hat die angesammelte Prämienreserve allmählich das Fehlende zu decken, bis auch sie mit dem letzten Versicherungsfalle erschöpft ist. Hört die Prämienzahlung mit einem vereinbarten Termin auf, dann muß die bis dahin angesammelte Prämienreserve zur Deckung aller ferneren Versicherungsleistungen allein ausreichen.

Aus dieser Betrachtung gehen zwei Auffassungen der in einem bestimmten Zeitpunkte vorhandenen Prämienreserve hervor: sie ist einerseits der *Überschuß* der bis dahin gezahlten Nettoprämien über die bis dahin erfolgten Versicherungsleistungen nebst Zinseszinsen, und sie ist andererseits die *Ergänzung* auf die ferneren Prämienzahlungen, die die Auszahlung der noch ausstehenden Versicherungsleistungen ermöglicht, oder sie ist, wenn die Prämienzahlung schon aufgehört hat, der Fonds, der mit seinen Zinseszinsen die Auszahlung der ferneren Versicherungsleistungen ermöglicht und dazu theoretisch

gerade ausreicht. Insbesondere aus der zuletzt besprochenen Funktion erklärt sich der für die Prämienreserve gebrauchte Name: *Deckungskapital*.

Diesen beiden Auffassungen der Prämienreserve entsprechen die beiden Hauptmethoden ihrer Berechnung; die eine, die *retrospektive* Methode, stützt sich auf die bereits abgelaufene Versicherungsdauer, die andere, die *prospektive* Methode, auf den weiteren Verlauf. Nach beiden Methoden erscheint die Prämienreserve der Form nach als eine Differenz, mit der Maßgabe, daß der Subtrahend unter Umständen auch Null sein kann. Auf die Möglichkeit des Nullwerdens des Minuends wird später die Sprache kommen.

Die *retrospektive Methode* gibt nämlich die Prämienreserve als *Differenz zwischen den vereinnahmten Nettoprämien und den erfolgten Versicherungsleistungen* — der Subtrahend ist Null, wenn bis zum Zeitpunkte der Reserveaufstellung vertragsgemäß keine Leistung fällig werden konnte; die *prospektive Methode* liefert die Prämienreserve als *Differenz zwischen den noch ausstehenden Versicherungsleistungen und den noch zu gewärtigenden Nettoprämieneinnahmen* — der Subtrahend ist Null, wenn vertragsgemäß keine weitere Prämienzahlung stattzufinden hat; *alle Beträge mit ihrem Barwerte zur Zeit der Reserveaufstellung genommen.*

Es möchte scheinen, als ob zwischen den beiden Methoden ein prinzipieller Unterschied bestünde in dem Sinne, daß die erste mit vergangenen, also bekannten Tatsachen, die zweite dagegen mit dem ungewissen zukünftigen Verlauf rechnet. Dem ist jedoch nicht so: den Ausgangspunkt für die Berechnung der Prämienreserve eines bestimmten Augenblickes bildet der zu dieser Zeit vorhandene Bestand von Versicherungen, und das Mittel der Berechnung sind die angenommenen Versicherungsgrundlagen, also die statistischen Tafeln und der Zinsfuß.

Dieser Gedanke bedarf noch der näheren Ausführung. Wäre ein eben gebildeter Bestand gleichartiger Versicherungen und der Modus der Prämienzahlung gegeben, und wüßte man im voraus, daß er sich genau nach den gewählten Grundlagen entwickeln werde, so könnte für jeden künftigen, überhaupt in Betracht kommenden Moment die Prämienreserve a priori angegeben werden, und es wäre für das Resultat gleichgültig, welcher Methode man sich dabei bedient; auch der Bestand an Versicherten zu jenem Zeitpunkte ließe sich voraussagen. Die Wirklichkeit wird aber von dieser Voraussage in der Regel abweichen, der Bestand wird ein anderer sein, als nach den Grundlagen zu erwarten war. Wollte man nun die retrospektive Rechnung nach dem wirklichen Verlauf machen, so müßte sie ein anderes Resultat ergeben als die prospektive Methode, die immer nur auf die Grundlagen gestützt werden kann. Man macht daher auch

die retrospektive Rechnung nach dem eben vorhandenen Bestande und nach den Grundlagen, geht also dabei gewissermaßen von einem *fingierten Anfangsbestande* aus statt von dem wirklichen.

Unter solchen Verhältnissen ergeben beide Methoden dasselbe Resultat. Die prospektive Methode ist die weitaus gebräuchlichere, bei vielen Versicherungen auch die einfachere; nur bei manchen komplizierteren Versicherungskombinationen, insbesondere solchen mit Prämienrückgewähr, ist die retrospektive Methode vorzuziehen.

Wie die Nettoprämie, so stützt sich auch die Prämienreserve auf die Vorstellung, daß eine große Zahl gleichartiger Versicherungen abgeschlossen wird; die Gleichartigkeit drückt sich in gleichem Alter, gleicher Versicherungssumme und gleicher Prämienzahlungsweise aus. Unter dieser Voraussetzung waren alle Versicherungen, die zu einem bestimmten Termin nach gleicher Versicherungsdauer noch in Kraft stehen, an der Ansammlung der diesem Termine entsprechenden Prämienreserve gleichmäßig beteiligt; es entfällt daher auf jede der entsprechende aliquote Teil der Reserve. In diesem Sinne spricht man von einer *Einzelreserve* als Prämienreserve einer einzelnen Versicherung im Gegensatze zur *Gesamtreserve* eines Versicherungsbestandes.

Die Gesamtreserve einer Versicherungsunternehmung ist die Summe der zu den einzelnen Versicherungen gehörigen Einzelreserven und wird in der Regel auch so gerechnet. Gibt jedoch der zu einer Kombination gehörige Bestand beträchtliche Altersgruppen gleicher Versicherungsdauer, so kann die Rechnung dadurch vereinfacht werden, daß man für diese unmittelbar die Gesamtreserve ermittelt. Eine derart angelegte Rechnung bezeichnet man als *Gruppenrechnung*.

Über die rechtliche Stellung der Gesamtheit der Versicherten und des einzelnen gegenüber der Prämienreserve enthalten die das Versicherungsrecht regelnden Gesetze und Vorschriften, wo solche bestehen, die erforderlichen Bestimmungen. Aus diesen gehen allgemeine Normen darüber hervor, welcher *Zeitwert* einer Police nach Ablauf einer bestimmten Versicherungsdauer zukommt; er richtet sich nach der auf sie entfallenden Einzelreserve. Die englischen Aktuare bezeichnen diese geradezu als den *Policenwert*.

Es ist bei der bisherigen Entwicklung des Begriffs der Prämienreserve stillschweigend vorausgesetzt worden, die Prämienabstattung sei so eingerichtet, daß jede bezahlte Prämie mindestens das Risiko deckt, das die Versicherung bis zur nächsten Prämienzahlung läuft. Unter dieser Voraussetzung kann die Prämienreserve niemals negativ ausfallen. Eine *negative Prämienreserve* zeigt also an, daß der Versicherer Zahlungen geleistet hat, die durch die bis dahin erlegten Prämien nicht voll gedeckt sind, daß er also einen Vorschuß an die Versicherten gewährt hat. Finden nun im Zeitpunkt einer negativen Reserve Rücktritte vom Versicherungsbetrag statt, so kommt

der Unternehmer zu Schaden, weil die Ausgetretenen das Risiko, zu dessen Tragung sie sich durch den Vertrag verpflichtet hatten, nicht voll auf sich genommen haben. Es werden daher Versicherungskombinationen, die zeitweilig zu einer negativen Reserve Anlaß gäben, vermieden; führt eine Versicherung vorübergehend zu einer nicht beträchtlichen negativen Reserve, so wird mit Rücksicht auf die Uneinbringlichkeit im Falle der Lösung des Vertrags statt dessen die Reserve Null eingesetzt.

Zur Bezeichnung der nach der Nettomethode gerechneten Prämienreserve einer Versicherung irgend welcher Art, abgeschlossen auf Leben (x), nach m-jährigem Bestande diene das Symbol ${}_mV_x$.

326. Prämienreserve bei einmaliger Prämienzahlung. Bei kapitalisch begründeten Versicherungen gibt die prospektive Methode unmittelbar Aufschluß über die Größe der zu einer bestimmten Zeit erforderlichen Prämienreserve. Da nämlich weitere Einzahlungen nicht stattfinden, muß für jeden Versicherten der dieser Zeit entsprechende Wert seiner Versicherung im Reservefonds vorhanden sein.

Es ist also die Prämienreserve einer durch einmalige Prämie begründeten Versicherung gleich dem durch die abgelaufene Zeit abgeänderten Wert der Versicherung.

An dem Beispiel der Erlebensversicherung soll die Richtigkeit dieses Satzes auch durch die Rechnung erwiesen werden.

Angenommen, l_x Personen des Alters x hätten sich auf den Erlebensfall zum Alter $x+n$ auf das Kapital 1 durch Einzahlung der einmaligen Prämie

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

versichert. Dadurch ist ein Fonds in der Höhe $l_x\,{}_nE_x$ entstanden, der in $m\,(<n)$ Jahren, da inzwischen keine Auszahlungen stattfinden, mit Zinseszinsen auf die Höhe

$$l_x\,{}_nE_x(1+i)^m$$

anwächst. Die Zahl der Versicherten sinkt bis dahin infolge der eingetretenen Sterbefälle auf l_{x+m}; auf jeden davon entfällt daher die Prämienreserve

$${}_mV_x = \frac{l_x\,{}_nE_x(1+i)^m}{l_{x+m}} = \frac{l_x\,{}_nE_x}{v^m l_{x+m}} = \frac{D_x\,{}_nE_x}{D_{x+m}};$$

ersetzt man ${}_nE_x$ durch seinen obigen Wert, so wird

$${}_mV_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} = {}_{n-m}E_{x+m}, \tag{1}$$

in Übereinstimmung mit dem ausgesprochenen Satze.

Die Anwendung des Satzes auf verschiedene Kombinationen bietet

keine Schwierigkeit, weil es sich immer nur um die Angabe des jeweiligen Versicherungswertes handelt.

Eine kapitalisch begründete lebenslängliche Todesfallversicherung auf das Leben (x) z. B. hat nach m Jahren die Reserve

$$_mV_x = A_{x+m}, \tag{2}$$

eine ebenso begründete temporäre Todesfallversicherung auf n Jahre die Reserve

$$_mV_x = {}_{|n-m}A_{x+m}. \tag{3}$$

Zu einer kapitalisch begründeten, um n Jahre aufgeschobenen Leibrente für das Leben (x) gehört nach m Jahren die Reserve

$$_mV_x = {}_{n-m|}\mathfrak{a}_{x+m}, \quad \text{wenn} \quad m < n, \tag{4*}$$

dagegen die Reserve

$$_mV_x = \mathfrak{a}_{x+m}, \quad \text{wenn} \quad m > n; \tag{4**}$$

denn im ersten Falle ist die Rente noch um $n - m$ Jahre aufgeschoben, im zweiten Falle bereits flüssig; beidemal hat der Versicherte das Alter $x + m$ erreicht. Die Formel (4**) gilt für das Ende des m-ten Jahres, unmittelbar vor Auszahlung eines Rentenbetrages.

327. Prämienreserve bei jährlicher Prämienzahlung. Ist die Dauer der Prämienzahlung im voraus begrenzt, und fällt der Zeitpunkt der Reserveberechnung über die Periode der Prämienzahlung hinaus, so ergibt die prospektive Methode für die Prämienreserve ebenso wie im vorigen Falle den Wert der ferneren Versicherung. Wurde also beispielsweise eine aufgeschobene Rente durch jährliche Prämien während der Aufschubzeit von n Jahren erkauft, und soll die Prämienreserve nach m Jahren bestimmt werden, wobei $m > n$ ist, so hat man, gleichlautend mit (4**),

$$_mV_x = \mathfrak{a}_{x+m}.$$

Wenn aber die Prämienreserveberechnung in die Periode der Prämienzahlung fällt, so erfordern beide Methoden, die prospektive wie die retrospektive, die Bestimmung zweier Versicherungswerte; die *prospektive* Methode:

1. den Wert der ferneren Versicherung,
2. den Wert der ferneren Prämienzahlung;

die *retrospektive* Methode:

1. den Wert der bereits vereinnahmten Prämien,
2. den Wert der bereits verausgabten Versicherungssummen;

man rechnet diese beiden Werte für den Termin des Versicherungsabschlusses und reduziert sie hierauf unter Berücksichtigung von Sterblichkeit und Verzinsung auf den Termin der Prämienreserveberechnung.

Der Wert 1. bildet in beiden Fällen den Minuend, der Wert 2. den Subtrahend jener Differenz, durch welche sich die Prämienreserve darstellt.

Dieses Verfahren gilt sowohl bei konstanter wie bei variabler Prämie.

Bei konstanter Prämienzahlung kann man die Prämienreserve auch als den Barwert des Überschusses der dem (durch die verflossene Versicherungsdauer) erhöhten Alter angemessenen Prämie über die dem Beitrittsalter entsprechende Prämie auffassen und demgemäß berechnen. Wollte nämlich die Person (x) nach Ablauf von m Jahren, da sie das Alter $x+m$ erreicht hat, dieselbe Versicherung abschließen, so hätte sie dafür eine andere, höhere Prämie P_{x+m} zu zahlen, während sie in Wirklichkeit die ursprüngliche niedrigere Prämie P_x fortzahlt; der Barwert der künftigen Ausfälle $P_{x+m}-P_x$ an Prämie muß demnach aus der früheren Zahlung vorhanden, reserviert sein, er bildet die Prämienreserve ${}_mV_x$.

Als erstes Beispiel diene wieder die Erlebensversicherung auf das Kapital 1, abgeschlossen von einer Person (x) auf n Jahre gegen Zahlung der konstanten Prämie

$$ {}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

während der Versicherungsdauer.

Nach der prospektiven Methode ergibt sich der Ansatz

$$ {}_mV_x = {}_{n-m}E_{x+m} - {}_{|n-m}\mathfrak{a}_{x+m}\, {}_nP_x; \qquad (\alpha) $$

denn die fernere Versicherung ist eine Erlebensversicherung für $(x+m)$ nur mehr auf $n-m$ Jahre, und die fernere Prämienzahlung eine auf $n-m$ Jahre abgekürzte Rente, abhängig vom Leben $(x+m)$ und vom Jahresbetrage der Prämie.

Die retrospektive Methode liefert den Ausdruck:

$$ {}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}}\, {}_{|m}\mathfrak{a}_x\, {}_nP_x; \qquad (\beta) $$

denn die bereits vereinnahmten Prämien haben zur Zeit des Versicherungsabschlusses den Wert ${}_{|m}\mathfrak{a}_x\, {}_nP_x$, der durch Multiplikation mit $(1+i)^m \frac{l_x}{l_{x+m}} = \frac{D_x}{D_{x+m}}$ auf den Zeitpunkt der Reservebestimmung reduziert wird; eine Auszahlung aber hat noch nicht stattgefunden.

Mit Hilfe der Prämie ${}_nP_x$ am Beginn und der Prämie ${}_{n-m}P_{\overline{x+m}}$, die zur Zeit der Reserveberechnung geltend wäre, erhält man wieder in anderer Form

$$ {}_mV_x = \left({}_{n-m}P_{x+m} - {}_nP_x\right) {}_{|n-m}\mathfrak{a}_{x+m}. \qquad (\gamma) $$

Die materielle Übereinstimmung aller dieser Darstellungsformen ist leicht zu erweisen. Die Ausführung von (α) in den Grundzahlen gibt nämlich:

$$ {}_mV_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$
$$ = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}, $$

und die Ausführung von (β) in gleicher Weise:

$$ {}_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}} \frac{N_x - N_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}; \qquad (\delta) $$

was die Formel (γ) anlangt, so erkennt man ihre Übereinstimmung mit (α) sofort, wenn man beachtet, daß

$$ {}_{n-m}P_{x+m} \, {}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m} = {}_{n-m}E_{x+m} $$

ist; übrigens führt auch hier die Darstellung durch die Grundzahlen zum Ziele.

Man kann dem letzten Ausdrucke noch eine einfachere Form geben, wenn man zu der Prämie

$$ {}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

noch die andere

$$ {}_mP_x = \frac{D_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} $$

hinzunimmt; man erkennt dann sogleich, daß

$$ {}_mV_x = \frac{{}_nP_x}{{}_mP_x}. \qquad (5) $$

Hätte man also zu jedem Alter die Jahresprämien für die verschiedenen Versicherungsdauern, so ergäbe sich die Reserve durch Division zweier Jahresprämien. Da jedoch Tafeln von solcher Vollständigkeit kaum vorhanden sein werden, so wird man in der Regel nach der Formel (α) rechnen.

Bei $m = n$ wird ${}_mV_x = 1$, wie es sein muß.

Als zweites Beispiel möge die vollständige Todesfallversicherung auf das Leben (x) gegen lebenslängliche Zahlung der Jahresprämie

$$ P_x = \frac{A_x}{\mathrm{a}_x} = \frac{M_x}{N_x} $$

behandelt werden.

Die prospektive Methode gibt den Ansatz:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - \mathrm{a}_{x+m} P_x \qquad (\alpha) $$

die retrospektive den Ansatz:

$$_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}}\left({}_{|m}\mathfrak{a}_x P_x - {}_{|m}A_x\right), \tag{β}$$

die keiner Begründung mehr bedürfen. Aber ihre Übereinstimmung soll erwiesen werden. Ersetzt man in (β) ${}_{|m}\mathfrak{a}_x$ und ${}_{|m}A_x$ durch die Grundzahlen, so wird

$$_mV_x = \frac{D_x}{D_{x+m}}\left(\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} P_x - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}\right)$$

und wegen $N_x P_x = M_x$ weiter

$$_mV_x = \frac{M_{x+m} - N_{x+m} P_x}{D_{x+m}}$$

$$= A_{x+m} - \mathfrak{a}_{x+m} P_x$$

in Übereinstimmung mit (α).

Aus (α) folgt weiter, wenn man A_{x+m} durch den Wert der für diese Versicherung zu leistenden Prämienzahlung $P_{x+m}\mathfrak{a}_{x+m}$ ersetzt, die Darstellung durch Prämien:

$$_mV_x = (P_{x+m} - P_x)\,\mathfrak{a}_{x+m}. \tag{δ}$$

Drückt man in (α) A_{x+m} und P_x durch Renten aus, nämlich $A_{x+m} = 1 - d\mathfrak{a}_{x+m}$ und $P_x = \frac{1 - d\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x}$, so ergibt sich nach einer Reduktion die bemerkenswerte Formel:

$$_mV_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}, \tag{6}$$

welche die Prämienreserve durch Renten ausdrückt. In Nr. 330 wird auf diese Formel weiter eingegangen werden.

328. Prämienreserve bei unterjähriger Prämienzahlung. Es handle sich um die Prämienreserve einer lebenslänglichen Todesfallversicherung auf das Leben (x) nach n Jahren, wenn die Prämie in m-tel-Raten gezahlt wird. Ihr Zeichen sei $_nV_x^{(m)}$. Nach der prospektiven Methode hat man den Ansatz:

$$_nV_x^{(m)} = A_{x+n} - \mathfrak{a}_{x+n}^{(m)} P_x^{(m)}. \tag{7}$$

Bei ganzjähriger Prämienzahlung wäre die Reserve

$$_nV_x = A_{x+n} - \mathfrak{a}_{x+n} P_x;$$

es ist also der Unterschied

$$_nV_x^{(m)} - {}_nV_x = \mathfrak{a}_{x+n} P_x - \mathfrak{a}_{x+n}^{(m)} P_x^{(m)};$$

zu seiner Beurteilung setze man in erster Näherung (s. Nr. 272):

$$\mathfrak{a}_{x+n}^{(m)} = \mathfrak{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}, \qquad P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m}} = \frac{\mathfrak{a}_x P_x}{\mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m}},$$

woraus

$$P_x = \frac{\mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m}}{\mathfrak{a}_x} P_x^{(m)};$$

dadurch ergibt sich

$$ {}_nV_x^{(m)} - {}_nV_x = \frac{\mathfrak{a}_x - \frac{m-1}{2m}}{\mathfrak{a}_x} \mathfrak{a}_{x+n} P_x^{(m)} - \left(\mathfrak{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\right) P_x^{(m)}$$

$$= \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)} \left(1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x}\right),$$

woraus mit Rücksicht auf (6) folgt:

$$ {}_nV_x^{(m)} = {}_nV_x \left(1 + \frac{m-1}{2m} P_x^{(m)}\right). \tag{8}$$

Der eingeklammerte Faktor rechts nimmt bei $m = \infty$, d. i. unter Voraussetzung kontinuierlicher Prämienzahlung, den größten Wert an; die dieser Vorstellung entsprechende maximale Prämienreserve ist

$$ {}_n\overline{V}_x = {}_nV_x \left(1 + \frac{1}{2} \overline{P}_x\right). \tag{9}$$

Rechnet man $\overline{P}_x$ nach der Formel

$$\overline{P}_x = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x - \frac{1}{2}},$$

so findet man mit den Grundlagen der Tafel VIII beispielsweise

$$ {}_n\overline{V}_{30} = 1{,}00878\, {}_nV_{30},$$
$$ {}_n\overline{V}_{50} = 1{,}01905\, {}_nV_{50};$$

und wenn die Auszahlung des versicherten Kapitals unmittelbar nach dem Tode bedungen wird, in welchem Falle für A_x zu setzen ist $\bar{A}_x = A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right)$, so ergibt die Rechnung:

$$ {}_n\overline{V}_{30} = 1{,}00894\, {}_nV_{30},$$
$$ {}_n\overline{V}_{50} = 1{,}01938\, {}_nV_{50}.$$

Es erhöht sich also die unter so strengen Bedingungen gerechnete Prämienreserve gegenüber der unter Voraussetzung ganzjähriger Prämienzahlung und Fälligkeit des Kapitals am Ende des Sterbejahrs bestimmten nur um 0,9, beziehungsweise 2% der letzteren. Man sieht daher in der Praxis von diesem geringfügigen Unterschiede ab und rechnet ${}_nV_x$ statt ${}_nV_x^{(m)}$.

329. Bestimmung der Reserve nach einer nichtganzen Anzahl von Jahren. In der Regel fällt das Rechnungsjahr einer Versicherungsanstalt mit dem Solarjahr zusammen. Am Schlusse eines solchen haben die wenigsten Versicherungen gerade eine volle

Anzahl von Jahren bestanden; bei den meisten besteht die Dauer aus einer ganzen Anzahl von Jahren und einem Jahresbruchteil. Es handelt sich nun darum, die Prämienreserve nach einer solchen Versicherungsdauer zu bestimmen.

Die Versicherungsdauer betrage $n + \frac{t}{m}$ Jahre, wo n eine ganze Zahl und $\frac{t}{m}$ einen echten Bruch bedeutet; die fragliche Reserve werde mit ${}_{n+\frac{t}{m}}V_x$ bezeichnet. Man wird sie genau genug bestimmen, wenn man sie zwischen die Reserve am *Beginn* und am *Ende* des $\overline{n+1}$-ten Jahres unter der Annahme linearer Änderung interpoliert. Nun ist die Reserve am Ende des n-ten Jahres ${}_nV_x$, am Beginn des $\overline{n+1}$-ten, *nach erfolgter Prämienzahlung*, erreicht sie in unstetiger Änderung die Höhe ${}_nV_x + P_x$, am Schlusse desselben ist sie ${}_{n+1}V_x$. Hiernach hat man die Näherungsformel:

$$
\begin{aligned}
{}_{n+\frac{t}{m}}V_x &= {}_nV_x + P_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}V_x - {}_nV_x - P_x\right) \\
&= \left[{}_nV_x + \frac{t}{m}\left({}_{n+1}V_x - {}_nV_x\right)\right] + \frac{m-t}{m}P_x. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Nach einer viel verbreiteten Praxis wird der in eckige Klammern eingeschlossene Posten allein als „Prämienreserve“ in den Büchern geführt.[1]) Der zweite Teil, $\frac{m-t}{m}P_x$, welcher den über das Ende des Rechnungsjahres hinaus greifenden, also dem *nächsten* Rechnungsjahre zufallenden Anteil der letzt*gezahlten* Jahresprämie bedeutet, wird unter dem Namen „Prämienübertrag“ separat gerechnet und ausgewiesen (s. weiter unten Nr. 331).

Mit der Bemessung des Jahresbruchteiles wird man wohl nie über Zwölfteljahre (Monate) hinausgehen, weniger als 15 Tage vernachlässigend, mehr als 15 Tage für einen vollen Monat rechnend. Ja bei einem großen Versicherungsbestande wird man sich, ohne einen belangreichen Fehler befürchten zu müssen, noch eine weitergehende Vereinfachung gestatten und unter der Annahme gleichförmiger Verteilung der Prämienzahlungstermine über ein Rechnungsjahr so rechnen dürfen, als ob der Überschuß über die ganzen Jahre durchgängig $\frac{1}{2}$ Jahr wäre. Man hat dann als ersten Posten das arithmetische Mittel

$$\frac{{}_nV_x + {}_{n+1}V_x}{2}$$

und als zweiten Posten die halbe Jahresprämie

$$\frac{P_x}{2}.$$

1) G. Bohlmann, Encykl. der mathem. Wissensch. I, p. 885, gebraucht für diesen Posten die Benennung „kaufmännische Prämienreserve“, zum Unterschiede von der „mathematischen“, die durch (10) ausgedrückt wäre.

Bei den Versicherungen, welche im Rechnungsjahre zugewachsen sind, kommt also am Ende dieses Jahres die Reserve $\frac{{}_1V_x}{2}$ einzustellen; man wird ein annähernd gleiches Resultat erzielen, wenn man bei den vor Jahresmitte abgeschlossenen Versicherungen den ganzen Betrag ${}_1V_x$ und bei den aus der zweiten Jahreshälfte stammenden keine Reserve einstellt.

330. Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes auf die Prämienreserve. Der Einfluß, den die Wahl der Sterbetafel auf die Prämienreserve ausübt, läßt sich nicht mit wenigen Worten und allgemein charakterisieren; er ist für verschiedene Versicherungskombinationen dem Sinne und der Größe nach verschieden. Es sind mehrfache Untersuchungen nach dieser Richtung angestellt worden, ihre Resultate werden sich aber zur Bildung eines Urteiles in einem speziellen Falle kaum geeignet erweisen; das beste Mittel bleibt die Ausrechnung einer Anzahl von Spezialwerten.

Einige Betrachtungen dieser Art mögen hier Platz finden.

Es handle sich um lebenslängliche Todesfallversicherungen und um die Vergleichung zweier Sterbetafeln, die auf die zweite bezüglichen Werte sollen akzentuiert werden.

Man hat dann

$${}_nV_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x}, \qquad {}_nV_x' = 1 - \frac{\mathfrak{a}'_{x+n}}{\mathfrak{a}'_x}.$$

Für ein bestimmtes x und n wird also

$${}_nV_x \gtrless {}_nV_x',$$

je nachdem

$$\frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} \lessgtr \frac{\mathfrak{a}'_{x+n}}{\mathfrak{a}'_x}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}'_x} \gtrless \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}'_{x+n}}.$$

Hätte man also für alle Alter das Rentenverhältnis berechnet, so gestattete der Einblick in die Kolonne dieser Zahlen, für jedes Alter und jede Versicherungsdauer über das Größenverhältnis der Prämienreserven auszusagen.

Zur näheren Untersuchung des Verlaufs von ${}_nV_x$ empfiehlt es sich, $\mathfrak{a}_x$ zu zerlegen: $\mathfrak{a}_x = {}_{|n}\mathfrak{a}_x + v^n\,{}_np_x\mathfrak{a}_{x+n}$; dann schreibt sich

$${}_nV_x = 1 - \frac{1}{\frac{{}_{|n}\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_{x+n}} + v^n\,{}_np_x};$$

diese Darstellung hat den Vorteil, daß ${}_{|n}\mathfrak{a}_x$ und ${}_np_x$ nur von der Sterblichkeit *vor*, $\mathfrak{a}_{x+n}$ nur von der Sterblichkeit *nach* dem Rechnungstermine abhängen.

Wenn sich die Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x so abändert, wie es die punktierte Linie in Fig. 52 andeutet, d. h. wenn die Sterbenswahrscheinlichkeiten *vor* dem Rechnungstermine größer werden, so nehmen ${}_{|n}a_x$ und ${}_n p_x$ und hiermit auch ${}_n V_x$ ab. Bei einer Abänderung im Sinne der Fig. 53, also bei Vergrößerung der Sterbenswahrscheinlichkeiten *nach* dem Rechnungstermin, tritt das Umgekehrte ein.

Fig. 52.

Nähme die Sterbenswahrscheinlichkeit durch die ganze Tafel zu, so ergäbe sich ein doppelter Einfluß auf ${}_n V_x$, aber nach zwei entgegengesetzten Richtungen, und es ließe sich theoretisch ein Gesetz der Zunahme angeben, bei dem die Reserven unverändert blieben; es brauchte eben nur

$$\frac{a_x}{a_x'} = 1 + \varkappa$$

Fig. 53.

konstant zu sein für alle Alter. Man kann mit dieser Relation auf Lebenswahrscheinlichkeiten übergehen, wenn man

$$a_x' = 1 + v p_x' a_{x+1}',$$

und von einer ähnlichen Beziehung Gebrauch machend

$$a_{x+1}' = \frac{a_{x+1}}{1+\varkappa} = \frac{\frac{a_x - 1}{v p_x}}{1+\varkappa}$$

setzt; man findet dann nach einiger Rechnung

$$p_x' = p_x\left(1 - \frac{\varkappa}{a_x - 1}\right). \tag{11}$$

Wenn also zwei Tafeln in dieser Beziehung zu einander ständen, so ergäben sie für die Todesfallversicherung durchwegs gleiche Reserven.

Da a_x mit zunehmendem Alter abnimmt (wenigstens in den zumeist in Betracht kommenden Positionen), so ist das Verhältnis $\frac{p_x'}{p_x}$ ein mit wachsendem x *abnehmendes*, p_x' fällt rascher ab als p_x, q_x' nimmt somit rascher zu als q_x.

Wenn hingegen p_x' statt nach dem Gesetze (11) sich derart ändert, daß es zu p_x ein konstantes Verhältnis behält, etwa

$$p_x' = p_x(1 - k),$$

so wird p_x' nicht in so raschem Verhältnis abnehmen, q_x' also nicht so rasch über q_x wachsen als oben, wie es zur Erhaltung der gleichen Reserve erforderlich wäre; der Erfolg einer solchen Abänderung der p_x wird nach dem Vorausgeschickten in einer *Abnahme* der Prämienreserve sich ausdrücken. Das Umgekehrte fände statt, wenn $p_x' = p_x(1+k)$ (wobei $k > 0$) wäre für alle x.

Was den Einfluß des Zinsfußes anlangt, so ist zunächst zu bemerken, daß eine Verminderung des Abzinsungsfaktors, die aus einer Erhöhung des Zinsfußes entspringt, auf die Renten ebenso einwirkt wie eine Abminderung der Lebenswahrscheinlichkeiten in demselben Verhältnisse.[1])

Setzt man nämlich $v' = v(1-k)$ und schreibt die mit diesem Abzinsungsfaktor gebildete Leibrente in der Form:

$$\begin{aligned} a_x' &= 1 + v' p_{x+1} + v'^2 p_{x+1} p_{x+2} + v'^3 p_{x+1} p_{x+2} p_{x+3} + \cdots \\ &= 1 + v[(1-k)p_{x+1}] + v^2[(1-k)p_{x+1}][(1-k)p_{x+2}] + \cdots, \end{aligned}$$

so ist die Richtigkeit der obigen Aussage unmittelbar zu erkennen.

Nun ist aber gezeigt worden, daß eine Abminderung der Lebenswahrscheinlichkeiten in konstantem Verhältnisse eine Abnahme der Prämienreserven zur Folge habe; mithin entspringt aus einer Erhöhung des Zinsfußes eine Verminderung der Prämienreserven bei der Todesfallversicherung.

Untersuchungen über den Einfluß der Sterbetafel und des Zinsfußes werden außer bei der Wahl der Grundlagen auch dann notwendig, wenn es sich um die *Konvertierung eines Versicherungsstockes*, d. i. um den Übergang zu neuen Grundlagen handelt; die vorhandene Prämienreserve muß dann auf die diesen Grundlagen entsprechende Höhe gebracht werden, was in der Regel nur durch Heranziehung angesammelter Sicherheitsfonds möglich ist.

331. Prämienüberträge und Schadenreserve. Totalreserve. In Nr. 329, (10), ist gezeigt worden, daß bei Versicherungen, bei welchen das Versicherungsjahr sich mit dem Rechnungsjahre nicht deckt — und das ist die Regel —, in der Prämienreserve ein Posten erscheint, der dort als „Prämienübertrag" bezeichnet und als derjenige Proportionalteil der *Netto*prämie erkannt wurde, der dem nächsten Rechnungsjahre zufällt.

Wenn man sich auf den in der Praxis vielfach eingehaltenen Standpunkt stellt, daß auch von den Zuschlägen, die auf den Nettoprämien lasten, in einem Rechnungsjahre nur jene Anteile verwendet und verrechnet werden sollen, die in dieses Jahr fallen, so ergibt sich die Konsequenz, *daß die Prämienüberträge von den Bruttoprämien zu nehmen sind.* Freilich dient dann ein Teil der so gerechneten Prämienüberträge nicht den eigentlichen Versicherungszwecken, sondern ist zur Deckung der Regieauslagen etc. des nächsten Verwaltungsjahres bestimmt.

---

1) Zur Verfolgung des Einflusses, den der Zinsfuß auf die Höhe der Rente ausübt, eignet sich ein sogenanntes Rentensystem, das auf einer nach der Makehamschen Formel ausgeglichenen Tafel aufgebaut ist. Man vgl. darüber die Fußnote zu Nr. 274.

Die Prämienreserveberechnung geht von der Annahme aus, daß am Beginne jedes Versicherungsjahres die *ganze* Jahresprämie bezahlt werde, auch dann, wenn unterjährige Prämienzahlung bedungen ist. In diesem letzteren Falle können am Bilanztage noch ein oder mehrere Raten ausständig sein, was zur Folge haben wird, daß der Prämienübertrag um die nicht bezahlten Raten verkürzt ist. Für eine einheitliche Rechnung ist es es jedoch zweckmäßiger, die Überträge von den ganzen Jahresprämien zu rechnen und nicht bezahlte Raten, wo solche vorhanden sind, als *gestundet* in Abzug zu bringen. Die Prämienreserve stellt sich dann aus zwei Posten zusammen:

In das nächste Jahr fallende Quote der Jahresprämie.
Gestundete Prämienraten.
Differenz: Prämienübertrag.

Bei der Reserveberechnung wird weiter vorausgesetzt, daß alle in dem Rechnungsjahre fällig gewordenen Versicherungssummen ausbezahlt seien. In der Wirklichkeit ist diese Voraussetzung nicht erfüllt; es bleiben vielmehr, namentlich aus der dem Jahresende vorausgehenden Periode, Fälle übrig, bei welchen die Formalitäten und Vorbedingungen der Auszahlung bis zum Jahresschlusse nicht erfüllt werden konnten, außerdem auch strittige Fälle, deren Abwicklung ins nächste Jahr hinübergenommen werden muß. Für solche Fälle ist die Bereithaltung der erforderlichen Summen notwendig; diese bilden die *Schadenreserve*, einen mit Rücksicht auf etwaige unklare Fälle nicht genau feststellbaren Posten.

Der Fonds, den eine Anstalt am Schlusse eines Rechnungsjahres für die reinen Versicherungszwecke als vorhanden auszuweisen hat und den man als *Totalreserve* bezeichnen könnte, setzt sich also zusammen:

1. Aus der sogenannten (kaufmännischen) Prämienreserve (siehe Nr. 329);
2. aus den Prämienüberträgen;
3. aus der Schadenreserve.

Ist der Posten 2 aus den Bruttoprämien gerechnet, so ist die so bestimmte Totalreserve insofern kein *Nettofonds*, als sie auch einen Teil der Regiezuschläge des nächsten Verwaltungsjahres enthält.

332. Risikoprämie und Sparprämie. Mit der Prämienreserve hängen einige Begriffe zusammen, die geeignet sind, einen tieferen Einblick in das Wesen einer Versicherung zu gewähren; manche davon sind auch von praktischer Bedeutung.

Wir gehen zunächst von einer Versicherungsart aus, bei der die Auszahlungen erst in einem späteren festgesetzten Termine erfolgen oder beginnen (Erlebensversicherung, aufgeschobene Rente). Wenn eine solche Versicherung vor dem Termine infolge Ablebens der ver-

sicherten Person abläuft, so wird die für sie angesammelte Reserve frei in der Weise, daß sie nicht unmittelbar zur Erfüllung eines Versicherungszweckes Verwendung findet; aber einen Gewinn für die Anstalt bedeutet die so frei gewordene Reserve nicht, sondern sie dient dazu, um die Reserve der Überlebenden gleicher Kategorie auf die erforderliche Höhe zu heben.

Angenommen z. B., l_x Personen des Alters x hätten eine Erlebensversicherung auf das Kapital 1, zahlbar bei Erreichung des Alters $x + n$, gegen die einmalige Prämie

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

abgeschlossen. Da d_x von den Personen im Laufe des ersten Jahres sterben, so wird die Summe $d_x\,{}_nE_x$ frei; *alle* Prämien sind aber erforderlich, um die Prämienreserve der l_{x+1} das erste Jahr überlebenden auf die richtige Höhe zu bringen; denn der aus den Einzahlungen gebildete Fonds $l_x\,{}_nE_x$ wächst bis zum Schlusse des Jahres auf

$$ \frac{l_x\,{}_nE_x}{v} $$

an, und hiervon entfällt auf jeden Überlebenden

$$ \frac{l_x\,{}_nE_x}{v\,l_{x+1}} = \frac{D_x}{D_{x+1}}\,{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}, $$

und das ist die richtige Prämienreserve nach einem Jahre. Ähnlich verhält es sich in jedem folgenden Jahre, und im letzten Jahre erreicht die Prämienreserve eines jeden der Überlebenden die versicherte Summe, die nun zur Auszahlung kommt.

Anders steht es bei einer Todesfallversicherung. Hier dient die Prämienreserve, wann auch der Tod eintritt, zur Bezahlung der Versicherungssumme, und da sie deren Höhe im allgemeinen — außer im höchsten der verwendeten Sterbetafel entsprechenden Alter — nicht erreicht, so ist eine Ergänzung auf das versicherte Kapital notwendig. Diese Ergänzung nennt man das *reduzierte Kapital*. Es beträgt am Schlusse des n-ten Jahres, wenn x das anfängliche Alter war,

$$ 1 - {}_nV_x. $$

Die natürliche Prämie für die Versicherung dieser Summe, zahlbar am Anfange des genannten Jahres, d. i.

$$ \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}(1 - {}_nV_x), \tag{12} $$

heißt die *Risikoprämie* der in Rede stehenden Versicherung für das betreffende Jahr.[1])

---

1) Die Begriffe des *reduzierten Kapitals* und der *Risikoprämie,* die er „reduzierte Prämie" nennt, für die hier in Rede stehende Versicherungsart hat zuerst

Die Differenz zwischen der Jahresprämie $P_x = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d$ und der Risikoprämie beträgt

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d - \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}(1 - {}_nV_x)$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d - v q_{x+n-1} \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x}$$

$$= \frac{1 - v(1 - p_{x+n-1})\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} - d$$

$$= \frac{1 + v p_{x+n-1}\mathfrak{a}_{x+n} - v\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} - d$$

$$= \frac{\mathfrak{a}_{x+n-1} - v\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} - d; \tag{13}$$

da nun

$${}_{n-1}V_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+n-1}}{\mathfrak{a}_x}$$

$$v\,{}_nV_x = v - \frac{v\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x},$$

woraus

$$v\,{}_nV_x - {}_{n-1}V_x = \frac{\mathfrak{a}_{x+n-1} - v\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} - d,$$

so liegt die Bedeutung jener Differenz darin, daß sie die Erhöhung der Reserve ${}_{n-1}V_x$ vom Schlusse des $\overline{n-1}$-ten Jahres auf die Reserve ${}_nV_x$ am Schlusse des n-ten Jahres bewirkt. Man bezeichnet daher (13) als *Sparprämie* für das n-te Versicherungsjahr.

Hiernach zerfällt jede *Jahresprämie* P_x in zwei von einem Versicherungsjahre zum nächsten sich ändernde Teile: in die *Risikoprämie*, bestimmt zur Versicherung des reduzierten Kapitals, wenn (x) in dem betreffenden Jahre sterben sollte, und in die *Sparprämie*, bestimmt zur Erhöhung der Prämienreserve auf den richtigen Betrag, wenn (x) das Jahr überleben sollte.

G. Bohlmann[1]) gibt für Risiko- und Sparprämie die folgenden allgemeinen, weil auch auf andere Versicherungsarten anwendbaren Definitionen. Ist p_n' die Wahrscheinlichkeit, daß das versicherte Kapital (oder die Rente) 1 im n-ten Versicherungsjahre fällig wird, p_n'' die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Jahre die Versicherung abläuft, V_n die Reserve am Schlusse dieses, V_{n-1} die Reserve am Ende des vorangehenden Jahres, so ist die Risikoprämie:

M. Kanner aufgestellt und ihrer Bedeutung nach gewürdigt. Deutsche Versicherungs-Zeitung 1867 und 1868.

1) Encykl. d. mathem. Wissensch. I, p. 882.

$$P_n' = v(p_n' - p_n'' V_n), \tag{14}$$

die Sparprämie:

$$P_n'' = v P_n - V_{n-1}; \tag{15}$$

erstere stellt die auf den Jahresbeginn reduzierte Erwartung bezüglich der Auszahlung der Versicherungssumme und des Heimfalles der Reserve, letztere die auf denselben Zeitpunkt reduzierte Differenz der beiden Reserven. Ist P die jährlich gleichbleibende Prämie, so ist jedesmal $P = P_n' + P_n''$.

Bei der Todesfallversicherung ist $p_n' = p_n'' = q_{x+n-1}$; denn wenn der Versicherte im Laufe des Jahres stirbt, so ist sowohl die Versicherungssumme auszuzahlen wie auch die Reserve einzuziehen; daher

$$P_n' = v q_{x+n-1}(1 - V_n)$$

in Übereinstimmung mit (12).

Bei der Postnumerando-Leibrente ist $p_n' = p_{x+n-1}$, $p_n'' = q_{x+n-1}$; denn erlebt (x), nachdem er $x + n - 1$ Jahr alt geworden, auch noch das Alter $x + n$, so ist ihm am Schlusse des n-ten Jahres die Rente auszuzahlen, und stirbt er im Laufe des n-ten Jahres, so ist die am Schlusse desselben vorhandene Reserve $\mathfrak{a}_{x+n} - 1$ einzuziehen; hier hat man also

$$P_n' = v[p_{x+n-1} - q_{x+n-1}(\mathfrak{a}_{x+1} - 1)].$$

Aus den begrifflichen Bestimmungen geht hervor, daß (x), um sich auf das Kapital 1 für den Todesfall zu versichern, dies so einrichten könnte, daß er jährlich durch Erlag der Risikoprämie sich auf das jeweilige reduzierte Kapital versichert, die Sparprämie aber auf Zinseszins anlegt: wenn er stirbt, wird von der einen Seite das der Versicherungsdauer entsprechende reduzierte Kapital ausgefolgt, während die rückgelegten Sparprämien mit ihren Zinsen zu der derselben Dauer entsprechenden Prämienreserve angewachsen sind; beides gibt genau das Kapital 1.

Die Risikoprämie liegt einer Form der *Rückversicherung* zugrunde. Statt nämlich — und das ist die häufiger angewandte Form — einen Teil des versicherten Kapitals an eine andere Anstalt abzugeben und nur für den rückbehaltenen Teil die Prämienreserve anzusammeln[1]), kann man auch so vorgehen, daß man die Prämienreserve für das ganze Kapital aufsammelt und jährlich das reduzierte Kapital durch Bezahlung der Risikoprämie bei der rückversichernden Anstalt versichert.

L. v. Bortkiewicz[2]) hat an einer eigens konstruierten allgemeinen Versicherungskombination, unter die sich die gangbaren Versicherungsformen subsummieren lassen und die er Integralversicherung

1) Über die Rechnungsgrundlagen für übernommene und abgegebene Rückversicherungen enthalten die Vorschriften über die Staatsaufsicht nähere Bestimmungen.

2) Assekuranz-Jahrbuch XXIV (1903), p. 1—16.

nennt, eine auf alle Fälle, auch auf solche, wo man von Risiko- und Sparprämie nicht zu sprechen pflegt, anwendbare Zerlegung der Nettoprämie gezeigt, die jedoch bei manchen Versicherungen neben der Risikoprämie und der Sparprämie noch zu einem dritten Prämienteil führt, den er als Restprämie bezeichnet. Nach dieser Auffassung zerlegt sich eine Versicherung im allgemeinen in drei Teilgeschäfte, die man sich auch durch drei verschiedene Unternehmungen vertreten denken kann: eine eigentliche Versicherung auf die Dauer je eines Jahres, ein Spargeschäft und ein Kreditgeschäft.

Der Gedankengang ist der folgende: Der Versicherer verpflichtet sich, am Schlusse der aufeinander folgenden Jahre an den Versicherten die Summen $U_1, U_2, \cdots$ auszuzahlen, wenn dieser lebt, hingegen seinen Erben die Summe T_1, oder $T_2, \cdots$ auszuzahlen, wenn der Versicherte im Laufe des 1., 2., $\cdots$ Jahres gestorben sein sollte. Die Gegenleistung besteht in den Nettoprämien $P_1, P_2, \cdots$, fällig zu Beginn der aufeinander folgenden Jahre. Der Vertrag bleibt aufrecht bis zum Schlusse des Sterbejahres oder durch eine im voraus vereinbarte Dauer.

Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte das m-te Jahr durchlebt, nachdem er in dasselbe eingetreten, q die Wahrscheinlichkeit, daß er im Laufe desselben stirbt, so gilt der Ansatz:

$$(V_{m-1} + P_m)(1 + i) = p(U_m + V_m) + qT_m; \tag{16}$$

die linke Seite gibt jenen Betrag, auf welchen die Prämienreserve vom Ende des $\overline{m-1}$-ten Jahres nebst der Prämie des m-ten Jahres bis zum Ende dieses Jahres anwächst; die rechte Seite den Barwert der Leistung für den Fall des Überlebens, bestehend in der Summe U_m und der Prämienreserve zur Deckung der ferneren Versicherung, vermehrt um den Barwert der Leistung für den Fall des Todes, bestehend ausschließlich in der Summe T_m, mit deren Auszahlung dann der Vertrag erlischt.

Löst man den Ansatz in bezug auf P_m auf, einmal nur q, ein zweitesmal nur $p (= 1 - q)$ in der Formel belassend, so ergeben sich die beiden Formeln:

$$P_m = qv(T_m - U_m - V_m) + (vV_m - V_{m-1}) + vU_m, \tag{17}$$

$$P_m = pv(U_m + V_m - T_m) + (vV_m - V_{m-1}) + v(T_m - V_m). \tag{18}$$

Die erste Formel kommt zur Anwendung, wenn $T_m - U_m - V_m > 0$, wenn also die Verpflichtung aus dem Todesfall überwiegt über jene beiden Verpflichtungen, die dem Versicherer im Überlebensfall erwachsen — v. Bortkiewicz spricht dann von einer echten Todesfallversicherung; die zweite tritt in Kraft, wenn $U_m + V_m - T_m > 0$, was so viel heißt, daß die auf den Erlebensfall vereinbarten zwei Leistungen die auf den Todesfall gesetzte übertreffen — echte Er-

lebensversicherung; der Grenzfall $U_m + V_m = T_m$ wird als unechte Versicherung bezeichnet. Alle diese Benennungen gelten für das betreffende Jahr.

Vom Grenzfall abgesehen, tritt in den beiden unterschiedenen Fällen im allgemeinen eine Dreiteilung der Prämie P_m ein, und zwar in eine *Risikoprämie:*

$$P'_m = qv(T_m - U_m - V_m), \text{ bzw. } = pv(U_m + V_m - T_m), \tag{19}$$

eine *Sparprämie:*

$$P''_m = v V_m - V_{m-1} \tag{20}$$

und eine *Restprämie:*

$$P'''_m = v U_m, \text{ bzw. } = v(T_m - V_m); \tag{21}$$

die erste deckt die Risikosumme $T_m - U_m - V_m$, bzw. $U_m + V_m - T_m$, die zweite bewirkt die erforderliche Änderung der Prämienreserve, die dritte bedeutet eine Kreditoperation, durch die der Versicherungsvertrag am Ende des Jahres wieder intakt wird.

Daß die Sparprämien tatsächlich die Prämienreserve aufbauen, erkennt man, indem man die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1'' &= v V_1 \\ P_2'' &= v V_2 - V_1 \\ P_3'' &= v V_3 - V_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_m'' &= v V_m - V_{m-1} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $(1+i)^m$, $(1+i)^{m-1}$, $(1+i)^{m-2}$, $\cdots (1+i)$ multipliziert und daraufhin addiert; es entsteht so

$$P_1''(1+i)^m + P_2''(1+i)^{m-1} + \cdots + P_m''(1+i) = V_m;$$

die linke Seite ist in der Tat der Barwert der Sparprämien am Ende des m-ten Jahres.

Zunächst sei die Übereinstimmung dieser Begriffsbildung mit der üblichen für jene Versicherungsarten nachgewiesen, auf welche die Begriffe der Risiko- und der Sparprämie gewöhnlich angewendet werden; bei diesen entfällt denn auch die Restprämie. So ist bei der reinen Todesfallversicherung $U_m = 0$, $T_m = 1$ für jedes m, folglich

$$P'_m = qv(1 - V_m), \qquad P''_m = v V_m - V_{m-1}, \qquad P'''_m = 0;$$

bei der gemischten Versicherung mit der Dauer n hat man, so lange $m < n$: $U_m = 0$, $T_m = 1$, also wie vorhin

$$P'_m = qv(1 - V_m), \qquad P''_m = v V_m - V_{m-1}, \qquad P'''_m = 0,$$

im letzten Jahre aber, wo $m = n$, ist $U_n = 0$, $T_n = V_n = 1$, daher

$$P_n' = 0, \qquad P_n'' = v - V_{n-1}, \qquad P_n''' = 0.$$

Anders gestaltet sich die Sache bei der Erlebensversicherung. Hier ist innerhalb der Versicherungsdauer $U_m = T_m = 0$, daher

$$P_m' = pvV_m, \qquad P_m'' = vV_m - V_{m-1}, \qquad P_m''' = -vV_m;$$

durch P_m' versichert sich der Versicherungsnehmer auf die Prämienreserve, die der Versicherer für ihn am Schlusse des Jahres bereitzuhalten hat; durch P_m'', das er in eine Sparkasse einlegen kann, erhöht sich sein dort bereits vorhandenes Guthaben V_{m-1} im Laufe des Jahres auf V_m; P_m''' bedeutet nun die Entlehnung der Summe vV_m aus einem Kreditinstitut auf ein Jahr, nach dessen Ablauf sie zur Schuld V_m anwächst. Lebt er nun am Ende des Jahres, so hat der Versicherer für ihn V_m einzustellen, die Sparkasse verzeichnet das Guthaben V_m, das Kreditinstitut die Schuld V_m, er empfängt also nichts, wie es dem Versicherungsvertrag entspricht. Stirbt er im Laufe des m-ten Jahres, so verfällt die Reserve V_m bei dem Versicherer, das Sparguthaben V_m bezahlt die gleich hohe Schuld bei dem Kreditinstitut, die Bedingungen der Versicherung sind wieder erfüllt.

Im letzten, n-ten, Jahre ist $U_n = 0$, $V_n = 1$, $T_n = 0$, somit

$$P_n' = pv, \qquad P_n'' = v - V_{n-1}, \qquad P_n''' = -v,$$

und man überzeugt sich durch analoge Schlußfolgerungen, daß auch jetzt den Bedingungen unter allen Umständen entsprochen ist.

Die Auffassung ist also in sich widerspruchsfrei, führt aber doch nur in jenen Fällen, in welchen die Restprämie Null ist, zu einer naturgemäßen Zerlegung.[1])

333. Andere Methoden und Vorschläge zur Bestimmung des Deckungskapitals. Die Nettomethode ist als ein Verfahren zur Bestimmung des erforderlichen Deckungskapitals für künftige Versicherungsleistungen gekennzeichnet worden, das sich auf dieselben Grundlagen stützt, die bei der Berechnung der Nettoprämie verwendet worden sind. Da der wirkliche Verlauf der Dinge von diesen Grundlagen in der Regel systematisch abweicht, so wird auch das so bestimmte Deckungskapital dem wirklichen Bedarf an Zahlungsmitteln nicht entsprechen; es erwachsen daraus für das Unternehmen Gewinne oder Verluste gegenüber der Rechnung, die nach ihrer Herkunft aus den beiden Grundlagen als Sterblichkeits- und Zinsgewinn, beziehungsweise -Verlust zu bezeichnen sind.

Auf die berechneten Nettoprämien werden des weiteren Zuschläge gemacht, die zur Bestreitung der mit der Geschäftsführung verbundenen

1) Von einer ähnlichen allgemeinen Auffassung geht P. E. Böhmer (Zeitschr. f. d. ges. Versich.-Wissensch. X [1910], p. 71—77) aus; doch vermeidet er den Begriff der Restprämie durch eine Modifikation des Begriffs der Risikoprämie. Seine Darstellung umfaßt auch Versicherungen verbundener Leben.

Nebenleistungen dienen sollen; aber auch das Ausmaß an Zuschlägen wird im allgemeinen dem Erfordernis an Verwaltungsauslagen nicht entsprechen; es resultiert daraus eine weitere Quelle von Gewinn oder Verlust.

Bei der Feststellung der disponiblen Überschüsse, d. i. derjenigen Überschüsse, die dem Geschäftsbetriebe entzogen werden können, ohne daß dessen Stetigkeit und Sicherheit gefährdet erscheine, und die den Anspruchsberechtigten (Aktionären, Versicherten) in Form von Dividenden nach Maßgabe ihrer Berechtigung zugeführt werden, spielt demnach die Art der Abschätzung des Deckungskapitals eine wichtige Rolle. Es ist dabei notwendig, diesen Begriff in einem erweiterten Sinne zu fassen und auf das Ganze des Geschäftsbetriebes einzurichten. Geschieht dies, dann entsteht ein fundamentaler Unterschied zwischen *Deckungskapital* und jener *Prämienreserve*, die bloß die Versicherungsleistungen berücksichtigt und nach den normalen Grundlagen rechnet.

Die Frage, ob in die Aufstellung des Deckungskapitals die gesamten Verwaltungskosten einbezogen werden sollen, findet nicht einheitliche Beantwortung. Von der einen Seite wird dies mit Nachdruck gefordert und die Nettomethode als dem heutigen Geschäftsbetriebe nicht mehr adäquat verworfen; von der anderen Seite wird auf die Unmöglichkeit einer *verläßlichen* Schätzung der laufenden Kosten für die ganze Dauer der Versicherung wegen der Veränderlichkeit der wirtschaftlichen Verhältnisse hingewiesen, die ja den größten Einfluß haben, und daraus zum mindesten die Unzweckmäßigkeit ihrer Einbeziehung in den Kalkül gefolgert.

In einem Punkte gehen die Bestrebungen nach einer Modifikation der Prämienreserve ziemlich einig. Bei der gegenwärtig üblichen Art der Erwerbung neuer Versicherungen verteilen sich nämlich die Nebenauslagen nicht gleichförmig auf die ganze Dauer der Versicherung oder der Prämienzahlung, wie dies in einer früheren Zeit der Fall war, so daß ihre fortlaufende Deckung aus den Zuschlägen erfolgen könnte; vielmehr stellen sich an den Anfang der Versicherung erhebliche Mehrauslagen, deren bedeutendste die Abschlußprovision ist, zu ihrer Bestreitung reicht aber der Zuschlag zur ersten Prämie zumeist nicht aus. Daraus entspringt die wichtige Frage, wie es einzurichten sei, daß die neuen Versicherungen ihre Produktionskosten selbst tragen, damit nicht durch deren Überwälzung auf die alten Versicherungen die Gewinnanteile dieser beeinträchtigt werden.

Man kann die verschiedenen Bestrebungen nach Behebung dieser Schwierigkeit und nach einer den wirklichen Verhältnissen besser angepaßten Schätzung des Deckungskapitals vom Gesichtspunkte der dazu verwendeten Mittel aus gruppieren. Unter Beibehaltung der Grundlagen der Nettomethode und ihrer wesentlichen Auffassung soll die Nettoprämie innerhalb der konstant belassenen Bruttoprämie der-

art abgestuft werden, daß sie wenigstens für einen Teil der Abschlußkosten gleich im Anfang der Versicherung Raum läßt. Die für die Berechnung des Deckungskapitals verwendete Prämie soll in einer mit Berücksichtigung der Verwaltungskosten, die sonach als *dritte* Grundlage in die Rechnung aufgenommen werden, modifizierten Nettoprämie bestehen. Wieder eine andere Berechnungsweise stützt sich auf die Bruttoprämien, indem sie mit normaler Sterbetafel und normalem Zinsfuß den Barwert der Versicherungsverpflichtungen einerseits und den Barwert der Bruttoprämien andererseits bestimmt, jenen ins Passivum, diesen ins Aktivum einstellt. Ein weiterer Gedanke besteht darin, zur Schätzung des Deckungskapitals andere, dem wirklichen Sachverhalt näher kommende Grundlagen (Sterbetafel, Zinsfuß als „Grundlagen zweiter Ordnung") zu verwenden. In jüngster Zeit ist insbesondere die Änderung der Sterblichkeit mit der Versicherungsdauer herangezogen worden, um dadurch eine sachgemäße Verbesserung des Rechnungswesens zu erzielen.

Im folgenden können nur einige dieser Methoden und Vorschläge einer kurzen, kennzeichnenden Besprechung unterzogen werden; für ein näheres Eingehen, insbesondere was die ziffermäßigen Effekte der verschiedenen Verfahren anlangt, muß auf die Literatur verwiesen werden.[1])

I. *Die Zillmersche Methode.* Den ersten wissenschaftlich begründeten Versuch, an der Nettomethode eine solche Modifikation anzubringen, daß sie mit Rücksicht auf den damals eingetretenen Wandel im Versicherungsbetrieb geeignet werde, die Deckung eines Hauptteils der ersten Unkosten, der Abschlußprovision, gleich im Beginn der Versicherung zu ermöglichen, hat A. Zillmer (1863) gemacht. Sein Vorschlag hat zu lebhaften Erörterungen Anlaß gegeben und ist heute noch vielfach umstritten; auch die staatliche Aufsicht über die Privatversicherung, so weit sie geübt wird, hat nicht einheitliche Stellung zu ihm genommen.

Die mathematische Theorie, auf den Fall der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit jährlicher, bis zum Ableben währender Prämienzahlung angewendet, ist in den Grundzügen die folgende.

---

1) A. Zillmer, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve, Stettin 1863. — Derselbe, Die rationelle Deckung der Abschlußkosten in der Lebensversicherung, Assek.-Jahrb. II (1881), p. 139—149. — Derselbe, Die Bedeutung der Prämienreserve der Lebensversicherung, ibid. IX (1888), p. 60—69. — P. Liebetanz, Die Anwerbekosten der Lebensversicherung und ihre Deckung, Berlin 1902. — Logophilus (Pseudonym), Der Streit über die Zillmersche Methode in der Lebensversicherung, Berlin 1902. — G. Höckner, Über die Bedeutung des Deckungskapitals im Lebensversicherungsbetrieb, Zeitschr. f. d. ges. Versich.-Wissensch. V (1905), p. 511—541. — G. Engelbrecht, Das Deckungskapital in der Lebensversicherung, ibid. VII (1907), p. 611—656. — G. Höckner, Die Zillmersche Methode, Assek.-Jahrb. XXX (1909), p. 145—158.

Bezeichnet man die Nettoprämie des ersten Jahres mit ${}_{|1}P_x$, die Nettoprämie für die weitere Dauer mit ${}_{1|}P_x$, so soll

$$ {}_{|1}P_x = {}_{1|}P_x - \alpha \tag{22} $$

sein; der in Bruchteilen der versicherten Summe ausgedrückte Betrag α nebst dem Zuschlage, der in der *konstanten* Bruttoprämie über ${}_{|1}P_x$ hinausgeht, soll zur Deckung der Abschlußprovision, überhaupt eines Teiles, wenn nicht der ganzen Abschlußkosten verwendet werden. Aus dem Ansatz:

$$ A_x = {}_{|1}P_x + {}_{1|}P_x(\mathfrak{a}_x - 1), \tag{23} $$

der links den Barwert der Versicherung, rechts jenen der Nettoprämieneinnahme aufweist, folgt wegen (22):

$$ {}_{1|}P_x = \frac{A_x + \alpha}{\mathfrak{a}_x} = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x} + \frac{\alpha}{\mathfrak{a}_x}, \tag{24} $$

d. h. der Zuschlag, der zu der gewöhnlichen konstant bleibenden Nettoprämie $P_x = \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x}$ zu machen ist, um die vom zweiten Jahre an zu zahlende erhöhte Nettoprämie zu erhalten, wird durch Division der „Zillmerquote“ α mit der Rente erhalten.

Dem Betrage α setzt Zillmer Grenzen. Die eine ergibt sich aus der Forderung, daß die Nettoprämie des ersten Jahres nicht negativ ausfallen dürfe; demnach muß

$$ \alpha < \frac{A_x + \alpha}{\mathfrak{a}_x}, $$

also

$$ \alpha < \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x - 1} \tag{25} $$

sein. Eine andere Grenze, die über dieser liegt, bei deren Einhaltung also (25) von selbst erfüllt ist, lautet dahin, die erste Nettoprämie habe mindestens noch das Risiko des ersten Jahres zu decken; ihr zufolge muß also

$$ {}_{|1}P_x \geqq \frac{C_x}{D_x}, $$

d. h.

$$ \frac{A_x + \alpha}{\mathfrak{a}_x} - \alpha \geqq \frac{C_x}{D_x} $$

sein, woraus sich

$$ \alpha \leqq \frac{A_x}{\mathfrak{a}_x - 1} - \frac{\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x - 1}\frac{C_x}{D_x} = \frac{\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x - 1}\left(P_x - \frac{C_x}{D_x}\right) \tag{26} $$

ergibt. Durch Einhaltung dieser Grenze soll vermieden werden, daß das erste Versicherungsjahr mit einer negativen Reserve abschließe;

an dieser Forderung hielt nämlich Zillmer fest, die neuere Zeit bestreitet ihre Berechtigung.

Beachtet man, daß

$$\mathfrak{a}_x - 1 = a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x}\,\mathfrak{a}_{x+1} \quad \text{und} \quad \frac{C_x}{D_x} = A_x - \frac{D_{x+1}}{D_x}\,A_{x+1},$$

so läßt sich die Beziehung (26) auch schreiben:

$$\alpha \lesseqgtr \frac{\mathfrak{a}_x}{\mathfrak{a}_x - 1}\left(P_x - P_x \mathfrak{a}_x + \frac{D_{x+1}}{D_x}\,A_{x+1}\right) = \mathfrak{a}_x\,(P_{x+1} - P_x);$$

hiermit aber ergibt sich als obere Grenze von ${}_{1|}P_x$, wenn man in (24) die obere Grenze von α einsetzt:

$${}_{1|}P_x = P_{x+1},$$

die gewöhnliche Prämie zum nächsthöheren Alter. Man bezeichnet diese Art der Bemessung der vom zweiten Jahre an geltenden Prämie als die $\overline{x+1}$-Methode.

Die Stellungnahme gegen die Zillmersche Methode erklärt sich hauptsächlich aus dem Einfluß, den sie auf die Prämienreserve übt. Diese stellt sich nämlich auf

$${}_mV_x' = A_{x+m} - {}_{1|}P_x\,\mathfrak{a}_{x+m} = 1 - d\,\mathfrak{a}_{x+m} - \frac{1 - d\,\mathfrak{a}_x + \alpha}{\mathfrak{a}_x}\,\mathfrak{a}_{x+m},$$

d. i. auf

$${}_mV_x' = 1 - (1 + \alpha)\,\frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}, \tag{27}$$

ist also *kleiner* als die nach der Nettomethode gerechnete

$${}_mV_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}$$

um den Betrag

$$\alpha\,\frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x} = \alpha(1 - {}_mV_x);$$

mit wachsendem m nähert sich ${}_mV_x$ der Einheit, der Unterschied nimmt also mit zunehmender Versicherungsdauer ständig ab und nähert sich der Null als Grenze.

Zur Illustration einige ziffernmäßige Angaben. Mit den Grundlagen der Tafel VIII findet man für die unter (26) ermittelte Grenze

bei $x = 30: \alpha \leq 0{,}01033$, also $10{,}3\,‰$ des versicherten Kapitals

„ $x = 50: \alpha \leq 0{,}02321$, „ $23{,}2$ „ „ „ „

Das deutsche Reichsgesetz (s. Fußnote zu Nr. 339) enthält eine Bestimmung, die auf die Zillmersche Methode hinweist, ohne sie mit dem Namen zu bezeichnen, indem von einer Methode der Berechnung der Prämienreserve gesprochen wird, nach welcher man anfänglich

nicht die volle Prämienreserve zurückstellt; der zugehörige Satz der Verkürzung wird mit $12\frac{1}{2}‰$ begrenzt. Das hieße also, α mit $12\frac{1}{2}‰$ zu limitieren.

II. *Ausreichende Prämie und Deckungsprämie.* G. Höckner, der den Gedanken vertritt, die grundsätzliche Außerachtlassung der Verwaltungskosten bei der Deckungskapitalberechnung bedeute einen schweren wirtschaftlichen Fehler, hat den Begriff der *ausreichenden Prämie* konstruiert, die sowohl den Abschlußkosten wie den laufenden Verwaltungsauslagen Rechnung tragen soll. Bezeichnet man, wieder für den Fall der Ablebensversicherung, diese Prämie mit P_x', setzt die Abschlußkosten mit α in Einheiten des versicherten Kapitals, die laufenden Verwaltungskosten mit $\beta P_x'$, also proportional der Prämie, an, so ist durch den Rest $P_x' - \beta P_x'$ sowohl die Versicherung selbst, deren Kapital 1 ist, wie auch die Abschlußprovision α, im ganzen also $1 + \alpha$, zu decken; man hat also zur Berechnung der ausreichenden Prämie den Ansatz:

$$(P_x' - \beta P_x')\,\mathfrak{a}_x = A_x + \alpha,$$

woraus

$$P_x' = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1+\alpha}{\mathfrak{a}_x} - d\right). \tag{28}$$

Zur Prämienreserveberechnung ist dann die um die laufenden Kosten verminderte Prämie $P_x' - \beta P_x' = \frac{1+\alpha}{\mathfrak{a}_x} - d$ zu verwenden; es ergibt sich damit

$${}_mV_x = A_{x+m} - \left(\frac{1+\alpha}{\mathfrak{a}_x} - d\right)\mathfrak{a}_{x+m} = 1 - (1+\alpha)\frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}, \tag{29}$$

und dies stimmt in der Form mit der Zillmerschen Reserve überein. Die ausreichende Prämie bleibt aber für die ganze Dauer der Versicherung konstant.

Die Anwendung dieses Gedankens setzt eine Schätzung von α und β auf Grund der gemachten Erfahrungen voraus, wobei auch der zukünftigen Gestaltung Rechnung getragen werden sollte; in der letzteren Forderung liegt eine unverkennbare Schwierigkeit.

G. Engelbrecht erblickt einen Mangel darin, daß Höckner seine Prämie am Beginn der Versicherung für die ganze Dauer festsetzt; dies habe zur Folge, daß in den Verlauf des Deckungskapitals eine Unstetigkeit kommt, wenn sich im Laufe der Zeit die Notwendigkeit einer Änderung der Grundlagen herausstellt; dies aber widerspreche dem obersten Prinzip, das der Regelung der Deckungskapitalsbestimmung dienen sollte, dem Prinzip der gleichbleibenden Überschüsse.

Engelbrecht empfiehlt daher die Verwendung einer von jedem Versicherungsjahre ab festzusetzenden *Deckungsprämie,* die der Forderung zu genügen hat, daß das vorhandene Deckungskapital mit dem

Barwert der künftigen Deckungsprämien zusammen dem Barwert der künftigen Versicherungsleistungen gleichkommt. Dabei wird grundsätzlich verlangt, daß der Barwert der Überschüsse der Bruttoprämien über die Deckungsprämien im Verein mit der vorhandenen Verwaltungskostenreserve zur Bestreitung der künftigen Verwaltungsauslagen ausreiche. Über die erste Deckungsprämie aber wird derart verfügt, daß sie auch die Abschlußprovision erfaßt.

In Ausführung dieser Gedanken hat man, wenn das Deckungskapital nach $m-1$ Jahren mit ${}_{m-1}V_x''$, die zu Beginn des nächsten Jahres geltende Deckungsprämie mit ${}^{(m)}P_x$ bezeichnet wird, bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung folgende Ansätze:

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}P_x &= \frac{A_x + \alpha}{\mathfrak{a}_x} \\
{}^{(m)}P_x &= \frac{A_{x+m-1} - {}_{m-1}V_x''}{\mathfrak{a}_{x+m-1}} \qquad (30) \\
{}_1V_x'' &= A_{x+1} - {}^{(1)}P_x \mathfrak{a}_{x+1} = 1 - (1+\alpha)\frac{\mathfrak{a}_{x+1}}{\mathfrak{a}_x} \\
{}_mV_x'' &= A_{x+m} - {}^{(m)}P_x\, \mathfrak{a}_{x+m} = A_{x+m} - \frac{A_{x+m-1} - {}_{m-1}V_x''}{\mathfrak{a}_{x+m-1}}\, \mathfrak{a}_{x+m}.
\end{aligned}
$$

Die Formel für die Prämienreserve nach einem Jahr stimmt mit den Formeln nach Zillmer und Höckner überein und die Übereinstimmung mit der letzteren Rechnungsweise dauert auch weiter an, wenn die Verwaltungskosten als unveränderlich angesehen werden können und wie in dem angenommenen Falle die Prämienzahlung bis zum Ablauf der Versicherung dauert. Die Methoden gehen erst auseinander, wenn sich die Notwendigkeit einer Änderung der Grundlagen einstellt; nur entsteht dann die Frage, ob die neue Deckungsprämie in der Bruttoprämie Platz findet, sofern diese beibehalten werden soll.

III. Eine aus jüngster Zeit stammende Methode will von der Mindersterblichkeit in der Anfangsperiode Gebrauch machen, um die Mittel zur Bestreitung der ersten Unkosten zu gewinnen, und rechnet das Deckungskapital nach der Formel

$$
{}_mV_x = A_{[x]+m} - P_x\, \mathfrak{a}_{[x]+m}, \qquad (31)
$$

in welcher die Prämie P_x nach der Schlußtafel, also größer als für die Tariferstellung, bestimmt ist, während $A_{[x]+m}$, $\mathfrak{a}_{[x]+m}$ nach der Selekttafel ermittelt sind. Darum nennt ihr Autor Dawson diese in Amerika eingeführte Methode „Select and Ultimate Method“.

Ihr steht eine in England gebräuchliche Methode gegenüber, die den gleichen Zweck in anderer Weise zu erreichen sucht; sie verwendet in den ersten Jahren eine Aggregattafel (H^M) und nach Auf-

hören der Auslesewirkung eine Schlußtafel, jedoch mit Beibehaltung der nach der Aggregattafel berechneten Nettoprämie, die kleiner ist als die der Schlußtafel entsprechende.

§ 2. Prämienreserven verschiedener Versicherungskombinationen.

334. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung. Für die Prämienreserve der gewöhnlichen Todesfallversicherung gegen lebenslängliche Prämienzahlung sind in Nr. 327 mehrere Ausdrucksformen gefunden worden:

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \mathfrak{a}_{x+m} \tag{32} $$

$$ {}_mV_x = \frac{M_{x+m} - N_{x+m} P_x}{D_{x+m}} \tag{33} $$

$$ {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x)\, \mathfrak{a}_{x+m} \tag{34} $$

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}. \tag{35} $$

Vermöge (35) ist

$$ {}_{m+m'}V_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m+m'}}{\mathfrak{a}_x}, $$

folglich

$$ 1 - {}_{m+m'}V_x = \frac{\mathfrak{a}_{x+m+m'}}{\mathfrak{a}_x} = \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}\,\frac{\mathfrak{a}_{x+m+m'}}{\mathfrak{a}_{x+m}} = (1 - {}_mV_x)\,(1 - {}_{m'}V_{x+m}). $$

Hiernach hat man

$$ 1 - {}_2V_x = (1 - {}_1V_x)\,(1 - {}_1V_{x+1}) $$

$$ 1 - {}_3V_x = (1 - {}_2V_x)\,(1 - {}_1V_{x+2}) = (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1})(1 - {}_1V_{x+2}) $$

usw., so daß allgemein:

$$ {}_mV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)\,(1 - {}_1V_{x+1})\,(1 - {}_1V_{x+2}) \cdots (1 - {}_1V_{x+m-1}). \tag{36} $$

Diese Darstellung läßt erkennen, daß ${}_mV_x$ mit zunehmendem m beständig wächst, weil die binomischen Faktoren durchwegs echte Brüche sind.

Die folgende Tabelle, eine weitere Ausführung der in Nr. 306 mitgeteilten, zeigt, wie sich die Gesamtreserve von 1273 Personen im Alter von 90 Jahren, die gegen jährliche Prämienzahlung für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert sind, und wie sich deren Einzelreserve von Jahr zu Jahr entwickelt. Der aus der zitierten Tabelle herübergenommene „Rest“ bildet bereits die Gesamtreserve, und ihr Quotient, mit der Anzahl der Überlebenden als Divisor gebildet, liefert die Einzelreserve. Hiernach hat eine auf 100 lautende Police dieser Art, auf welche die jährliche Prämie von 34,12 zu zahlen ist, am Ende des ersten Jahres einen versicherungstechnischen Wert von 5,5,

am Ende des sechsten Jahres einen Wert von 27,7, am Ende des zwölften Jahres den Wert Null, da sie eben mit dem ganzen Betrag von 100 ausbezahlt wurde.

Versicherungsjahr	Überlebende	Gesamtreserve	Einzelreserve
	am Schlusse desselben		
1	871	47,50	0,055
2	575	60,71	0,106
3	366	56.86	0,155
4	222	44,09	0,199
5	129	31,02	0,240
6	71	19,66	0,277
7	37	11,42	0,309
8	19	6,88	0,362
9	9	3,83	0,426
10	4	2,14	0,535
11	1	0,63	0,63
12	0	0,00	0,000

Bisher war an konstante Prämienzahlung gedacht. Findet eine Abstufung in der Prämienzahlung statt, z. B. in der Weise, daß mit dem 6. Versicherungsjahre eine erhöhte oder ermäßigte Prämie in Kraft tritt (Nr. 311), so gestaltet sich die Prämienreserveberechnung verschieden, je nach dem Termin, für welchen sie gemacht wird. Bei $m < 5$ wird

$$_mV_x = A_{x+m} - {}_{|5}P_x \, {}_{|5-m}\mathfrak{a}_{x+m} - {}_{5|}P_x \, {}_{5-m|}\mathfrak{a}_{x+m}$$

oder, wenn man ${}_{5-m|}\mathfrak{a}_{x+m}$ ersetzt durch $\mathfrak{a}_{x+m} - {}_{|5-m}\mathfrak{a}_x$:

$$_mV_x = A_{x+m} - {}_{5|}P_x \, \mathfrak{a}_{x+m} + ({}_{5|}P_x - {}_{|5}P_x) \, {}_{|5-m}\mathfrak{a}_{x+m}; \tag{37}$$

bei $m > 5$ aber ist

$$_mV_x = A_{x+m} - {}_{5|}P_x \, \mathfrak{a}_{x+m}. \tag{37*}$$

335. Prämienreserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung bei abgekürzter Prämienzahlung. Das Alter des Versicherten sei x, die Prämienzahlung habe nach t Jahren aufzuhören. Vor Ablauf der Prämienzahlung, also bei $m < t$, ist

$$_mV_x = A_{x+m} - P_x \, {}_{|t-m}\mathfrak{a}_{x+m}, \tag{38}$$

nach Aufhören der Prämienzahlung, also bei $m \gtreqless t$

$$_mV_x = A_{x+m}. \tag{38*}$$

336. Prämienreserve der gemischten Versicherung. Das Alter des Versicherten sei x, die Versicherung sei zum Alter $x + n$ (= 50, 60, 65, 70 sind übliche Ziele) abgeschlossen und längstens bis zu diesem Alter sei die Jahresprämie

$$P_x = \frac{1}{{}_{|n}\mathfrak{a}_x} - d$$

zu zahlen.

Die Prämienreserve beträgt nach m Jahren

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= A_{x+m,\overline{n-m}|} - P_x\,{}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m} \\
&= 1 - d\,{}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m} - \left(\frac{1}{{}_{|n}\mathrm{a}_x} - d\right){}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m} \\
&= 1 - \frac{{}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m}}{{}_{|n}\mathrm{a}_x}; \qquad (39)
\end{aligned}
$$

die Formel hat dieselbe Struktur, wie die Formel (35), Nr. 334, bei der gewöhnlichen Todesfallversicherung, mit dem Unterschiede, daß die Renten bei dem Alter $x+n$ aufhören.

Bei $m=n$ wird ${}_nV_x = 1$, weil ${}_{|0}\mathrm{a}_{x+n} = 0$ ist.

Mit den Grundlagen der Tafel VII^a ergibt sich, wenn $x = 30$ und $x + n = 65$ ist,

$$
{}_{10}V_{30} = 1 - \frac{{}_{|25}\mathrm{a}_{40}}{{}_{|35}\mathrm{a}_{30}} = 1 - \frac{15{,}144}{18{,}599} = 0{,}18576,
$$

$$
{}_{20}V_{30} = 1 - \frac{{}_{|15}\mathrm{a}_{50}}{{}_{|35}\mathrm{a}_{30}} = 1 - \frac{10{,}633}{18{,}599} = 0{,}42830;
$$

auf eine Police mit der versicherten Summe 1000 entfällt also nach 10-jährigem Bestande die Reserve 185,76, nach 20-jährigem Bestande die Reserve 428,30.

337. Prämienreserve der Erlebensversicherung mit Prämienrückgewähr. Die Person (x) sei auf das Kapital 1 versichert für den Fall, daß sie das Alter $x+n$ erlebt, gegen jährliche durch die Versicherungsdauer währende Prämienzahlung mit der weiteren Bedingung, daß die eingezahlten (Brutto-) Prämien rückzuerstatten sind, wenn der Tod vor Erreichung des Termins eintreten sollte. Die Nettoprämie sei P_x, die Bruttoprämie P_x'; über die Bestimmung beider sehe man Nr. 304.

Zur Bestimmung der Prämienreserve für einen gegebenen Termin empfiehlt sich die retrospektive Methode. Nach dieser bewerten sich die Nettoeinnahmen des Versicherers im Zeitpunkte des Vertragsabschlusses mit $P_x\,{}_{|m}\mathrm{a}_x$; seine Ausgaben betragen $P_x'\,(IA)_{x,\overline{m}|}$, weil sich die Prämienrückgewähr als steigende abgekürzte Ablebensversicherung darstellt, die mit P_x' beginnt und jährlich um diesen Betrag wächst. Die auf denselben Zeitpunkt gerechnete Prämienreserve hat den Wert $\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x$. Man hat also zu ihrer Bestimmung den Ansatz:

$$
\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = P_x\,{}_{|m}\mathrm{a}_x - P_x'\,(IA)_{x,\overline{m}|}. \qquad (40)
$$

338. Prämienreserve der gemischten Versicherung mit Prämienrückgewähr. Die Prämienrückgewähr sei eine unbedingte;

dann gilt die in Nr. 313, (6) ermittelte Nettoprämie P und die aus ihr nach der dortigen Festsetzung abgeleitete Bruttoprämie P'.

Soll die Prämienreserve nach m Jahren bestimmt werden, so sind die bis dahin gemachten Prämieneinnahmen und die Ausgaben zu bewerten; für die ersteren, bezogen auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses, gilt der Ausdruck $P\,{}_{|m}a_x$; die letzteren sind mit ${}_{|m}A_x + P'(IA)_{x,\overline{m}|}$ anzusetzen, denn sie bestehen aus den Zahlungen in den bis dahin eingetretenen Todesfällen und in den Rückerstattungen der Bruttoprämien in eben diesen Fällen. Die auf denselben Zeitpunkt reduzierte Prämienreserve hat den Wert $\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x$. Man hat also zu ihrer Bestimmung die Gleichung:

$$\frac{D_{x+m}}{D_x}\,{}_mV_x = P\,{}_{|m}a_x - {}_{|m}A_x - P'(IA)_{x,\overline{m}|}. \qquad (41)$$

§ 3. Rückkauf, Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung, Abänderung.

339. Vorbemerkung. Die Tatsache, daß bei den üblichen Arten der Prämienzahlung eine Prämienreserve sich ansammelt, gebildet aus Teilen der Prämien, die über das unmittelbar zu deckende Risiko hinausgehen, löst in den Fällen, in welchen der Versicherungsvertrag einen andern als den normalen Ablauf findet, eine Reihe von Fragen aus. Diese Fragen sind darauf gerichtet, ob bei vorzeitiger Lösung des Vertrages, sei es von Seite des Versicherers, sei es von Seite des Versicherungsnehmers durch Kündigung oder Einstellung der Prämienzahlung, dem Versicherten ein Anspruch auf die seiner Police entsprechende Prämienreserve überhaupt gebührt, und wenn diese Frage Bejahung findet, wie dieser Anspruch zu bemessen ist.

Bei der Entscheidung hierüber können rechtliche Erwägungen allein nicht maßgebend sein; vielmehr muß die ganze Natur des Versicherungsgeschäftes, müssen die Voraussetzungen, auf welchen es beruht, die versicherungstechnischen Konstruktionen, die zur Bemessung der Prämie und zur Feststellung der Prämienreserve führen, dabei in Rücksicht gezogen werden.

Die Praxis hat, wie in den meisten anderen Belangen, so auch hier der Theorie vorgearbeitet und Mittel und Wege gesucht, um zu einer beide Teile befriedigenden Ordnung von Sachlagen zu gelangen, die sich aus Vertragslösungen ergeben.

Waren die Dinge bis in die jüngste Zeit der freien Übereinkunft überlassen, so sind sie gegenwärtig dort, wo der Versicherungsvertrag durch gesetzliche Regelung auf den Boden des Rechtes gestellt wurde, wenigstens in den Grundzügen unter feste Normen gestellt. Die Gesetzgebung hatte diese Normen nicht etwa erst neu zu bilden, sie

hatte vielmehr aus der Mannigfaltigkeit der gebräuchlichen Geschäftspraktiken durch sorgfältige Vergleichung und Prüfung an den Ergebnissen wissenschaftlicher Forschung das herauszugreifen, was nach den heutigen Verhältnissen und Auffassungen als rechtlich anzuerkennen ist. So enthalten denn die Gesetze und Gesetzentwürfe[1]) über den Versicherungsvertrag nur die Grundlinien, nach welchen die bei vorzeitiger Lösung des Vertrags eintretenden Aktionen des *Rückkaufs* und der *Umwandlung* des bestandenen in einen neuen prämienfreien Vertrag zu behandeln sind. Die Einzeldurchführung wird dabei in zweckmäßiger Weise dem Ermessen des einzelnen Versicherers überlassen, der allein imstande ist, sie den besonderen Verhältnissen seines Geschäftsbetriebes anzupassen; für den Schutz des Versicherten ist dadurch gesorgt, daß alle bezüglichen Bedingungen, die einen Teil der *Versicherungsbedingungen* zu bilden haben, der Genehmigung durch die dazu berufenen Behörden (Aufsichtsämter) vorbehalten sind.

340. Rückkauf. Der Rückkauf ist eine Auflösung des Versicherungsvertrages gegen Barabfindung des Versicherten. Das Recht auf Rückkauf wird nur bei solchen Versicherungen eingeräumt, bei welchen das versicherte Ereignis mit Gewißheit eintreten wird, und nur dann, wenn das Vertragsverhältnis mindestens drei Jahre bestanden hat (im deutschen Vertragsgesetz ist diese Bedingung bei einmaliger Prämie aufgehoben) und die Prämie für diesen Zeitraum gezahlt worden ist; dies die allgemeinen Grundsätze in den vorhin genannten drei Vertragsgesetzen.

Die *erste* Bestimmung hat ihren Grund in der Konstruktion der Prämie und in dem Zweck, der sich daraus für die Prämienreserve ableitet.

Als typische Fälle seien betrachtet die Erlebensversicherung und die Todesfallversicherung, beide gegen fortlaufende Prämienzahlung.

Bei der Erlebensversicherung ist die Prämie unter Berücksichtigung der vor Ablauf des Termins gemäß der verwendeten Tafel zu erwartenden Todesfälle bemessen, die mindernd auf sie einwirken. Stirbt ein Versicherter, so wird die auf ihn entfallende Prämienreserve nicht frei, dient vielmehr dazu, die Prämienreserve der Überlebenden auf die erforderliche Höhe zu bringen (Nr. 326), bis sie bei den den Termin erlebenden zur versicherten Summe anwächst. Löst

---

1) Das deutsche „Gesetz über den Versicherungsvertrag vom 7. Mai 1908“ trat am 1. Januar 1910 in Kraft; mit demselben Tage erlangte das „Bundesgesetz über den Versicherungsvertrag vom 2. April 1908“ in der Schweiz seine Rechtswirksamkeit. In Österreich steht gegenwärtig ein „Gesetz über den Versicherungsvertrag“ in parlamentarischer Verhandlung. Diese der Zeit nach zusammenfallenden Gesetzgebungswerke zeigen auch materiell ähnliches Gepräge, was bei dem internationalen Betriebe des Versicherungswesens von großer Bedeutung ist.

demnach ein Versicherter vorzeitig den Vertrag, so hat er auf die seiner Police entsprechende Prämienreserve keinen Anspruch, weil es nicht sicher ist, daß es bei Aufrechterhaltung des Vertrages zu einer Leistung des Versicherers an ihn kommen würde.

Anders steht es bei der Todesfallversicherung. Hier dient die auf eine Versicherung entfallende Prämienreserve bei dem wann immer eintretenden Tode mit zur Bestreitung der Versicherungsleistung; wird also der Vertrag gelöst, so ist der Versicherer der Verpflichtung zur Auszahlung der versicherten Summe, welche Verpflichtung bei Aufrechterhaltung des Vertrages einmal sicher eintreten würde, enthoben; die Prämienreserve wird frei, für den Versicherten erwächst daraus ein berechtigter Anspruch.

Die *zweite* Bestimmung ist zum Schutze des Versicherers gegen Verluste notwendig, die sich ergeben, wenn Versicherungsverträge gelöst werden, bevor noch die mit der Anwerbung verbundenen erheblichen Kosten abgetragen sind. Daher die gesetzliche Aberkennung eines Anspruchs des Versicherten auf seine Prämienreserve vor Ablauf von drei Jahren.

Für die Bemessung der Barabfindung, des *Rückkaufswertes*, nehmen die modernen Vertragsgesetze die Prämienreserve als Grundlage. Daß aber nicht auf die ganze Prämienreserve Anspruch erhoben werden kann, ergibt sich aus folgenden Erwägungen.

Die Versicherung steht nur als Massenunternehmen auf gesicherter Basis. Jede Schmälerung des einmal unter Aufwand von Mitteln erworbenen Umfangs bedeutet eine Erschütterung dieser wesentlichen Grundlage ihrer Rechnungen, begründet also eine Schadloshaltung des Unternehmers.

Es ist richtig, daß mit der Versicherung ein Sparvorgang verbunden ist, aus dem eben die Prämienreserve hervorgeht; aber nicht um ein persönliches Sparen des einzelnen Versicherten für seine Versicherung, sondern um ein Sparen aller für alle handelt es sich. Die Prämienreserve des Einzelnen hat nur als Durchschnittswert einen Sinn; die für seine speziellen Verhältnisse wirklich notwendige Reserve läßt sich nicht bestimmen, weil sich diese Verhältnisse der Kenntnis, jedenfalls aber der Bewertung entziehen. Bei der Vertragslösung, hier dem Rückkauf, kommen aber neben wirtschaftlichen auch persönliche Momente ins Spiel, und es läßt sich die Vermutung nicht von der Hand weisen, daß diese letzteren in der Mehrzahl der Fälle zu ungunsten des Versicherers ausschlagen. Personen, die sich einer guten Gesundheit erfreuen und darum noch nicht mit dem Tode zu rechnen brauchen, werden sich leichter zum Rückkauf entschließen, als solche, die wegen erschütterter Gesundheit wenig Hoffnung auf ein langes Leben haben; die ersteren fühlen auch noch, daß sie, wenn es ihre wirtschaftliche Lage gestatten sollte, später eine neue Ver-

sicherung eingehen können, die letzteren müßten mit einer Ablehnung rechnen. Rückkäufe lassen also wegen der dabei, wenn auch zum Teil unbewußt geübten *Antiselektion* eine Verschlechterung des Risikengemisches befürchten. Untersuchungen über den Sterblichkeitsverlauf der Rückkäufer, die geeignet wären, ein Maß für die finanziellen Folgen der Rückkäufe gewinnen zu lassen, sind schwer ausführbar, weil mit der Auflösung des Vertrages die weitere Beobachtungsmöglichkeit aufhört oder doch sehr erschwert wird. Ansätze in diesem Sinne sind schon gemacht worden.[1])

Mit der Lösung des Vertrags und dem damit verbundenen Aufhören der Prämienzahlung ist der Versicherer des weiteren geschädigt, weil ihm Verwaltungszuschläge und Gewinnaussichten verloren gehen, mit denen er bei Abschluß des Vertrages rechnen konnte.

Aus all dem geht hervor, daß Rückkaufswert — und das wäre der eigentliche Zeitwert der einzelnen speziellen Police — und Prämienreserve nicht identisch sein können, daß der Versicherer berechtigt sei, sich durch einen Abzug an derselben schadlos zu halten.

Wie dieser Abzug zu bemessen ist, dafür lassen sich bei der Verschiedenheit der maßgebenden Umstände allgemeine Regeln nicht angeben. Als Anhaltspunkt könnte die folgende Erwägung dienen. Ist die Nettoreserve bestimmt, denkt man sich die ersten Unkosten α auf die ganze Dauer der Prämienzahlung gleichmäßig verteilt, den Entgang an Verwaltungskosten und Zinsgewinn mit einem Bruchteil β der Bruttoprämie P_x veranschlagt, so wäre der Abzug von der Prämienreserve, wenn der Rückkauf m Jahre nach Abschluß der Versicherung erfolgt, als Barwert der noch ausständigen Prämienteile $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x} + \beta P_x'$ mit $\left(\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x} + \beta P_x'\right) \mathrm{a}_{x+m}$ zu bestimmen. Ist hingegen auf die ersten Unkosten schon bei der Legung der Prämienreserve Rücksicht genommen (s. Nr. 333, I), dann entfällt der darauf bezügliche Teil und der Abzug beträgt dann bloß $\beta P_x' \mathrm{a}_{x+m}$.[2])

In dem Entwurf zum schweizerischen Bundesgesetz war die auch in den deutschen Gesetzentwurf übernommene Bestimmung getroffen, der Abzug solle mit 3% der versicherten Summe bemessen werden. Die fachmännische Kritik wandte sich gegen diese oder eine ähnliche

---

1) So von J. Fredholm (Berichte etc. des V. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch., Berlin 1906, II. Bd., p. 137—140); seine Ergebnisse gestatten aber kein abschließendes Urteil, weil die Fälle, die sich der weiteren Verfolgung entzogen hatten, ganz wohl eine wesentliche Änderung der Resultate herbeiführen könnten, die in der vorliegenden Form das Vorhandensein einer nachteiligen Antiselektion eher bezweifeln ließen.

2) C. Landré, Mathem.-techn. Kapitel zur Lebensversich., 3. Aufl., Jena 1905, p. 393, bezeichnet 8% bei Nettoreserve, 5% bei Zillmerreserve als eine mögliche Wahl für β. Vgl. hierzu Veröffentl. d. deutschen Vereins f. Versich.-Wissensch., Heft I (1903), p. 88—97.

Festsetzung, da damit den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprochen sei, die überhaupt eine allgemein geltende Regelung nicht vertrügen. Tatsächlich sprechen die beiden in Wirksamkeit getretenen Vertragsgesetze und der österreichische Gesetzentwurf nur die Berechtigung zu einem Abzug aus, überlassen aber seine Festsetzung in jedem einzelnen Falle den Versicherungsbedingungen. Das deutsche Gesetz fügt hinzu: „Ist für den Abzug mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde in den Versicherungsbedingungen ein bestimmter Betrag festgesetzt, so gilt dieser als angemessen."

Die zwei üblichsten Arten der Bemessung des Abzuges an der Prämienreserve bestehen in der Stipulierung eines festen Prozentsatzes einerseits und in der Aufstellung einer mit der wachsenden Prämienreserve sinkenden Prozentskala.[1]) Es ist vielfach üblich, die Rückkaufswerte für eine Reihe abgelaufener Versicherungsdauern in die Police aufzunehmen, so daß der Versicherte über den Wert seiner Versicherung zu verschiedenen Zeiten von vornherein im Klaren ist.

341. Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung. Bei der Umwandlung wird der Versicherungsvertrag unter derart geänderten Bedingungen weiter geführt, daß für den Versicherten jede weitere Prämienzahlung aufhört, während dementsprechend der Versicherer die ursprünglich vereinbarten Leistungen (versicherte Summe, Rente; Versicherungsdauer) reduziert.

Die Zulassung der Umwandlung ist ein Gebot der Notwendigkeit, da bei so langfristigen Verträgen in den Verhältnissen des Versicherten leicht solche Änderungen eintreten können, die ihm die weitere Prämienzahlung unmöglich machen, während er gerade dann auf möglichste Erhaltung der mit der eingegangenen Versicherung verbundenen Vorteile sehen muß.

Das Recht auf Umwandlung kann allen Versicherungskombinationen gegenüber geübt werden; doch schreiben die erwähnten Vertragsgesetze und der österreichische Entwurf auch hier eine Wartefrist von drei Jahren vor, während welcher die Prämien gezahlt sein müssen.

Als Grundlage für die Bemessung der abgeänderten Leistungen des Versicherers hat die zur Zeit der Umwandlung (das deutsche Gesetz verlegt diese an das Ende der laufenden Versicherungsperiode [Versicherungsjahr]) vorhandene Prämienreserve zu dienen.[2]) Doch

1) Das noch geltende österreichische Versicherungsregulativ (Verordnung vom 5. III. 1896) bestimmt in § 12, daß der Rückkaufswert entweder in einem konstanten Verhältnis zur Prämienreserve gehalten werden könne und dann mindestens 75 % derselben zu betragen habe, oder daß er in bis zur vollen Reserve steigender Skala zu bestimmen sei, die mit wenigstens 60 % zu beginnen habe.

2) Die Bestimmung der reduzierten Versicherungssumme wird mitunter auch auf eine andere Basis gestellt und beispielsweise bei der gemischten Versicherung nach dem Verhältnis der abgelaufenen zur vereinbarten Versicherungsdauer vorgenommen (s. weiter unten).

räumen die Vertragsgesetze auch hier das Recht auf eine Kürzung ein, deren Ausmaß sie den der Genehmigung unterliegenden Versicherungsbedingungen überlassen.[1]) Die Kürzung ist hier hauptsächlich durch den Umstand begründet, daß dem Versicherer wegen des Aufhörens der Prämienzahlung die ferneren Zuschläge entgehen.

Die Umwandlung geschieht entweder über Verlangen des Versicherten oder *automatisch*, wenn ihm wegen unterbliebener Prämienzahlung der Vertrag seitens des Versicherers gekündigt worden. Unter gewissen Voraussetzungen ist mitunter nach vollzogener Umwandlung eine *Reaktivierung* der ursprünglichen Versicherung zulässig.

Das versicherungstechnische Prinzip der Umwandlung besteht darin, die neue beitragsfreie Versicherung derart zu gestalten, daß ihr Barwert der den Versicherungsbedingungen entsprechend gekürzten Prämienreserve gleichkommt. Maßgebend für diese Rechnung sind das Alter und (nach dem deutschen Vertragsgesetz) die Rechnungsgrundlagen *zur Zeit der Umwandlung*, so daß, wenn seit Abschluß der Versicherung eine Änderung dieser Grundlagen erfolgt ist, bei der Umwandlung die neuen Grundlagen zur Verwendung kommen.

Wenn in den folgenden Beispielen unter ${}_tV_x$ die *volle* Nettoprämienreserve verstanden wird, die nach t Versicherungsjahren, also nach Bezahlung von t ganzen Jahresprämien vorhanden ist, so geschieht dies wegen des theoretischen Interesses, das den unter dieser Annahme entstehenden Resultaten zukommt. In der Praxis wird unter ${}_tV_x$ die im Sinne der Bedingungen gekürzte Reserve zu verstehen sein, sofern sich die Umwandlung überhaupt auf die Prämienreserve stützt.

Erstes Beispiel. Eine Erlebensversicherung auf das Kapital 1, lautend auf das Leben (x) und fällig nach n Jahren, wird nach Bezahlung von t Prämien von der *(Netto-)* Höhe

$$P_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

aufgegeben; es ist das reduzierte Kapital ${}_tW$ zu bestimmen.

Nach dem oben aufgestellten Grundsatze muß

$${}_tW\,{}_{n-t}E_{x+t} = {}_tV_x$$

sein, woraus sich

$${}_tW = \frac{{}_tV_x}{{}_{n-t}E_{x+t}} \tag{42}$$

ergibt.

1) Das vorhin zitierte österreichische Versicherungsregulativ verlangt noch die Zugrundelegung der *vollen* Reserve. Der Gesetzentwurf behält die bezüglichen Bestimmungen den der behördlichen Genehmigung unterliegenden Versicherungsbedingungen vor.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Vorganges durch folgende Betrachtung überzeugen.

Die sukzessiven jährlichen Einzahlungen des Versicherten können als einmalige Prämien für bestimmte Anteile des versicherten Kapitals angesehen werden; auf diese Anteile hat der Versicherte einen rechtlichen Anspruch, *wenn er den versicherten Zeitpunkt erlebt.*

Mit der ersten Prämie P_x sichert sich (x) das Kapital

$$\frac{P_x}{{}_nE_x},$$

da er mit ${}_nE_x$ sich das Kapital 1 sichern würde; die zweite Prämie begründet den Anspruch auf die Summe

$$\frac{P_x}{{}_{n-1}E_{x+1}},$$

die dritte auf

$$\frac{P_x}{{}_{n-2}E_{x+2}},$$

usw. die t-te Prämie auf

$$\frac{P_x}{{}_{n-t+1}E_{x+t-1}};$$

wenn hier die Zahlung aufhört, so hat (x) im Alter $x+n$ Anspruch auf das Kapital

$$\begin{aligned} {}_tW &= P_x\left\{\frac{1}{{}_nE_x}+\frac{1}{{}_{n-1}E_{x+1}}+\frac{1}{{}_{n-2}E_{x+2}}+\cdots+\frac{1}{{}_{n-t+1}E_{x+t-1}}\right\} \\ &= P_x\left\{\frac{D_x}{D_{x+n}}+\frac{D_{x+1}}{D_{x+n}}+\frac{D_{x+2}}{D_{x+n}}+\cdots+\frac{D_{x+t-1}}{D_{x+n}}\right\} \\ &= P_x\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+n}}=\frac{N_x-N_{x+t}}{N_x-N_{x+n}}.\text{[1]} \end{aligned}$$

---

1) Schreibt man diese Gleichung in der Form

$${}_tW=\frac{D_x+\cdots+D_{x+t-1}}{D_x+\cdots+D_{x+n-1}}=\frac{1}{1+\dfrac{D_{x+t}+\cdots+D_{x+n-1}}{D_x+\cdots+D_{x+t-1}}}$$

und beachtet, daß wegen des Fallens der Zahlen D_x mit zunehmendem Zeiger

$$D_{x+t}+\cdots+D_{x+n-1}<(n-t)D_{x+t}$$
$$D_x+\cdots+D_{x+t-1}>tD_{x+t}$$

ist, so folgt daraus

$${}_tW>\frac{1}{1+\dfrac{n-t}{t}}=\frac{t}{n};$$

die Bestimmung der reduzierten Versicherungssumme nach dem Verhältnis der abgelaufenen zur vereinbarten Versicherungsdauer führt also zu einem kleineren Betrag, als er sich aus der vollen Prämienreserve ergibt.

Nun ist nach Nr. 327, (δ),

$$\frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+n}} {}_tV_x$$

und

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} = {}_{n-t}E_{x+t},$$

folglich in der Tat

$${}_tW = \frac{{}_tV_x}{{}_{n-t}E_{x+t}}.$$

Zweites Beispiel. Eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf das Kapital 1 für das Leben (x) wird nach t Prämienzahlungen von dem *(Netto-)* Betrage P_x storniert; auf welches Kapital hat die beitragsfreie Police zu lauten?

Dieses Kapital ${}_tW$ ergibt sich aus dem Ansatze:

$${}_tW A_{x+t} = {}_tV_x$$

mit

$${}_tW = \frac{{}_tV_x}{A_{x+t}}.$$

Da nun [Nr. 334, (22)] ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \mathrm{a}_{x+t}$ und $\frac{A_{x+t}}{\mathrm{a}_{x+t}} = P_{x+t}$ ist, so hat man in anderer, bemerkenswerter Darstellung:

$${}_tW = 1 - \frac{P_x}{P_{x+t}}. \tag{43}$$

Stellt beispielsweise eine Person, die sich mit 30 Jahren versichert hat, nach 20 Jahren die Prämienzahlung ein, so erhält sie nach den Grundlagen der Tafel VIII eine beitragsfreie Police, lautend auf

$${}_{20}W = 1 - \frac{P_{30}}{P_{50}} = 1 - \frac{0{,}01762}{0{,}03675} = 0{,}5805,$$

d. h. auf 58% des ursprünglichen Kapitales; in praxi etwas weniger.

Die Formel (43) ist ein spezieller Fall einer allgemeinen Formel, die mit gewissen Einschränkungen für alle Versicherungsarten gilt.

Ist P die jährliche gleichbleibende Prämie für eine Versicherung, ${}^tP$ die Prämie, die für *dieselbe* Versicherung gezahlt werden müßte, wenn der Abschluß t Jahre später erfolgte, so würde sich die Person, wenn sie von da ab die Prämie ${}^tP$ zahlte, das Kapital 1, durch die Prämie 1 also das Kapital $\frac{1}{{}^tP}$ sichern; da aber die Prämie P in Kraft ist, so ist durch ihre weitere Zahlung das Kapital $\frac{P}{{}^tP}$ gesichert, das jedoch entfällt, wenn die Prämienzahlung zu der angegebenen Zeit aufhört: folglich ist das reduzierte Kapital:

$${}_tW = 1 - \frac{P}{{}^tP}. \tag{44}$$

Die Formel ist nicht anwendbar, wenn der versicherte Vorteil sich mit der Zeit ändert, wie bei Prämienrückgewähr, oder wenn die Prämie veränderlich ist; sie setzt voraus, daß ${}^tP$ so lange läuft, als dies bei P der Fall wäre, wenn die Prämienzahlung vertragsmäßig fortdauerte.

Demnach ist bei einer auf n Jahre abgekürzten Prämienzahlung bei lebenslänglicher Todesfallversicherung

$$ {}_tW = 1 - \frac{{}_nP_x}{{}_{n-t}P_{x+t}}, $$

wobei ${}_nP_x = \frac{A_x}{{}_{|n}a_x}$.

Bei einer durch n Jahre aufgeschobenen Leibrente vom Jahresbetrage 1, wenn die für die Aufschubszeit vereinbarte Prämienzahlung nach t Jahren eingestellt wird, ist der reduzierte Rentenbetrag ${}_tW$ gleichfalls nach Formel (44) zu rechnen; dabei ist, wenn x das Alter der Person bei Begründung der Rente,

$$ P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, $$

$$ {}^tP = \frac{N_{x+n}}{N_{x+t} - N_{x+n}}; $$

folglich wird

$$ {}_tW = 1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}. $$

Wenn also beispielsweise ein 30-jähriger sich eine mit dem vollendeten 60. Lebensjahre beginnende Altersrente von 500 versichert, nach 20 Jahren jedoch zur Einstellung der Prämienzahlung genötigt ist, so wird ihm die Rente auf

$$ {}_{20}W = \frac{N_{30} - N_{50}}{N_{30} - N_{60}} 500 = \frac{436\,490}{540\,359} 500 = 403{,}88 $$

reduziert; dabei sind die Grundlagen der Tafel VIII benutzt worden.

342. Abänderung einer Versicherung. Neben der Umwandlung einer Versicherung auf Prämienfreiheit ergeben sich aus dem Wechsel in den wirtschaftlichen Verhältnissen und Bedürfnissen der Versicherten noch verschiedene andere Transaktionen, die man auch als Umwandlungen oder *Abänderungen* der ursprünglichen Versicherung bezeichnen kann. Es handelt sich dabei um eine Änderung der Versicherungssumme, oder um den Übergang zu einer andern Versicherungskombination, zu einer andern Versicherungsdauer, zu einem andern Modus der Prämienzahlung, nachdem die Versicherung schon eine Zeitlang in Kraft war.

Das Prinzip, nach welchem dabei vorgegangen wird, besteht darin, daß man die Summe aus der zur Zeit der Abänderung vorhandenen Prämienreserve und dem Werte der künftigen Prämienzahlungen gleichsetzt dem auf diese Zeit bezogenen Werte der eventuell abgeänderten Versicherung. Aus dieser Gleichung berechnet sich die unbekannte Größe. Mitunter wird die Prämienreserve mit einem etwas gekürzten Betrage (Abänderungsspesen) in die Rechnung gestellt. Noch ist zu bemerken, daß bei angesuchter Umwandlung eine ärztliche Untersuchung verlangt wird, wenn sich das Risiko des Versicherers erhöht, wie etwa bei Erhöhung der Versicherungssumme, bei dem Übergang von einer kurzen Todesfallversicherung zu einer lebenslänglichen oder zur gemischten u. ä.

Zur Erläuterung des Vorganges mögen die folgenden Beispiele dienen.

Erstes Beispiel. Eine durch n Jahre in Kraft stehende, ursprünglich auf das Leben (x) abgeschlossene Todesfallversicherung mit dem Kapitale c soll in eine ebensolche Versicherung auf das größere Kapital C umgewandelt werden; es ist die weiterhin zu zahlende Nettoprämie P' zu bestimmen.

Dem obigen Grundsatze gemäß hat man die Gleichung

$$c\,{}_nV_x + \mathfrak{a}_{x+n} P' = C A_{x+n}$$

zu bilden; darin ist nun, wenn P die ursprüngliche Jahresprämie war, ${}_nV_x = A_{x+n} - \mathfrak{a}_{x+n} P$; nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$P' - P = \frac{A_{x+n}}{\mathfrak{a}_{x+n}} (C - c). \tag{45}$$

Diese Formel hätte unmittelbar hingeschrieben werden können; sie besagt, daß die Prämienerhöhung gleich ist der vom Zeitpunkte der Abänderung an zahlbaren Prämie für die Kapitalserhöhung.

Bei $C < c$ ergäbe die Formel den Prämiennachlaß.

Zweites Beispiel. Nach n-jährigem Bestande soll eine Todesfallversicherung mit lebenslänglich bedungener Prämienzahlung derart abgeändert werden, daß die Prämienzahlung bei dem Alter t aufhört, d. h. daß am Beginne des t-ten Lebensjahres die letzte Prämie gezahlt wird. Es handelt sich um deren Höhe P'.

Aus dem Ansatze

$${}_nV_x + {}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x+n} P' = A_{x+n};$$

wenn man darin ${}_nV_x$ durch $A_{x+n} - \mathfrak{a}_{x+n} P$ ersetzt, wobei P die alte Prämie bedeutet, ergibt sich:

$$P' = \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{{}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x+n}} P = \frac{N_{x+n}}{N_{x+n} - N_t} P \tag{46}$$

Die Prämienerhöhung macht

$$P' - P = \frac{N_t}{N_{x+n} - N_t} P$$

aus.

Wird z. B. bei $x = 30$ nach $n = 20$-jährigem Bestande die Prämienzahlung zum Alter $t = 70$ abgekürzt, so beträgt die neue Prämie nach den Grundlagen der Tafel VIII

$$P' = \frac{N_{50}}{N_{50} - N_{70}} P = \frac{184\,709}{159\,181} P = 1{,}1603\, P;$$

die frühere Prämie erhöht sich also um 16% ihres Betrages.

Drittes Beispiel. Die lebenslängliche Todesfallversicherung soll n Jahre nach Abschluß in eine gemischte Versicherung zum Alter $t\,(> x + n)$ umgewandelt werden; zu bestimmen ist die neue Prämie P'.

Dieselbe ist zu rechnen aus dem Ansatze:

$${}_nV_x + {}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x+n} P' = A_{x+n,\overline{t-x-n|}};$$

ersetzt man ${}_nV_x$ durch seinen Wert $1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x}$ und $A_{x+n,\overline{t-x-n|}}$ durch $1 - d\,{}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x+n}$, so ergibt sich:

$$P' = \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} \frac{1}{{}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x-n}} - d;$$

der alten Prämie

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d$$

gegenüber besteht also der Unterschied

$$P' - P = \frac{\mathfrak{a}_{x+n}}{\mathfrak{a}_x} \left[\frac{1}{{}_{|t-x-n}\mathfrak{a}_{x+n}} - \frac{1}{\mathfrak{a}_{x+n}} \right]. \tag{47}$$

Mit den Daten des vorigen Beispieles: $x = 30$, $n = 20$, $t = 70$ liefert Tafel VIII:

$$P' = \frac{14{,}172}{19{,}441}\, 0{,}081881 - 0{,}03382 = 0{,}02583;$$

dagegen war

$$P = 0{,}01762;$$

folglich ist $\frac{P'}{P} = 1{,}4659$, d. h. die frühere Prämie erfährt infolge der Abänderung einen Aufschlag von 46,6%.

Viertes Beispiel. Eine durch n Jahre aufgeschobene Rente auf das Leben (x) soll während der Aufschubzeit, t Jahre nach erfolgtem Abschluß, unter Einstellung der Prämienzahlung in eine sofort beginnende Leibrente umgewandelt werden; es ist der jährliche Betrag r der letzteren zu bestimmen, wenn 1 der Betrag der ursprünglichen Rente war.

Zur Lösung dieser Aufgabe hat man den Ansatz:

$$ {}_tV_x = r\mathrm{a}_{x+t}; $$

da nun

$$ {}_tV_x = \frac{D_x}{D_{x+t}} \,|\, {}_t\mathrm{a}_x P_x = \frac{D_x}{D_{x+t}} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

und

$$ \mathrm{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}, $$

so ergibt sich

$$ r = \frac{N_{x+n}}{N_{x+t}} \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{48} $$

Hat also eine 30-jährige Person sich eine mit vollendetem 60. Lebensjahre beginnende Altersrente von 500 gegen jährliche Prämienzahlung versichert, und befindet sie sich nach Ablauf von 20 Jahren in der Lage, die Prämienzahlung einstellen und sofortige Flüssigmachung der Rente verlangen zu müssen, so wird die Rente nur mehr den Jahresbetrag von

$$ r = \frac{N_{60}}{N_{50}} \frac{N_{30} - N_{50}}{N_{30} - N_{60}} 500 = \frac{80\,839{,}8}{184\,709} \frac{436\,490}{540\,359} 500 = 176{,}76 $$

erreichen, wenn mit den Grundlagen der Tafel VIII gerechnet wird (vgl. hiermit das Schlußbeispiel in Nr. 341).

IV. Abschnitt. Das Risiko in der Lebensversicherung.

343. Kennzeichnung des Problems. Wir gehen von einem dem Zufall unterliegenden Massenunternehmen aus, von dem wir annehmen, daß die Wahrscheinlichkeiten der entscheidenden Ereignisse a priori auf objektiver Grundlage festgestellt sind, so daß ihnen auch objektive Bedeutung zukommt. Wir nehmen ferner an, daß Preis und Einsatz nach der Regel von der mathematischen Hoffnung geordnet seien. Als einfachsten Typus eines solchen Unternehmens denken wir uns Ziehungen aus einer Urne, die mit weißen und schwarzen Kugeln derart gefüllt ist, daß dem Ziehen einer weißen (schwarzen) Kugel die Wahrscheinlichkeit p ($q = 1 - p$) zukommt; während der Ziehungen, die s Personen, welche dem Unternehmer gegenüberstehen, einzeln ausführen, wird der gleichbleibende Inhalt der Urne derart in Bewegung erhalten, daß den einzelnen Kugeln gleiche Gelegenheit zu erscheinen geboten ist; als Gegenleistung für den auf das Ziehen einer schwarzen Kugel ausgesetzten Preis A erlegt jede der s Personen den Einsatz qA.

Zu Beginn des Unternehmens, bevor noch mit den Ziehungen begonnen worden, besteht für den Unternehmer die Möglichkeit zu gewinnen oder zu verlieren, also die Aussicht auf einen Gewinn und die Gefahr eines Verlustes. Die *einzige* Quelle dieser Möglichkeit ist die *zufällige Abweichung* des wirklichen Ziehungserfolges von dem mit größter Wahrscheinlichkeit zu erwartenden.

Gefährdet ist das Unternehmen durch die Verlustmöglichkeit, weil aus ihr die Unmöglichkeit der vollen Befriedigung der Ansprüche folgt. Als ein Maß dieser Verlustgefahr kann das durchschnittliche Risiko R oder das mittlere Risiko M genommen werden, das sich nach Nr. 124, bzw. 125 mit

$$R = A\sqrt{\frac{spq}{2\pi}}$$

$$M = A\sqrt{spq}$$

bewertet; und zwar ist der Sinn dieser Größen der, daß der Verlust, *wenn* ein solcher eintritt, den Betrag kR, bzw. kM, mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \Phi\left(\frac{k}{2\sqrt{\pi}}\right), \quad \text{bzw.} \quad = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

nicht überschreiten werde.

Bringt also der Unternehmer einen Fonds in der Höhe kR, resp. kM auf, so ist er gegen das „Risiko aus der zufälligen Abweichung des wirklichen Verlaufs von dem am wahrscheinlichsten zu erwartenden" für den Fall, daß diese Abweichung einen Verlust herbeiführen sollte, mit eben derselben Wahrscheinlichkeit geschützt. Wollte er mit Gewißheit dagegen geschützt sein, so müßte er einen Fonds besitzen, der ihn auch in dem ungünstigsten Fall, da *alle* s Personen schwarz ziehen, in die Lage versetzt, die Auszahlungen zu leisten. Damit ist das Maximum des Risikos erreicht.

Von diesem extremen Fall absehend, wird der Unternehmer die Sache so einrichten, daß er von jeder der beteiligten Personen einen *Zuschlag* δ zum Einsatz einhebt; er bringt dadurch einen Sicherheitsfonds im Betrage $s\delta$ auf, und dieser reicht für den Fall einer verlustbringenden Abweichung mit einer Wahrscheinlichkeit aus, die sich aus den obigen Ausdrücken ergibt, wenn man für k den Quotienten $\frac{s\delta}{R}$, bzw. $\frac{s\delta}{M}$ setzt.

Aus dem Zuschlag erwächst dem Unternehmer die Aussicht auf einen Gewinn selbst dann, wenn eine für ihn ungünstige Abweichung vom wahrscheinlichsten Fall eintreten sollte, die den Fonds $s\delta$ nicht erschöpft; um so größer würde sein Gewinn ausfallen, wenn die Abweichung selbst günstig und daher gewinnbringend werden sollte. Mit Rücksicht auf diese Sachlage verpflichte sich der Unternehmer, nach

beendetem Spiele den eventuell verbleibenden Gewinn zur Gänze unter die beteiligten Personen zu verteilen.

Der Vergleich dieses Idealbildes von einem Unternehmen, dessen wesentlicher Charakter in der Abhängigkeit vom Zufall liegt, mit einem Versicherungsunternehmen, dem ja auch dieser Charakter eigen ist, läßt eine Reihe von unterscheidenden Merkmalen erkennen, auf die man eingehen muß, um die veränderte Sachlage würdigen zu können.

In erster Linie sind hier die maßgebenden Ereignisse nicht solcher Art, daß eine auf objektiver Grundlage a priori festgestellte Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Vielmehr stehen nur Erfahrungsquotienten über die relative Häufigkeit ihres Eintreffens zur Verfügung, denen die Natur apriorischer Wahrscheinlichkeiten im besten Falle nur angenähert zukommt (s. vierter Teil, §§ 1, 2). Bei der Wahl dieser Erfahrungsdaten, der statistischen Grundlagen (Nr. 255), muß man immer darauf gefaßt sein, daß der Personenkomplex, dem sie entnommen sind, nicht gleichartig sein werde demjenigen, auf den man sie anwendet. Von *zutreffenden* Grundlagen wird also so gut wie niemals die Rede sein können, selbst dann nicht, wenn sie aus den eigenen Erfahrungen abgeleitet sind. Man hat also nicht bloß mit den zufälligen, sondern auch mit *systematischen* Abweichungen der künftigen Ereignisse von den Grundlagen zu rechnen.

Das Versicherungsgeschäft bedarf ferner zur Abwicklung der einzelnen Verträge langer Zeiträume, die bis zur Maximaldauer des Menschenlebens reichen können. Während dieser Zeiträume müssen die verfügbaren Geldmittel, soll von einer wirtschaftlichen Einrichtung gesprochen werden können, verzinst werden; mit dieser Verzinsung wird bei der Bemessung der Prämien gerechnet. Der *Zinsfuß* ist aber keine feststehende Größe, er ist vielmehr beständigen kleinen und außerdem im Laufe längerer Zeiträume erheblicher ins Gewicht fallenden Schwankungen und Bewegungen unterworfen. Dazu kommt, daß auch manche Anlagewerte Änderungen ausgesetzt sind (Nr. 256).

Die Führung des Geschäftes verursacht Kosten, für deren Bedeckung durch *Zuschläge* zu den Prämien gesorgt wird. Die Kosten aber sind nicht gleichbleibend; da sie der Hauptsache nach in der Entlohnung von Menschenarbeit bestehen, ändern sie sich mit den allgemeinen wirtschaftlichen Verhältnissen.

In all den vorgeführten unterscheidenden Umständen liegen Quellen von Verlust oder Gewinn. Die Praxis ist der Gefahr von Verlusten dadurch begegnet, daß sie die statistischen Grundlagen, den Zinsfuß und die Zuschläge so gewählt hat, daß sie in Zeiten normalen, d. h. von ausgesprochenen Besonderheiten freien Verlaufs zu sicheren Gewinnquellen werden. Die Lebensversicherung rechnet also mit einem Sterblichkeitsgewinn, einem Zinsgewinn und einem Gewinn aus den Zuschlägen.

Die erzielten Überschüsse dienen nun in der Hauptsache folgenden Zwecken:

1. Der Bildung von Sicherheitsreserven (Extrafonds, stille Reserven), dazu bestimmt, zeitweiligen ungünstigen Bewegungen in den maßgebenden Elementen: Sterblichkeit, Zinsfuß, Verwaltungsauslagen, standzuhalten;
2. der Verzinsung des Aktienkapitals (bei Aktiengesellschaften);
3. der Ausschüttung von Dividenden (Bonus) an die Versicherten.

In der Dividende erkennt die moderne Betriebsform einen Regulator, der die Anpassung an die in systematischer Änderung begriffenen Faktoren des Rechnungswesens ermöglicht.

Es entsteht nun die Frage, welche *Aufgaben der Risikotheorie* im Versicherungswesen angesichts der geschilderten Sachlage zukommen.

Als wesentlichste dieser Aufgaben wird auch heutigen Tags die rechnungsmäßige Bestimmung desjenigen Fonds hingestellt, der neben den normalen Fonds notwendig ist, um das Unternehmen gegen die Folgen eines eventuellen Verlustes aus Abweichungen von den Rechnungselementen mit einem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsgrade zu schützen; er möge daher als *Risikofonds* bezeichnet werden.

Zur Lösung einer so weit gefaßten Aufgabe ist aber die Risikotheorie nicht geeignet; denn sie ruht auf dem Boden der zufälligen Ereignisse in dem eingangs dargelegten Sinne. Die Änderungen des Zinsfußes und der Verwaltungskosten tragen aber nicht den Charakter des Zufälligen an sich, das Systematische waltet hier vor.

Es verbleibt also die Sterblichkeit als Feld der Betätigung der Risikotheorie. Da jedoch die einem Unternehmen zugrunde gelegte Tafel wohl nie als zutreffend in dem Sinne gelten kann, daß die Abweichungen von ihr als rein zufällig anzusehen wären, so wird auch dieser Teil der Aufgabe eine Einschränkung erfahren müssen, die etwa so formuliert werden kann: Gesetzt, die Sterbetafel sei zutreffend, welcher Fonds wäre dann erforderlich, damit das Unternehmen gegen mögliche Verluste aus den Sterblichkeitsschwankungen mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit gesichert sei?

Dieser Fonds, der aber selbst bei Zutreffen dieser Voraussetzung nur gegen einen Teil der Verlustgefahr schützen kann, wäre passend als *Sterblichkeitsschwankungsfonds* zu bezeichnen.

Formell wäre hiermit das Versicherungswesen, wenigstens was die wesentlichste Seite seiner Natur betrifft, auf den Boden der Risikotheorie übertragen; man wird aber aus dem Vorstehenden die Überzeugung gewinnen, daß diese Übertragung sachlich nicht vollkommen begründet ist. Indessen steht es mit den Anwendungen der reinen Theorie auf die Wirklichkeit in der Regel so.

Die Frage, ob ein so festgestellter Fonds bei dem wirklichen Stande der Dinge von *praktischer* Bedeutung wäre, ist wohl zu ver-

neinen. Doch muß es von allgemeinem Interesse sein, zu erfahren oder sich Rechenschaft darüber zu legen, wie groß der zur Deckung des aus den zufälligen Sterblichkeitsschwankungen allein drohenden Verlustes nötige Fonds etwa sein müßte, um darnach zu beurteilen, ob er in den wirklich vorhandenen Sicherheitsfonds genügenden Raum findet.

Diese Anwendung wird, wie bereits bemerkt, gewöhnlich in den Vordergrund gestellt. Wichtiger aber scheint der Umstand zu sein, daß die Risikotheorie zu einer eingehenden Analyse der Vorgänge im Versicherungswesen Anlaß gibt und die Grundlage für die wissenschaftliche Aufklärung mancher durch die Praxis festgestellter Tatsachen und für die Beantwortung verschiedener seinen Betrieb betreffenden Fragen bildet.

Auf dieser Basis ist es beispielsweise möglich, die verschiedenen Versicherungsformen auf die mit ihnen verbundene Verlustgefahr zu vergleichen; den Einfluß zu untersuchen, den die Höhe und Verteilung der Versicherungssummen, der Umfang des Geschäftes auf die Verlustgefahr üben; man hat auch versucht, auf Grund der Risikotheorie einen Maßstab für die Sicherheit oder *Stabilität* eines Versicherungsunternehmens abzuleiten. Wenn auch die Praxis von all dem einen direkten Gebrauch bisher kaum gemacht hat, so darf in diesen theoretischen Fragestellungen und Untersuchungen doch ein Gewinn für die Versicherungswissenschaft erblickt werden, der wie jeder andern mit der Praxis verbundenen Disziplin das Recht zusteht, über das unmittelbare Bedürfnis dieser hinauszugehen.

344. Elemente des Risikos. Durch das Vorstehende ist festgestellt, daß sich die Theorie mit der Verlusterwartung zu befassen hat, die aus der Abhängigkeit der Versicherung vom Zufall, soweit er das Sterben betrifft, entspringt. Man hat das aus dieser Quelle stammende Risiko auch als *Zufallsrisiko* bezeichnet.

Da das Risiko ein Maß der Verlustgefahr zu bilden hat, so wird es sich darum handeln, worauf sich die Verluste beziehen und aus welcher Zeit sie stammen.

In ersterer Beziehung sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden: Das *Risiko der einzelnen Versicherung* und das *Risiko eines ganzen Versicherungsbestandes.*

Dem Risiko der einzelnen Versicherung kommt vom Standpunkte des Versicherers eine selbständige Bedeutung nur mit derselben Einschränkung zu wie der einzelnen Prämie und der einzelnen Prämienreserve, nämlich, daß erst in der Massenvereinigung der eigentliche praktische Sinn zum Ausdruck gelangt. Sofern aber das Einzelrisiko ein Element zur Bestimmung des Gesamtrisikos eines Versicherungsbestandes bildet, erlangt es volle Berechtigung auch von diesem Standpunkte aus. An sich aber dient es dazu, verschiedene Versicherungs-

formen auf die mit ihnen verbundene Verlustgefahr unter einander zu vergleichen.

Was den Zeitraum betrifft, für welchen das Risiko zu bestimmen ist, so können hierüber mannigfache Festsetzungen getroffen werden je nach dem Zweck, den man zu erreichen sucht.

Will man die Versicherungskombinationen untereinander vergleichen, so wird man das Risiko *für die ganze Dauer* der Versicherung heranziehen.

Soll das Risiko eines Versicherungsbestandes von einem Zeitpunkte an bis zu seinem völligen Erlöschen (also von Neueintritten abgesehen) untersucht werden, so hat man es mit Versicherungen von verschiedener bereits verflossener Dauer zu tun. Daraus entspringt bei der Auflösung in Einzelversicherungen die Aufgabe, das Risiko einer Versicherung, nachdem sie eine Zeitlang bestanden hat, *für die fernere Dauer* zu bestimmen.

Denkt man daran, die Risikoberechnung der allgemeinen Rechnungslegung anzugliedern, so wird es sich um das Risiko einer Versicherung *für jedes einzelne Versicherungsjahr* handeln.

Was man als Maß der Verlustgefahr benutzen will, ob das *durchschnittliche* oder das *mittlere* Risiko,[1]) ist für den schließlichen Erfolg gleichgültig; entscheidend kann also nur die mathematische Seite des Gegenstandes sein.

Als ein *natürliches* Maß ist ohne Zweifel das durchschnittliche Risiko anzusehen, weil es sich der ganzen Denkweise der Lebensversicherungsrechnung anpaßt. Es wird dabei die Verlustgefahr gewissermaßen als eine neben der eigentlichen Versicherung einhergehende *sekundäre Versicherung* aufgefaßt und ihr Wert nach denselben versicherungstechnischen Grundsätzen bestimmt, nach welchen man eine Versicherung überhaupt bewertet. Als versicherte Summen gelten dabei die möglichen Verluste, ihre Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Grundlagen der Hauptversicherung[2]), ihre Fälligkeitstermine aus der Art ihres Entstehens.

---

1) Küttners absolutes Risiko kommt nach den Ausführungen in Nr. 127 nicht als selbständiges Maß in Betracht. — In den Arbeiten, die K. Hattendorff über das Risiko in der Lebensversicherung veröffentlicht hat (Masius' Rundschau d. Versicherungen XVIII (1868), p, 1, 25, 145, 169) und die zu den grundlegenden gezählt werden dürfen, ist unter der Bezeichnung mittleres Risiko das durchschnittliche gemeint (s. insbesondere p. 5); doch ist es bei der von Hattendorff eingeschlagenen Rechnungsweise stets durch das mittlere im eigentlichen Sinne ausgedrückt.

2) Wenn das Risiko zum Zwecke der Stabilitätsuntersuchung eines Unternehmens verwendet werden soll, so hätte man nach G. Bohlmann (Gutachten etc. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch., Wien 1909, Bd. I, 1, p. 596 bis 597) zu seiner Berechnung eine Sterbetafel zu verwenden, die sich dem voraussichtlichen Sterblichkeitsverlauf möglichst anpaßt, wie dies in neuerer Zeit

Mit dem durchschnittlichen Risiko sind aber rechnerische Schwierigkeiten verbunden, wenn es sich um die Zusammensetzung des Risikos eines Bestandes aus den Einzelrisiken handelt. Demgegenüber bietet das mittlere Risiko große Vorteile, die bereits in Nr. 125 dargelegt worden sind. Indessen treten in der Literatur beide Maße nebeneinander auf, ohne daß ihre Beziehung zueinander immer klar zum Ausdruck kommt.

Mit den nun folgenden Ausführungen wird der Zweck verfolgt, die verschiedenen Gedankenbildungen, die bei der Anwendung der Risikotheorie auf die Lebensversicherung zutage getreten sind, an geeigneten Beispielen vorzuführen. Dabei gelangen auch die wichtigsten Formeln dieses Anwendungsgebiets zur Darstellung[1]).

345. Direkte Lösung des allgemeinen Risikoproblems für einen Versicherungsbestand. Das allgemeinste Problem kann in folgender Weise formuliert werden: Es ist ein Maß für das Risiko zu bestimmen, das ein Versicherer der Gesamtheit der Versicherten gegenüber (und umgekehrt) zu einer bestimmten Zeit t während einer nachfolgenden Periode (t_1, t_2) läuft.

Zur Erledigung dieser Aufgabe sind folgende Vorarbeiten erforderlich.

1. Auflösung des Versicherungsbestandes in unabhängige Einzelfälle durch Zusammenlegung mehrfacher Versicherungen;

2. Aufstellung aller im Bereiche der Möglichkeit liegenden Kombinationen über das Sterben der Versicherten, wobei nicht der Zeitpunkt des Sterbens als solcher, sondern das Versicherungsjahr des Todes ins Auge zu fassen ist; mit dieser Einschränkung ergibt sich immer eine *endliche* Anzahl von Kombinationen, die nach einem Prinzip geordnet und numeriert gedacht werden mögen;

3. Berechnung der Wahrscheinlichkeit Q_ν für das Eintreffen einer jeden Kombination (ν);

4. Berechnung der Ausgaben $\mathfrak{A}_\nu$ und der Einnahmen $\mathfrak{E}_\nu$, beide diskontiert auf den Zeitpunkt t, die dem Versicherer aus der Kombination (ν) in der in Betracht gezogenen Periode (t_1, t_2) erwachsen; unter den Ausgaben sind die gemachten Auszahlungen und die Prämienreserve am Ende der Periode, unter den Einnahmen die eingelaufenen Nettoprämien und die Prämienreserve am Beginne der Periode zu verstehen.

---

bei Aufstellung des Dividendenplanes mitunter geschieht. Dieser Forderung wird aber nur in seltenen Fällen entsprochen werden können, nämlich nur dann, wenn ausreichende eigene Erfahrungen zu Gebote stehen.

1) Eine historische Übersicht über die älteren Arbeiten und einen reichen Literaturnachweis hat K. Wagner in der Schrift: Das Problem des Risiko in der Lebensversicherung, Jena 1898, gegeben. Auf einige neuere Untersuchungen wird im folgenden hingewiesen werden.

Aus diesen Daten berechnet sich nun nach den Ausführungen in Nr. 123 das *durchschnittliche Risiko*

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\nu} Q_\nu \mid \mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu \mid \tag{1}$$

und gemäß den Ausführungen in Nr. 125 das Quadrat des *mittleren Risikos*

$$M^2 = \sum_{\nu} Q_\nu (\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu)^2. \tag{2}$$

Dem ersteren kommt die Bedeutung der Prämie zu, mitlels welcher sich der Versicherer bei einem andern Unternehmer gegen die ihm aus den zufälligen Abweichungen drohenden Verluste versichern könnte[1]).

Diese Begriffsentwicklung hat jedoch lediglich theoretisches Interesse; die Formeln, zu welchen sie führt, sind praktisch nicht verwendbar, weil sie selbst bei einem sehr mäßigen Versicherungsstande eine nicht zu bewältigende Rechenarbeit erforderten.

Will man also zu ziffermäßigen Resultaten gelangen, so muß das Problem in einer ganz andern Weise in Angriff genommen werden. Man wird *erstens* darauf ausgehen, das mittlere Risiko der einzelnen Versicherung zu bestimmen, und wird *zweitens* aus den Einzelrisiken das Gesamtrisiko gemäß dem Satze (s. Nr. 125)

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \cdots} \tag{3}$$

berechnen. Dabei bieten sich Vereinfachungen dar: gleichartige Versicherungen können zusammengefaßt werden und ergeben nur ein Glied unter der Wurzel, bestehend in dem Produkte des Quadrates des Risikos einer solchen Versicherung mit der Anzahl der ihr gleichartigen; will man sich mit einer bloßen Schätzung begnügen, so kann man Gruppen von Versicherungen, die sich über mehrere Altersstufen und ungleiche Versicherungssummen erstrecken, bilden und mit einem mittleren Alter und einer mittleren Versicherungssumme rechnen.

Solche Vorteile bietet das durchschnittliche Risiko nicht dar, wenn es sich um einen ganzen Bestand handelt. Man kann zwar wieder ohne Schwierigkeit das durchschnittliche Risiko jeder einzelnen Versicherung bestimmen; aber die strenge Zusammensetzung dieser Einzelrisiken zum Gesamtrisiko bietet Schwierigkeiten dar und ist nur für

1) Vgl. hierzu G. Bohlmann, Encykl. d. mathem. Wissensch. I, p. 904 ff. Bohlmann unterscheidet auch noch die extremen Risiken, nämlich das der Anstalt gegenüber den Versicherten, bestehend in dem größten $\mathfrak{A}_\nu - \mathfrak{E}_\nu$, und das des Versicherungsbestandes gegenüber der Anstalt, dargestellt durch das größte $\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{A}_\nu$. Diese Werte fallen aber nicht eigentlich unter den Begriff des Risiko, stellen vielmehr die *größtmöglichen Verluste* einer- und andererseits vor.

einige einfache Fälle gelungen. Unter gewissen Voraussetzungen, wenn es sich um eine große Anzahl gleichartiger vom Zufall abhängiger Unternehmungen handelt, ist in Nr. 125 ein einfacher Zusammenhang zwischen dem mittleren und durchschnittlichen Risiko nachgewiesen worden [s. Gleichung (3) dortselbst]. Wenn auch bei einem Versicherungsbestande die erwähnten Voraussetzungen nicht völlig zu Recht bestehen, so bedient man sich dieses Zusammenhanges doch auch hier und leitet aus M das R des Bestandes gemäß der Formel

$$R = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894\, M \tag{4}$$

ab.

Im Grunde der Formeln (3) und (4) ergibt sich das Risiko einer Gruppe gleichartiger Versicherungen, indem man das Risiko der einzelnen mit der Quadratwurzel aus der Anzahl aller multipliziert. Das *relative* Risiko, das durch Division des vorigen mit der Summe der geleisteten Einzahlungen entsteht, ist somit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Versicherungen umgekehrt proportional, weil jene Summe diese Anzahl als Faktor enthält. Nach dem relativen mittleren oder durchschnittlichen Risiko oder einem Vielfachen desselben bemißt sich aber der Beitrag, den der einzelne Versicherte zur Bildung des Sterblichkeitsschwankungsfonds zu leisten hat; in dem letzten Satze ist also der mathematische Grund dafür zu erblicken, daß es für den Versicherungsnehmer in Ansehung der Aufbringung des Sicherheitsfonds um so günstiger ist, an eine je zahlreichere Gesellschaft er sich anschließt.

Durch die vorstehenden Ausführungen ist die Bestimmung des Einzelrisikos in den Vordergrund gerückt. Mit dieser Aufgabe beschäftigen sich die folgenden Artikel hinsichtlich einiger spezieller Versicherungskombinationen, und zwar wird sowohl das durchschnittliche wie das mittlere Risiko bestimmt. Was die Periode anlangt, so wird bei dem mittleren Risiko auch auf die Fälle eingegangen, daß es sich um das der Aufstellung unmittelbar folgende Versicherungsjahr oder um irgend ein späteres Versicherungsjahr handelt.

346. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn. 1. Auf das Leben (x) sei eine Pränumerando-Leibrente vom Betrage 1 gegründet gegen Leistung der einmaligen Prämie a_x. Stirbt (x) im Laufe des n-ten Jahres, wofür ${}_{n-1|}q_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, so hat er die Rente n-mal bezogen; der gegenwärtige Wert der an ihn geleisteten Auszahlungen ist also

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}. \tag{5}$$

Mithin beträgt das durchschnittliche Risiko

$$R(a_x) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| a_x - a_{\overline{n}|} \right|. \tag{6}$$

Bei einer Postnumerando-Leibrente betrüge die einmalige Prämie $\mathfrak{a}_x - 1$, und der Wert der Auszahlung wäre

$$v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \mathfrak{a}_{\overline{n}|} - 1;$$

für das Risiko gilt also dieselbe Formel (6), also $R(a_x) = R(\mathfrak{a}_x)$.

2. Es sei (x) gegen die einmalige Prämie $A_x = 1 - d\mathfrak{a}_x$ lebenslänglich für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert. Stirbt (x) im Laufe des n-ten Jahres, wofür ${}_{n-1|}q_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, so kommt das Kapital am Ende dieses Jahres zur Auszahlung, und der gegenwärtige Wert hiervon ist v^n. Hiernach ist das durchschnittliche Risiko dieser Versicherung:

$$R(A_x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| A_x - v^n \right|. \tag{7}$$

Ersetzt man A_x durch den gleichwertigen Ausdruck $1 - d\mathfrak{a}_x$, so schreibt sich

$$R(A_x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| 1 - d\mathfrak{a}_x - v^n \right| = \frac{d}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \frac{1-v^n}{d} - \mathfrak{a}_x \right|,$$

woraus mit Rücksicht auf (6) und (5) folgt, daß

$$R(A_x) = dR(\mathfrak{a}_x). \tag{8}$$

Das durchschnittliche Risiko der Todesfallversicherung macht also etwa so viel Prozente des Risikos der Rente aus, als dem zugrunde gelegten Zinsfuße entspricht; denn bei $i = 0{,}035$ z. B. ist $d = 0{,}0338$.

3. Es sei (x) gegen Zahlung der Jahresprämie $P_x = \frac{1}{a_x} - d$ lebenslänglich für den Todesfall auf das Kapital 1 versichert. Erfolgt der Tod im Laufe des n-ten Jahres, was mit der Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q_x$ zu erwarten ist, so wird das Kapital am Ende dieses Jahres ausgezahlt; der gegenwärtige Wert hiervon ist v^n, während der Wert der geleisteten Einzahlungen gleichkommt $\mathfrak{a}_{\overline{n}|}P_x$. Aus diesen Elementen bestimmt sich das Risiko:

$$R(P_x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \mathfrak{a}_{\overline{n}|}P_x - v^n \right|. \tag{9}$$

Substituiert man für P_x den Ausdruck $\frac{1}{\mathfrak{a}_x} - d$, so wird wegen (5)

$$\begin{aligned} R(P_x) &= \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \frac{\mathfrak{a}_{\overline{n}|}}{\mathfrak{a}_x} - d\mathfrak{a}_{\overline{n}|} - v^n \right| \\ &= \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \frac{\mathfrak{a}_{\overline{n}|}}{\mathfrak{a}_x} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{a}_x}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{\overline{n}|} \right|; \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf (6) und (8) ist also auch:

$$R(P_x) = \frac{1}{\mathrm{a}_x} R(\mathrm{a}_x) = \frac{R(A_x)}{1 - A_x}. \tag{10}$$

Da $1 - A_x$ ein um so kleinerer echter Bruch ist, je höher das Alter x, so ist das Risiko bei jährlicher Prämienzahlung ein um so höheres Vielfaches des Risikos bei einmaliger Prämie, in einem je höheren Alter die Versicherung abgeschlossen wird.

Aus den vorstehenden Formeln ist zu ersehen, daß sich mit Hilfe von $R(\mathrm{a}_x)$ die beiden andern Risikos ausdrücken lassen. Was nun die Ausrechnung von $R(\mathrm{a}_x)$ anlangt, so kann sie einfacher gestaltet werden, als es die Formel (6) vorschreibt. Von den Differenzen $\mathrm{a}_x - \mathrm{a}_{\overline{n}|}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ist ein Teil positiv, ein Teil negativ, und sowohl die über die positiven erstreckte Summe wie auch der absolute Wert jener Summe, die sich über die negativen erstreckt, gibt R (s. Nr. 123). Die Grenzscheide zwischen den positiven und negativen Differenzen liegt aber bei jenem Werte n, der sich aus der Gleichung

$$a_{\overline{n}|} = a_x \tag{11}$$

ergibt. Der Sinn dieser Gleichung ist unmittelbar einleuchtend: sie besagt, daß bei dieser Dauer der Versicherung der Wert dessen, was der Versicherer zahlt, gleich ist dem empfangenen Betrage; diesseits und jenseits liegen die Gebiete, wo entweder der Versicherer oder der Versicherte ein Zuviel leistet. Wir nennen das aus (11) berechnete n die *kritische Dauer* der Rente. Der Begriff läßt sich auch auf andere Versicherungen übertragen.[1]) Ersetzt man $\mathrm{a}_{\overline{n}|}$ durch den Ausdruck (5), so ergibt sich nach einer Transformation:

$$v^n = 1 - d\mathrm{a}_x = A_x,$$

woraus

$$n = \frac{\log A_x}{\log v} \tag{12}$$

folgt. Die Gleichung, welche zur kritischen Dauer der Todesfallversicherung führt, ist nach (7)

$$v^n = A_x,$$

also dieselbe wie bei der Rente; und bei der Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung hat man nach (9):

$$v^n = \mathrm{a}_{\overline{n}|} P_x,$$

woraus nach und nach

$$v^n = \frac{1 - v^n}{d}\left(\frac{1}{\mathrm{a}_x} - d\right)$$

$$v^n = 1 - d\mathrm{a}_x = A_x$$

---

1) G. Bohlmann, l. c. p. 909, gebraucht den Namen *kritische Zahl*, A. Tauber, Gutachten usw. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch. Wien 1909, Bd. I. 2, p. 784, spricht in dem gleichen Sinne von einer *Risikodauer*.

folgt. Es haben also alle drei Versicherungsarten dieselbe kritische Dauer. Hat man diese bestimmt, so weiß man im voraus, wie viele Glieder zur Bestimmung von $R(\mathfrak{a}_x)$ erforderlich sind.

Beispiel. Mit den Grundlagen der Tafel VIII soll das durchschnittliche Risiko der drei Versicherungsarten a_x, A_x, P_x für das Alter $x = 70$ berechnet werden.

Zunächst hat man die kritische Dauer

$$n = \frac{\log A_{70}}{\log v} = \frac{\log 0{,}74738}{0{,}98506 - 1} = 8{,}5;$$

es reichen also acht Glieder zur Bestimmung von $R(a_x)$ hin. Man wird die Rechnung tabellarisch wie folgt anlegen:

$$\mathfrak{a}_{70} = 7{,}46929$$

n	${}_{n-1\mid}q_{70}$	$\mathfrak{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\mathfrak{a}_{70} - \mathfrak{a}_{\overline{n}\rceil}$	${}_{n-1\mid}q_{70}(\mathfrak{a}_{70} - \mathfrak{a}_{\overline{n}\rceil})$
1	0,06410	1,00000	6,46929	0,41468
2	0,06499	1,96618	5,50311	0,35765
3	0,06557	2,89969	4,56960	0,29963
4	0,06572	3,80164	3,66765	0,24103
5	0,06549	4,67308	2,79621	0,18311
6	0,06475	5,51505	1,95424	0,12654
7	0,06351	6,32855	1,14074	0,07244
8	0,06169	7,11454	0,35475	0,02187
			Summe	1,71695

Es ist somit

$$R(a_{70}) = 1{,}71695,$$

das relative Risiko beträgt also

$$\frac{R(a_{70})}{\mathfrak{a}_{70}} = \frac{1{,}71695}{7{,}46929} = 0{,}229,$$

zu seiner Deckung sind also 23 % der einmaligen Prämie erforderlich.

Ferner ergibt sich nach (8):

$$R(A_{70}) = 0{,}0338 \cdot 1{,}71695 = 0{,}05806,$$

so daß das relative Risiko dieses Falles

$$\frac{R(A_{70})}{A_{70}} = \frac{0{,}05806}{0{,}74738} = 0{,}078,$$

also 7,8 % der einmaligen Jahresprämie ausmacht.

Endlich hat man:

$$R(P_{70}) = \frac{R(a_{70})}{\mathfrak{a}_{70}} = \frac{1{,}71695}{7{,}46929} = 0{,}22987$$

und relativ zur Prämie

$$\frac{R(P_{70})}{P_{70}} = \frac{0{,}22937}{0{,}10005} = 2{,}297;$$

hier beträgt also das Risiko das 2,297-fache der Jahresprämie.

347. Fortsetzung. Zu einer bemerkenswerten Darstellung wird man geführt, wenn man die mit der Versicherung verbundenen Vorgänge, also das Absterben, die Verzinsung, die Renten- und Prämienzahlung als stetige Vorgänge auffaßt und bei der Todesfallversicherung die Kapitalsauszahlung unmittelbar beim Tode erfolgen läßt. Es lassen sich dann auf die Risikoberechnung die Methoden der Analysis anwenden.[1])

Der Weg ist der folgende. Man berechnet den diskontierten Wert G_t des Gewinnes, den der Versicherte (x) oder der Versicherer erleidet, wenn ersterer in dem Zeitintervall $(t, t+dt)$, vom Zeitpunkt des Abschlusses an gerechnet, stirbt, wofür die Wahrscheinlichkeit $-\frac{dl_{x+t}}{l_x}$ besteht; das Integral von $G_t \cdot -\frac{dl_{x+t}}{l_x}$, über die kritische Dauer der gerade betrachteten Versicherung erstreckt, gibt das durchschnittliche Risiko.

Bei der kontinuierlichen Rente ist der Gewinn des Versicherers, wenn der Tod des Versicherten nach t Jahren eintritt,

$$G_t = \bar{a}_x - \int_0^t v^t dt = \bar{a}_x - \frac{1-v^t}{\delta} = \frac{v^t - (1-\delta\bar{a}_x)}{\delta} = \frac{v^t - \bar{A}_x}{\delta};$$

bei der sofort zahlbaren Todesfallversicherung gegen einmalige Prämie der Gewinn des Versicherten

$$G_t = v^t - \bar{A}_x;$$

bei der sofort zahlbaren Todesfallversicherung gegen kontinuierliche Prämie vom Jahresbetrage $\bar{P}_x$ der Gewinn des Versicherten

$$G_t = v^t - \bar{P}_x \int_0^t v^t dt = v^t - \bar{P}_x \frac{1-v^t}{\delta};$$

aus $\bar{A}_x = \bar{P}_x \bar{a}_x = \bar{P}_x \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$ folgt aber $\frac{P_x}{\delta} = \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$, mithin verwandelt sich der Ausdruck für G_t in

$$G_t = \frac{v^t - \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}.$$

Aus dieser Darstellung ist unmittelbar zu ersehen, daß die kritische Dauer n aller drei Versicherungsarten, die dem Momente, wo $G_t = 0$ ist, entspricht, dieselbe ist und aus der Gleichung

$$v^n - \bar{A}_x = 0 \tag{12*}$$

1) Vgl. hierzu die Abhandlungen von A. Guldberg und J. P. Gram, Gutachten usw. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch. Wien 1909, Bd. I. 1, p. 753 resp. 575.

entspringt; und daß

$$R(\bar{a}_x) : R(\bar{A}_x) : R(\bar{P}_x) = \frac{1}{\delta} : 1 : \frac{1}{1-\bar{A}_x};$$

man braucht also nur eines der drei Risikos direkt zu berechnen, um alle drei zu kennen; am einfachsten ist

$$R(\bar{A}_x) = \int_0^n (\bar{A}_x - v^t)\frac{dl_{x+t}}{l_x} = \bar{A}_x \int_0^n \frac{dl_{x+t}}{l_x} + \int_0^n v^t \cdot - \frac{dl_{x+t}}{l_x};$$

das erste Integral gibt $\frac{l_{x+n}-l_x}{l_x} = -{}_nq_x$, das zweite stellt den Wert einer auf n Jahre abgekürzten Todesfallversicherung dar. Mithin ist

$$R(\bar{A}_x) = {}_{|n}\bar{A}_x - {}_nq_x\bar{A}_x, \tag{7*}$$

$$R(\bar{a}_x) = \frac{1}{\delta}({}_{|n}\bar{A}_x - {}_nq_x\bar{A}_x), \tag{6*}$$

$$R(\bar{P}_x) = \frac{1}{1-\bar{A}_x}({}_{|n}\bar{A}_x - {}_nq_x\bar{A}_x). \tag{10*}$$

348. Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande. Das Risiko einer flüssigen Rente und einer kapitalisch begründeten Todesfallversicherung nach m-jähriger Dauer stimmt mit dem Risiko einer gleichartigen Versicherung, jedoch für eine um m Jahre ältere Person überein; denn die Reserve, welche als Einzahlung übernommen wird, ist die der ferneren Versicherung entsprechende einmalige Prämie, und in allem übrigen liegen die Verhältnisse wie am Beginne.

Bezeichnet man also das nach m-jährigem Bestande herrschende Risiko mit ${}_mR$, so gelten die Formeln:

$${}_mR(a_x) = R(a_{x+m}), \tag{13}$$

$${}_mR(A_x) = R(A_{x+m}). \tag{14}$$

Anders verhält es sich mit der Todesfallversicherung gegen jährliche Prämienzahlung. Besteht sie m Jahre, so ist die versicherte Person $x+m$ Jahre alt geworden und hat den Tod im Laufe des n-ten Jahres mit der Wahrscheinlichkeit ${}_{n-1|}q_{x+m}$ zu erwarten; erfüllt sich diese Erwartung, so besteht die Ausgabe der Anstalt, auf den Zeitpunkt der Rechnung reduziert, in v^n, ihre Einnahme in der Prämienreserve ${}_mV_x$ und der Prämienzahlung $a_{\overline{n|}}P_x$; folglich ist

$${}_mR(P_x) = \frac{1}{2}\sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_{x+m}\,|{}_mV_x + a_{\overline{n|}}P_x - v^n|.$$

Die eingeklammerte Differenz reduziert sich aber, wenn man für ${}_mV_x$ den Ausdruck $1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$, für P_x den Wert $\frac{1}{a_x} - d$ und für $a_{\overline{n|}}$ den

Wert $\frac{1-v^n}{d}$ einsetzt, auf $\frac{\mathfrak{a}_{\overline{n}|} - \mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x}$; daher ist weiter

$$_mR(P_x) = \frac{1}{2\mathfrak{a}_x} \sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_{x+m} \left| \mathfrak{a}_{x+m} - \mathfrak{a}_{\overline{n}|} \right|. \tag{15}$$

Nun war aber (s. Nr. 346)

$$R(P_x) = \frac{1}{2\mathfrak{a}_x} \sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_x \left| \mathfrak{a}_x - \mathfrak{a}_{\overline{n}|} \right|,$$

daraus folgt:

$$R(P_{x+m}) = \frac{1}{2\mathfrak{a}_{x+m}} \sum_1^{\omega} {}_{n-1|}q_{x+m} \left| \mathfrak{a}_{x+m} - \mathfrak{a}_{\overline{n}|} \right|,$$

und durch Vergleichung mit (15):

$$_mR(P_x) = \frac{\mathfrak{a}_{x+m}}{\mathfrak{a}_x} R(P_{x+m}). \tag{16}$$

Es ist also das Risiko zum Alter $x+m$ im Verhältnis der Rentenabnahme vom Alter x zum Alter $x+m$ zu verkleinern, um das Risiko zum Alter x nach m-jährigem Bestande zu erhalten.

Beispielsweise ist nach den Grundlagen der Tafel VIII und mit Benutzung eines am Schlusse von Nr. 346 berechneten Resultates

$$_{10}R(P_{60}) = \frac{a_{70}}{a_{60}} R(P_{70}) = \frac{7{,}470}{10{,}823} 0{,}22987 = 0{,}15864.$$

349. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung bei deren Beginn. Um ein möglichst umfassendes Resultat zu erzielen, möge der von F. Hausdorff[1]) eingeschlagene Weg befolgt und eine Versicherungskombination konstruiert werden, die sich durch Spezialisierung einzelner Größen in die üblichen Versicherungsarten überführen läßt.

Auf das Leben (x) werde gegen einmalige Prämie eine auf n Jahre abgekürzte Pränumerando-Leibrente und eine gemischte Versicherung zu demselben Termine, erstere mit dem Jahresbetrage r, letztere auf das Kapital C, abgeschlossen.

Um das mittlere Risiko dieses Vertrages zu bestimmen, hat man die einmalige Prämie

$$E = r\,|_n\mathfrak{a}_x + CA_{x\overline{n}|} \tag{17}$$

mit den verschiedenen möglichen Auszahlungswerten in Vergleich zu setzen. Führt man für die Wahrscheinlichkeiten

$$_{0|}q_x,\quad _{1|}q_x,\quad \cdots,\quad _{n-2|}q_x,\quad _{n-1}p_x$$

1) Das Risiko bei Zufallsspielen. Ber. d. Sächs. G. d. W. zu Leipzig, 49 (1897), p. 535ff.

die einheitliche Bezeichnung

$$w_1, \quad w_2, \quad \cdots, \quad w_{n-1}, \quad w_n$$

ein, so ist w_α $(\alpha < n)$ die Wahrscheinlichkeit für (x), im α-ten Jahre zu sterben, w_n die Wahrscheinlichkeit, den Beginn des n-ten Jahres zu erleben, und es besteht die Beziehung:

$$\sum_1^\omega w_\alpha = 1. \tag{18}$$

Die Auszahlung, wenn das der Wahrscheinlichkeit w_α $(\alpha \leqq n)$ entsprechende Ereignis eintritt, hat dann den Wert

$$\begin{aligned} A_\alpha &= r\mathfrak{a}_{\overline{\alpha|}} + Cv^\alpha \\ &= r\frac{1-v^\alpha}{d} + Cv^\alpha \\ &= \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right)v^\alpha, \end{aligned} \tag{19}$$

und es kann E auch in der Form geschrieben werden:

$$E = \sum_1^n w_\alpha A_\alpha = \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right)\sum_1^n w_\alpha v^\alpha. \tag{20}$$

Das Quadrat des mittleren Risikos $M(E)$ ist nun:

$$M^2(E) = \sum_1^n w_\alpha (E - A_\alpha)^2,$$

und nach Einführung der Werte aus (19) und (20) weiter:

$$M^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \sum_1^n w_\alpha \left[\sum_1^n w_\alpha v^\alpha - v^\alpha\right]^2.$$

Die Entwicklung des Quadrates gibt:

$$\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 - 2v^\alpha \sum_1^n w_\alpha v^\alpha + v^{2\alpha};$$

multipliziert man diesen Ausdruck, Glied für Glied, mit w_α und summiert, ebenfalls gliedweise, von 1 bis n, so erhält man mit Rücksicht auf (18):

$$\begin{aligned} &\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 - 2\left(\sum_1^n w_\alpha v^\alpha\right)^2 + \sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha} \\ &= \sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha} - \left(\sum_1^n {}_\alpha w\, v^\alpha\right)^2. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\sum_1^n w_\alpha v^\alpha = A_{x\overline{n}|} = 1 - (1-v)\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

und $\sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha}$ der analog, jedoch mit v^2 statt mit v, gerechnete Wert, der kurz mit $A'_{x\overline{n}|}$ bezeichnet werden möge. Führt man also neben den diskontierten Zahlen der Lebenden und ihren Summen noch die neuen Zahlen:

$$\left.\begin{aligned} v^{2\alpha} l_x &= D'_x \\ D'_x + D'_{x+1} + D'_{x+2} + \cdots &= N'_x \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ein, so wird

$$\sum_1^n w_\alpha v^{2\alpha} = A'_{x\overline{n}|} = 1 - (1-v^2)\frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x}. \tag{22}$$

Man hat also schließlich

$$M^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 [A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}], \tag{23}$$

und $M(E)$ selbst ist die positive Quadratwurzel dieses Ausdruckes.

Diese Formel erledigt nun, wenn man spezialisiert, die folgenden Fälle:

1) Bei $C = 0$, $r = 1$ geht die Versicherung in die kurze Rente ${}_{|n}a_x$ vom Jahresbetrage 1 über, und es ist

$$M(a_x) = \frac{1}{d}\sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}}. \tag{24}$$

2) Mit $r = 0$, $C = 1$ ergibt sich die gemischte Versicherung $A_{x\overline{n}|}$ gegen einmalige Prämie auf das Kapital 1, wofür

$$M(A_{x\overline{n}|}) = \sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}}. \tag{25}$$

3) Setzt man $C = 1$, $r = -P_x$, so entsteht die gemischte Versicherung auf das Kapital 1 gegen jährliche Prämienzahlung; (23) liefert nun

$$M(P_x) = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)\sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}};$$

da aber bei dieser Versicherung [s. Nr. 307, 6)]

$$P_x = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d,$$

also

$$1 + \frac{P_x}{d} = \frac{1}{d\,{}_{|n}a_x} = \frac{1}{1 - A_{x\overline{n}|}},$$

so ist endgültig

$$M(P_x) = \frac{\sqrt{A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}}}{1 - A_{x\overline{n}|}}. \tag{26}$$

Rückt man n bis an die äußerste Lebensgrenze, so geht $_{|n}\mathfrak{a}_x$ in die lebenslängliche Leibrente $\mathfrak{a}_x$, $A_{x\overline{n}|}$ in die lebenslängliche Todesfallversicherung A_x über, und A_n' bekommt den Ausdruck:

$$A_x' = \frac{M_x'}{D_x'}, \tag{27}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} v^{2x+2} d_x &= C_x' \\ C_x' + C_{x+1}' + C_{x+2}' + \cdots &= M_x' \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

genommen wird. Man hat also die weitere Formelgruppe:

$$\left.\begin{aligned} M(\mathfrak{a}_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A_x' - A_x^2} \\ M(A_x) &= \sqrt{A_x' - A_x^2} \\ M(P_x) &= \frac{\sqrt{A_x' - A_x^2}}{1 - A_x} \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Die Vergleichung mit den Resultaten der Nr. 346 zeigt, daß das Verhältnis der mittleren Risikos der drei ersten und der drei letzten Versicherungsarten dasselbe ist, wie das Verhältnis der durchschnittlichen Risikos.

Die rechnerische Durchführung des mittleren Risiko erfordert die Anlage neuer Tafeln, welche den Grundtafeln der Versicherungsrechnung analog sind und zunächst, soweit die Betrachtung hier geführt ist, die Zahlen D_x', N_x', C_x', M_x' umfassen; bei steigenden Renten und Prämienrückgewähr würde sich auch die Notwendigkeit der Zahlen S_x', R_x' ergeben, die den Zahlen S_x, R_x der Grundtafeln entsprächen.

Nachstehend ist ein Bruchstück einer solchen Tafel, für die Alter von 70 aufwärts, beruhend auf den Grundlagen der Tafel VIII, mitgeteilt, um daran einige Zahlenbeispiele zu erklären.

Mit Hilfe dieser Tafel und der Formel (22) findet man beispielsweise

$$A_{70,\overline{10}|}' = 0{,}630698;$$

daneben gibt Tafel VIII:

$$A_{70,\overline{10}|} = 0{,}788311;$$

mit diesen zwei Zahlen ergibt sich:

$$M(A_{70,\overline{10}|}) = 0{,}0962; \quad \text{relativ:} \quad \frac{M}{A} = 0{,}122,$$

$$M(P_{70}) \quad = 0{,}4544; \quad \text{„} \quad \frac{M}{A} = 0{,}576,$$

$$M(_{|10}\mathfrak{a}_{70}) \quad = 2{,}8447; \quad \text{„} \quad \frac{M}{\mathfrak{a}} = 0{,}515.$$

Hilfszahlen zur Berechnung des mittleren Risiko.
Grundlagen der Tafel VIII.

x	D'_x	N'_x	C'_x	M'_x
70	307,52	1941,03	18,399	177,586
71	268,67	1633,51	17,416	159,187
72	217,81	1364,84	16,404	141,771
73	201,47	1147,03	15,349	125,367
74	172,73	945,56	14,267	110,018
75	146,97	772,83	13,177	95,751
76	124,02	625,86	12,066	82,574
77	103,71	501,84	10,942	70,508
78	85,870	398,134	9,8306	59,5660
79	70,332	312,264	8,7334	49,7354
80	56,947	241,932	7,6663	41,0020
81	45,471	184,985	6,6425	33,3357
82	38,805	139,514	5,6678	26,6932
83	27,756	100,709	4,7593	21,0254
84	21,151	72,953	3,9265	16,2661
85	15,819	51,802	3,1780	12,3396
86	11,589	35,983	2,5192	9,1616
87	8,2992	24,3936	1,9480	6,6424
88	5,5384	16,0944	1,4701	4,6944
89	3,9436	10,5560	1,0778	3,2243
90	2,6036	6,6124	0,75005	2,14647
91	1,6630	4,0088	0,52756	1,39642
92	1,0249	2,3458	0,34775	0,86886
93	0,6089	1,3209	0,22366	0,52111
94	0,3448	0,71204	0,13484	0,29745
95	0,1870	0,36724	0,07850	0,16261
96	0,09610	0,18024	0,04296	0,08411
97	0,04675	0,08414	0,02123	0,04115
98	0,02241	0,03739	0,01101	0,01992
99	0,00991	0,01498	0,00514	0,00891
100	0,00411	0,00507	0,00288	0,00377
101	0,00096	0,00096	0,00089	0,00089

Weiter liefert die vorstehende Tafel

$$A'_{70} = \frac{177,586}{307,52} = 0,577474,$$

während nach Tafel VIII

$$A_{70} = 0,74738;$$

hiermit berechnet sich gemäß der Formelgruppe (29):

$$M(A_{70}) = 0,1374; \quad \text{relativ:} \quad \frac{M}{A} = 0,184,$$

$$M(P_{70}) = 0,5439; \quad \text{„} \quad \frac{M}{A} = 0,727,$$

$$M(\mathfrak{a}_{70}) = 4,0630; \quad \text{„} \quad \frac{M}{\mathfrak{a}} = 0,544.$$

350. Das mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung nach längerem Bestande. Wir führen die Rechnung wieder allgemein für die kombinierte Versicherung, von welcher in der vorigen Nummer ausgegangen worden war, und zwar m Jahre nach Abschluß ($m < n$), wo der Versicherte das Alter $x + m$ hat. Zu dieser Zeit kommt ihm eine Prämienreserve

$$_mV_x = r\,_{|n-m}\mathfrak{a}_{x+m} + C A_{x+m,\overline{n-m}|}$$

zu, die gleich ist dem Werte der ferneren Versicherung, weil kapitalische Begründung vorausgesetzt wurde.

Bezeichnet man die Reihe der Wahrscheinlichkeiten

$$_{0|}q_{x+m}, \quad _{1|}q_{x+m}, \quad \cdots \quad _{n-m-2|}q_{x+m}, \quad _{n-m-1}p_{x+m}$$

einheitlich durch

$$w_1, \quad w_2, \quad \cdots \quad w_{n-m-1}, \quad w_{n-m},$$

so haben diese analoge Bedeutung wie bei der vorigen Untersuchung, nur daß der Ausgangspunkt der Zählung bei dem Alter $x + m$ liegt.

Tritt das der Wahrscheinlichkeit w_α ($\alpha \leqq n - m$) entsprechende Ereignis ein, so ist eine Auszahlung erfolgt, deren Wert

$$A_\alpha = r\mathfrak{a}_{\overline{\alpha}|} + Cv^\alpha$$
$$= \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) v^\alpha$$

ist; die Prämienreserve kann, da weitere Einzahlungen nicht stattfinden, nunmehr auch so ausgedrückt werden:

$$_mV_x = \sum_1^{n-m} w_\alpha A_\alpha = \frac{r}{d} + \left(C - \frac{r}{d}\right) \sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha,$$

weil wiederum $\sum_1^{n-m} w_\alpha = 1$ ist.

Das Quadrat des mittleren Risiko hat zunächst den Ausdruck:

$$_mM^2(E) = \sum_1^{n-m} w_\alpha (_mV_x - A_\alpha)^2$$
$$= \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \sum_1^{n-m} w_\alpha \left[\sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha - v^\alpha\right]^2,$$

der sich genau wie im vorigen Falle umgestalten läßt in:

$$_mM^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \left\{\sum_1^{n-m} w_\alpha v^{2\alpha} - \left(\sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha\right)^2\right\}.$$

Nun ist

$$\sum_1^{n-m} w_\alpha v^\alpha = {}_{0|}q_{x+m}\, v + {}_{1|}q_{x+m}\, v^2 + \cdots + {}_{n-m-2|}q_{x+m}\, v^{n-m-1} + {}_{n-m-1}p_{x+m}\, v^{n-m}$$
$$= A_{x+m,\overline{n-m}|},$$

und die andere Summe in der Hauptklammer bedeutet dementsprechend $A'_{x+m,\overline{n-m}|}$.

Mithin ist endgültig

$$ {}_mM^2(E) = \left(C - \frac{r}{d}\right)^2 \{A'_{x+m,\overline{n-m}|} - A^2_{x+m,\overline{n-m}|}\}, \tag{31}$$

und ${}_mM(E)$ selbst die positive Quadratwurzel daraus.

Durch die Substitutionen 1. $C = 0$, $r = 1$; 2. $r = 0$, $C = 1$; 3. $C = 1$, $r = -P_x$ ergeben sich die speziellen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} {}_mM({}_{|n}\mathrm{a}_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m}|} - A^2_{x+m,\overline{n-m}|}} \\ {}_mM(A_{x,\overline{n}|}) &= \sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m}|} - A^2_{x+m,\overline{n-m}|}} \\ {}_mM(P_x) &= \frac{\sqrt{A'_{x+m,\overline{n-m}|} - A^2_{x+m,\overline{n-m}|}}}{1 - A_{x,\overline{n}|}} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und weiter durch die Substitution $n = \omega$ (oberste Altersgrenze) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} {}_mM(\mathrm{a}_x) &= \frac{1}{d}\sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}} \\ {}_mM(A_x) &= \sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}} \\ {}_mM(P_x) &= \frac{\sqrt{A'_{x+m} - A^2_{x+m}}}{1 - A_x} \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Aus diesen Formeln geht, wenn man sie mit den entsprechenden der vorigen Nummer zusammenhält, zunächst hervor, daß bei den behandelten Versicherungsarten das *Verhältnis* der Risikos durch die ganze Versicherungsdauer konstant und gleich dem ursprünglichen Verhältnis bleibt, die Einzelwerte jedoch ändern sich mit fortschreitender Dauer in dem Maße, als der Wert der Quadratwurzel sich verändert.

Vergleicht man ferner die Risikowerte (32) und (33) mit den anfänglichen Risiken zum Alter $x + m$, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_mM({}_{|n}\mathrm{a}_x) &= M({}_{|n-m}\mathrm{a}_{x+m}) \\ {}_mM(A_{x,\overline{n}|}) &= M(A_{x+m,\overline{n-m}|}) \\ {}_mM(P_x) &= \frac{\mathrm{a}_{x+m}}{\mathrm{a}_x} M(P_{x+m}) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und ähnliche für die lebenslänglichen Versicherungsformen.

Nach den Grundlagen der Tafel VIII und mit Hilfe der aus ihnen abgeleiteten Hilfstafel der vorigen Nummer ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned} {}_{10}M(\mathrm{a}_{70}) &= M(\mathrm{a}_{80}) = 3{,}1641 \\ {}_{10}M(A_{70}) &= M(A_{80}) = 0{,}1070 \\ {}_{10}M(P_{70}) &= \frac{\mathrm{a}_{80}}{\mathrm{a}_{70}} M(P_{80}) = 0{,}4235. \end{aligned}$$

351. Das einjährige mittlere Risiko einer einzelnen Versicherung. Die Frage nach dem einjährigen mittleren Risiko einer Versicherung — gedacht ist dabei an ein Versicherungsjahr — kann in zweifacher Weise gestellt werden; man kann nämlich um das Risiko für ein Jahr zu Beginn desselben und um das Risiko für ein beliebiges Jahr bei Abschluß der Versicherung fragen.

Es handle sich um irgendeine Todesfallversicherung (lebenslänglich, temporär, als Komponente einer gemischten Versicherung) auf das Kapital 1, abgeschlossen auf das Leben (x).

Zu Beginn des $\overline{\nu + 1}$-ten Versicherungsjahres seien s Personen dieser Art vorhanden, die dann im Alter $x + \nu$ stehen. Tritt der wahrscheinlichste Fall ein, daß $sq_{x+\nu}$ Personen im Laufe des Jahres sterben, so hat der Versicherer weder Gewinn noch Verlust aus der Sterblichkeit; sterben l Personen mehr, so bringt jede einen auf den Anfang des Jahres diskontierten Verlust $v(1 - {}_{\nu+1}V_x)$, sterben l Personen weniger, so bewirkt jede einen ebenso großen Gewinn. Demnach ist das Quadrat des mit den s Personen verbundenen Risikos der Durchschnittswert des Produkts

$$l^2 v^2 (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2,$$

und da nach Nr. 80

$$\mathfrak{D}(l^2) = s p_{x+\nu} q_{x+\nu},$$

so ist jenes Quadrat gleich

$$s p_{x+\nu} q_{x+\nu} v^2 (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2, \tag{35}$$

somit das Quadrat des auf *eine* Versicherung entfallenden Risikos:

$$M_\nu^2 = p_{x+\nu} q_{x+\nu} v^2 (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2. \tag{36}$$

Damit ist die erste Frage erledigt. Um das mittlere Risiko des $\overline{\nu + 1}$-ten Versicherungsjahres *beim Abschluß* bestimmen, hat man einmal zu beachten, daß, sofern s die Zahl der Personen bedeutet, die eine solche Versicherung abschließen, nach der wahrscheinlichsten Hypothese deren $s_\nu p_x$ in das $\overline{\nu + 1}$-te Versicherungsjahr eintreten, und daß der Verlust, bzw. Gewinn auf den Zeitpunkt des Abschlusses diskontiert $v^{\nu+1}(1 - {}_{\nu+1}V_x)$ beträgt; man hat also an Stelle des Ausdrucks (35) nunmehr

$$s_\nu p_x p_{x+\nu} q_{x+\nu} v^{2\nu+2} (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2,$$

was sich wegen ${}_\nu p_x = \frac{l_{x+\nu}}{l_x}$ umsetzen läßt in

$$s \frac{D'_{x+\nu}}{D'_x} p_{x+\nu} q_{x+\nu} v^2 (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2;$$

mithin ist das Quadrat des auf *eine* Versicherung entfallenden Risikos:

$$M_{|\nu}^2 = \frac{D'_{x+\nu}}{D'_x} p_{x+\nu} q_{x+\nu} v^2 (1 - {}_{\nu+1}V_x)^2. \tag{37}$$

Man kann nun das ganze Versicherungsgeschäft, das mit den s Personen abgeschlossen wurde, in die einzelnen Versicherungsjahre auflösen, und da a priori eine Abhängigkeit der Gewinne oder Verluste der einzelnen Jahre nicht vorhanden ist, so sind die Voraussetzungen des Tchebycheffschen Satzes, von dem in Nr. 125 Gebrauch gemacht wurde, erfüllt, und seine Anwendung führt zu dem von K. Hattendorff[1]) zuerst bemerkten Satze, daß *das Quadrat des mittleren Risikos einer Versicherung für ihre ganze Dauer gleichkommt der Summe der Quadrate der auf den Beginn bezogenen mittleren Risikos der einzelnen Versicherungsjahre,* in Zeichen:

$$M^2 = M_0^2 + M_{|1}^2 + M_{|2}^2 + \cdots + M_{|n-1}^2, \tag{38}$$

wenn n die Versicherungsdauer ist; bei lebenslänglicher Versicherung tritt $\omega - x$ an die Stelle von n.

Bemerkt sei, daß die Summe

$$M_{|\nu}^2 + M_{|\nu+1}^2 + \cdots + M_{|n-1}^2 \tag{39}$$

das Quadrat des auf den Abschlußtermin bezogenen Risikos vom Beginn des $\overline{\nu + 1}$-ten Jahres an für die ganze fernere Dauer bedeutet. Hat man also nach den Formeln (36) und (37) die Wertreihe M_0^2, $M_{|1}^2$, $M_{|2}^2, \cdots$ ausgerechnet, so kann man daraus durch Aufsummierung von unten jeden der Ausdrücke (39) und schließlich das totale Risikoquadrat (38) ableiten.

352. Einige Zahlenresultate. Um eine Vorstellung von der Abhängigkeit des mittleren Risikos von der Versicherungskombination, dem Alter und der abgelaufenen Versicherungsdauer und zugleich eine Illustration zu den vorstehenden theoretischen Entwicklungen zu geben, seien nachstehend einige Resultate ziffernmäßiger Berechnungen mitgeteilt.[2])

Die erste Tabelle gibt das mittlere Risiko einer auf 1000 abgeschlossenen gemischten, beziehungsweise einer lebenslänglichen Todesfallversicherung für deren ganze Dauer, sowohl bei einmaliger als auch bei fortlaufender Prämienzahlung während der Versicherungsdauer $n\,(\infty)$.

---

1) Masius, Rundschau d. Versich. XVIII (1868), p. 172. Die Herleitung ist eine völlig andere. Vgl. auch G. Bohlmann, Gutachten etc. des VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch., Wien 1909, Bd. I 1, p. 607—610.

2) Entnommen der zur vorigen Nummer zitierten Arbeit G. Bohlmanns. Als Rechnungsgrundlagen sind verwendet der Zinsfuß von 3% und die Amerikanische Sterbetafel, für welche das erforderliche Zahlenmaterial in dem Werke von A. Hunter, Net Premiums and Reserves on Joint Life Policies, New York 1902, enthalten ist.

Mittlere Risiko für die ganze Dauer bei der gemischten Versicherung und der lebenslänglichen Todesfallversicherung.

Eintrittsalter	Einmalige Prämienzahlung Versicherungsdauer						Jährliche Prämienzahlung Versicherungsdauer					
	10	15	20	25	30	∞	10	15	20	25	30	∞
25	36,1	61,4	86,6	110,3	132,0	199,8	146,0	181,0	208,4	231,1	250,3	310,3
35	38,1	65,0	91,7	116,7	139,0	186,9	155,0	193,1	223,7	249,6	271,9	322,1
45	42,9	73,2	103,0	129,5	150,5	174,6	176,5	223,0	261,7	294,2	320,3	352,3
55	54,3	90,5	121,9	144,3	156,5	161,0	233,5	297,4	347,7	383,8	404,5	412,7

Man wird vor allem das erheblich größere Risiko bemerken, das mit laufender Prämienzahlung verbunden ist, ferner wahrnehmen, daß das Risiko der gemischten Versicherung mit deren Dauer und dem Eintrittsalter wächst, daß es bei der Todesfallversicherung gegen einmalige Prämie mit dem Beitrittsalter abnimmt, dagegen bei jährlicher Prämienzahlung erheblich wächst.

Die zweite Tabelle gibt das mittlere Risiko einer bei dem Alter 55 auf 1000 abgeschlossenen Todesfallversicherung, wenn jährliche Prämienzahlung stattfindet, für die aufeinander folgenden Versicherungsjahre, jedesmal auf den Beginn des betreffenden Jahres bezogen.

Werte von $M_\nu(P_{55})$.

Versicherungsjahr $\nu+1$	$M_\nu(P_{55})$	Versicherungsjahr $\nu+1$	$M_\nu(P_{55})$	Versicherungsjahr $\nu+1$	$M_\nu(P_{55})$	Versicherungsjahr $\nu+1$	$M_\nu(P_{55})$
1	127,3	11	129,8	21	120,8	31	87,3
2	127,7	12	129,7	22	118,4	32	82,6
3	128,1	13	129,4	23	115,9	33	77,8
4	128,4	14	129,1	24	113,2	34	72,6
5	128,8	15	128,6	25	110,2	35	66,7
6	129,1	16	127,9	26	107,2	36	60,0
7	129,3	17	127,1	27	104,0	37	52,8
8	129,7	18	126,0	28	100,4	38	45,2
9	129,8	19	124,6	29	96,4	39	36,5
10	129,8	20	122,8	30	92,0	40	0,0

Das Risiko wächst anfänglich, erreicht im 10. Versicherungsjahre seinen größten Wert, von dem es anfangs langsam, dann immer rascher abfällt.

Die dritte Tabelle dient insbesondere zur Illustration der Ausführungen in Nr. 351. In der ersten Kolonne sind die Risikoquadrate der einzelnen Versicherungsjahre, wie sie sich bei Abschluß der Versicherung stellen, angegeben; die zweite Kolonne ist die von unten aus gebildete Summenreihe der ersten und gibt das Quadrat des mittleren Risikos vom Beginn des betreffenden Versicherungsjahres an,

wieder bezogen auf den Abschluß. Die Tabelle bezieht sich auf eine Todesfallversicherung, abgeschlossen auf 1000 und das Leben (55) gegen jährliche Prämienzahlung.

Werte von $M|_\nu^2(P_{55})$ und ihre Summen.

Versicherungsjahr $\nu+1$	$M\|_\nu^2(P_{55})$	$\sum_\nu M\|_\nu^2(P_{55})$	Versicherungsjahr $\nu+1$	$M\|_\nu^2(P_{55})$	$\sum_\nu M\|_\nu^2(P_{55})$
1	16 201	170 351	21	1 817	8 280
2	15 082	154 150	22	1 492	6 463
3	14 019	139 068	23	1 209	4 971
4	13 005	125 049	24	966	3 762
5	12 046	112 044	25	759	2 796
6	11 129	99 998	26	588	2 037
7	10 256	88 869	27	446	1 449
8	9 422	78 613	28	330	1 003
9	8 618	69 191	29	237	673
10	7 854	60 573	30	164	436
11	7 128	52 719	31	110	272
12	6 437	45 591	32	70,9	161,6
13	5 780	39 154	33	43,5	90,7
14	5 162	33 374	34	24,9	47,2
15	4 576	28 212	35	12,9	22,3
16	4 029	23 636	36	6,0	9,4
17	3 516	19 607	37	2,4	3,4
18	3 036	16 091	38	0,8	1,0
19	2 591	13 055	39	0,2	0,2
20	2 184	10 464	40	0,0	—

Hiernach stellt sich bei Abschluß der Versicherung das mittlere Risiko für ihre ganze Dauer auf $\sqrt{170\,351} = 412{,}7$ (in Übereinstimmung mit der Angabe der ersten Tabelle), und vom Beginn des 21. Versicherungsjahres an auf $\sqrt{8280} = 91$.

353. Das Risiko eines Versicherungsbestandes. Durch die Formeln der Nr. 349—351 in Verbindung mit dem in Nr. 345 angeführten Satze von der Zusammensetzung der mittleren Einzelrisikos zum Gesamtrisiko sind die Elemente gegeben, um das Risiko eines Versicherungsunternehmens zu einem bestimmten Zeitpunkte entweder für die fernere Dauer oder für das nächste Jahr zu berechnen.

Der erwähnte Satz hat allerdings Unabhängigkeit der einzelnen Fälle zur Voraussetzung, die nicht gewahrt ist bei den mehrfachen Versicherungen; denn der Ausgleich, der bei voneinander unabhängigen Versicherungen eintreten kann, indem Verluste und Gewinne sich teilweise aufheben, findet bei mehrfacher Versicherung derselben Person auf die nämliche Kombination nicht mehr statt, indem hier durch eine Abweichung vom wahrscheinlichsten Verlauf alle Verträge in gleichem Sinne beeinflußt werden. Bei dem Stande der Risikotheorie und ihrem Verhältnis zur Praxis würde sich aber ein Eingehen auf

diese Verhältnisse und die damit verbundenen Schwierigkeiten nicht rechtfertigen.

Vereinfachungen bieten sich dar durch Zusammenfassung gleichartiger Versicherungsfälle zu Gruppen. Es empfiehlt sich, zur Gewinnung eines allgemeinen Einblicks solche Gruppen für sich zu betrachten.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn es sich um eine Gruppe von Versicherungen handelt, die in der Kombination, im Alter der Versicherten, in der zurückgelegten Versicherungsdauer, im versicherten Kapital C (oder der Rente), also auch im mittleren ferneren Risiko M pro Geldeinheit übereinstimmen; ist s ihre Anzahl, so stellt sich ihr Gesamtrisiko durch

$$\mathrm{M} = CM\sqrt{s} \tag{40}$$

dar. Es wächst mit s im Verhältnis der Quadratwurzel. Da die angesammelte Prämienreserve dem s selbst proportional ist, so nimmt das Verhältnis des Risikos zur Prämenreserve wie die reziproke Quadratwurzel aus s ab.

Soll das mittlere Risiko für das nächste Verwaltungsjahr bestimmt werden, so kommt in Formel (40) für M das mittlere Risiko der Einzelversicherung für das betreffende Versicherungsjahr (s. Formel (36)) zu setzen.[1])

Die Versicherungen einer s-gliedrigen Gruppe seien gleichartig bis auf die versicherten Summen, die $C_1, C_2, \cdots, C_s$ sein mögen; dann kommt an die Stelle von (40) zu schreiben:

$$\mathrm{M} = M\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_s^2}. \tag{41}$$

An diese Formel ist eine wichtige Bemerkung zu knüpfen. Die Quadratsumme wird bei konstanter Summe $C_1 + C_2 + \cdots + C_s^1$ am kleinsten, wenn $C_1 = C_2 = \cdots = C_s$, also bei gleichmäßiger Verteilung der versicherten Summe auf die einzelnen Versicherungen. Ungleichmäßige Verteilung vergrößert das mittlere Risiko um so stärker, je mehr einzelne Summen vom Durchschnitt abweichen. Einem allzu großen Anwachsen des Risikos wird durch Limitierung der Höhe des versicherten Kapitals und durch Abgabe der überschießenden Beträge in Rückversicherung vorgebeugt.

Mit den Grundlagen der Tabellen in Nr. 352 ist beispielsweise das mittlere Risiko einer Todesfallversicherung, abgeschlossen auf das

1) Da Verwaltungsjahr und Versicherungsjahr in der Regel sich nicht decken, so wird wie bei der Reserveberechnung eine Interpolation notwendig sein; man kann sich mit der Einschaltung auf Mitte des Jahres begnügen, die so vorgenommen werden kann, daß man das arithmetische Mittel der Risikoquadrate für die benachbarten ganzjährigen Dauern nimmt, gleichgültig ob es sich um das fernere oder das einjährige Risiko handelt.

Leben eines 35-jährigen, nach fünfjähriger Dauer pro versicherte Einheit:

$$0{,}93395;$$

liegen 400 Versicherungen dieser Art vor, jede auf 1000 lautend, so ist mit ihnen ein mittleres Risiko von

$$1000 \cdot 0{,}93395 \sqrt{400} = 18\,679$$

verbunden; verteilt sich dagegen die Summe 400 000 auf

5	Fälle	à	10 000
25	„	„	5 000
50	„	„	2 000
70	„	„	1 000
250	„	„	220

so stellt sich das Risiko auf

$$0{,}93395 \sqrt{1\,407\,100\,000} = 35\,033$$

und würde, wenn die ganze Summe auf *ein* Leben versichert wäre, die Höhe

$$373\,500$$

erreichen.

Den allgemeinsten Fall, wie ihn die Praxis darbietet, bildet ein Versicherungsbestand, bestehend aus verschiedenen Versicherungskombinationen, aus Personen verschiedenen Beitrittsalters, verschiedener Versicherungsdauer und mit verschiedenen Versicherungssummen. Ist s die Anzahl der Versicherungen, ist bei der ν-ten Versicherung

$$\left.\begin{array}{l} C_\nu \text{ die Versicherungssumme (Rente)} \\ M_{(\nu)} \text{ das Risiko der versicherten Einheit} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \cdots s)$$

so gilt für das totale mittlere Risiko die Formel:

$$\mathrm{M} = \sqrt{C_1^2 M_{(1)}^2 + C_2^2 M_{(2)}^2 + \cdots + C_s^2 M_{(s)}^2}; \tag{42}$$

würde also in den Büchern, etwa neben der Reserve, bei jeder Versicherung oder Versicherungsgruppe das entsprechende $C_\nu^2 M_{(\nu)}^2$ hinzugeschrieben, so ergäbe die Hauptsumme dieser Rubrik das Quadrat von M. Dazu wären Tabellen der M^2 für alle Kombinationen, Alter und Versicherungsdauern erforderlich.

354. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des mittleren Risikos eines Versicherungsbestandes. Um die wahrscheinlichkeitstheoretische und damit zugleich die *versicherungstechnische Bedeutung* des eben besprochenen Gesamtrisikos M einer Versicherungsunternehmung ins rechte Licht zu stellen, kann man sich auf auf den in Nr. 120 entwickelten I. Satz von Tchebycheff stützen.

Es sei x die Differenz zwischen der Auszahlung A_α an einen *ersten* Versicherten und seiner Einzahlung E_α ($\alpha = 1, 2, \cdots l$, wenn l die Anzahl der möglichen zusammengehörigen Wertpapiere, entsprechend den unterschiedenen Annahmen über den Ablauf des betreffenden Versicherungsfalles, bedeutet), beide auf den Zeitpunkt der Risikoaufstellung reduziert; w_α ($\alpha = 1, 2, \cdots l$) die Wahrscheinlichkeit der Wertverbindung A_α, E_α, so daß

$$\sum_1^l w_\alpha = 1$$

ist. Die Buchstaben y, A_β, E_β, w_β ($\beta = 1, 2, \cdots m$); z, A_γ, E_γ, w_γ ($\gamma = 1, 2, \cdots n$) $\cdots$ mögen die analogen Bedeutungen für einen zweiten, dritten, $\cdots$ Versicherten haben.

Die Mittelwerte von x, y, z, $\cdots$ sind notwendig einzeln gleich Null, weil nach dem obersten Grundsatze der Versicherungsrechnung

$$\sum_1^l w_\alpha A_\alpha = \sum_1^l w_\alpha E_\alpha,$$

$$\sum_1^m w_\beta A_\beta = \sum_1^m w_\beta E_\beta,$$

$$\sum_1^n w_\gamma A_\gamma = \sum_1^n w_\gamma E_\gamma,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

stattfindet.

Die Mittelwerte von x^2, y^2, z^2, $\cdots$ sind die mittleren Risikoquadrate der entsprechenden Versicherungen, nämlich

$$M_{(\alpha)}^2 = \sum_1^l w_\alpha (A_\alpha - E_\alpha)^2$$

$$M_{(\beta)}^2 = \sum_1^m w_\beta (A_\beta - E_\beta)^2$$

$$M_{(\gamma)}^2 = \sum_1^n w_\gamma (A_\gamma - E_\gamma)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Anwendung des zitierten Satzes auf den vorliegenden Fall führt nun zu dem folgenden Ergebnis: „Die Wahrscheinlichkeit P, daß die totale Abweichung der Einzahlungen von den Auszahlungen:

$$\mathsf{E} = x + y + z + \cdots,$$

ihrem absoluten Werte nach das θ-fache Totalrisiko

$$\mathrm{M} = \sqrt{M_{(\alpha)}^2 + M_{(\beta)}^2 + M_{(\gamma)}^2 + \cdots}$$

nicht übertreffe, ist größer als $1 - \frac{1}{\theta^2}$."

Dieser Satz, der unabhängig von der Anzahl und der Art der Versicherungen und daher in hohem Grade allgemein ist, bestimmt jedoch nicht die *engsten* Grenzen, die einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit entsprechen. Ihm zufolge wüßte man beispielweise bloß, daß die Wahrscheinlichkeit, es werde E das dreifache M nicht übertreffen, größer als $\frac{9}{10}$ sei.

Man kann aber auch, von dem bei Versicherungsunternehmungen platzgreifenden Umstande der *sehr großen* Anzahl von Einzelfällen Gebrauch machend, die Frage auf ein anderes Gebiet übertragen, auf das der *Fehlertheorie.*

Es läßt sich nämlich die totale Abweichung

$$\mathsf{E} = x + y + z + \cdots$$

der Einzahlungen von den Auszahlungen als *zusammengesetzter Fehler* in der Beobachtung einer Größe betrachten, deren wahrscheinlichster Wert Null ist, entstehend durch das Zusammentreffen der *Elementarfehler* $x, y, z, \cdots$, die aus den einzelnen Versicherungen entspringen. Wenn nun die Anzahl dieser Elementarfehler sehr groß ist, so befolgt der Totalfehler E unabhängig davon, nach welchem Gesetz die $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma, \cdots$ mit fortlaufendem Zeiger sich ändern, ein Gesetz, das durch die Funktion

$$\varphi(\mathsf{E}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\mathsf{E}-a)^2} \tag{43}$$

dargestellt ist [s. Nr. 135, (15*)]. Dabei ist a die Summe der Mittelwerte von $x, y, z, \cdots$, im vorliegenden Falle also Null, und h^2 die halbe reziproke Summe der Mittelwerte von $x^2, y^2, z^2, \cdots$, d. h. also

$$h^2 = \frac{1}{2(M_{(\alpha)}^2 + M_{(\beta)}^2 + M_{(\gamma)}^2 + \cdots)} = \frac{1}{2\mathrm{M}^2},$$

so daß endgültig:

$$\varphi(\mathsf{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{M}^2}} e^{-\frac{\mathsf{E}^2}{2\mathrm{M}^2}}. \tag{44}$$

Sobald einmal das Gesetz des Fehlers feststeht, läßt sich auch der „mittlere" und der „durchschnittliche" Fehler ermitteln, die, sofern es sich um eigentliche Beobachtungsfehler handelt, Präzisionsmaße bilden, hier jedoch in der übertragenen Bedeutung *Maße für die Gefahr* des Unternehmens darstellen. Und zwar ist nach Nr. 142 der mittlere Fehler, d. i. die Quadratwurzel aus dem Mittelwerte von E^2, gleich

$$\mathrm{M},$$

und der durchschnittliche Fehler, d. i. der Mittelwert von $|\mathsf{E}|$, nach Nr. 141 gleich

$$\mathrm{M}\sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

da aber die Hälfte dieses Mittelwertes begrifflich mit dem durchschnittlichen Risiko R zusammenfällt, so ist

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{2\pi}} \tag{45}$$

(vgl. Nr. 123).

Im Sinne dieser Auffassung läßt sich nun auf Grund von (44) die Wahrscheinlichkeit P dafür bestimmen, daß E den k-fachen Betrag von M und daß es den k-fachen Betrag von R nicht überschreite. Wie in Nr. 125 und 124 ausgeführt worden, hängen dabei die Werte von k und P derart zusammen, daß in bezug auf M:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt, \tag{46}$$

in bezug auf R:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}\, dt \tag{47}$$

ist; nachstehend einige zusammengehörige Wertepaare:

k	in bezug auf M	in bezug auf R
	Wahrscheinlichkeit P	
1	0,68267	0,31006
2	0,95449	0,57498
3	0,99730	0,76863
4	0,99994	0,88945
5	.	0,95392
6	.	0,98382

355. Der Sterblichkeitsschwankungsfonds. An die letzten Ergebnisse knüpft sich unmittelbar die Frage nach der Höhe jenes Fonds, durch dessen Vorhandensein der Unternehmer mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit gesichert erscheint, für eventuelle Abgänge aus ungünstigen Schwankungen der Sterblichkeit aufkommen zu können. Wir stellen uns dabei auf den schon in Nr. 343 erörterten Standpunkt, die zugrunde gelegte Sterbetafel sei zutreffend.

Wie hoch die Wahrscheinlichkeit gegriffen werden soll, muß dem objektiven Ermessen oder einer von außen kommenden Festsetzung überlassen bleiben. Ein Fonds von der Höhe des mittleren

Risikos selbst würde mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ausreichen, ein Fonds von der Höhe des durchschnittlichen Risikos nur mit einer etwas unter $\frac{1}{3}$ liegenden Wahrscheinlichkeit.

Wie man bemerkt, sind M und R für den gedachten Zweck gleich verwendbar; nur in Ansehung der mathematischen Schwierigkeit ist M vorzuziehen.

Setzt man den *Sterblichkeitsschwankungsfonds* mit

$$k\mathrm{M}$$

fest, so wird k wohl auch als *Sicherheitskoeffizient* bezeichnet; denn je größer er ist, desto gesicherter ist das Unternehmen bei Vorhandensein des Fonds gegen eine ungünstige Abweichung des Sterblichkeitsverlaufs vom erwartungsmäßigen. Die Annahme $k = 3$, der nach obiger Tabelle die Wahrscheinlichkeit 0,9973 entspricht, ist in der Literatur vielfach vertreten.

Der Sterblichkeitsschwankungsfonds fällt bei demselben k verschieden groß aus, je nachdem er die Deckung für die ganze fernere Dauer oder bloß für ein Vertragsjahr bilden soll. Es liegt auf der Hand, daß er für den letzteren Fall kleiner ausfallen wird als für den ersteren, aber das Verhältnis ist wesentlich verschieden von dem der Zeiträume; das erklärt sich aus dem Umstande, daß ein längerer Zeitraum größere Möglichkeit eines Ausgleichs zwischen Verlusten und Gewinnen darbietet, wie dies auch bei einer längeren Reihe von Zufallsspielen zu beobachten ist, die nach dem Grundsatz der mathematischen Hoffnung geregelt sind.

Mit den Grundlagen der Tabellen in Nr. 352 ist das mittlere Risiko der gemischten Versicherungen $A_{35,\overline{20|}}$, $A_{35,\overline{25|}}$ und der Todesfallversicherung A_{35}, abgeschlossen auf 1000 gegen jährliche Prämienzahlung, am Beginn des 6. Versicherungsjahres für die fernere Dauer beziehungsweise gleich

$$166{,}48 \qquad 205{,}81 \qquad 311{,}22;$$

das mittlere Risiko zu demselben Zeitpunkte bloß für das 6. Versicherungsjahr beträgt in diesen Fällen beziehungsweise

$$73{,}91 \qquad 79{,}70 \qquad 87{,}68.$$

Liegen 2500 derartige Versicherungen in einem Bestande vor, so stellt sich bei der Annahme $k = 3$ der Sterblichkeitsschwankungsfonds im ersteren Falle beziehungsweise auf

$$24\,972 \qquad 30\,871 \qquad 46\,698,$$

im zweiten Falle auf

$$11\,087 \qquad 11\,955 \qquad 13\,152.$$

Setzt man diese Beträge zu der Prämienreserve ins Verhältnis, die

am Ende des 5. Versicherungsjahres angesammelt sein muß, so findet man, daß der Sterblichkeitsschwankungsfonds in den angezogenen Beispielen

	5,4	9,1	27,4
beziehungsweise	2,4	3,5	7,7 %

der Prämienreserve ausmacht.

Bei Vervierfachung des Bestandes erhöhen sich die absoluten Beträge auf das doppelte, während die zuletzt angeführten Verhältniszahlen auf die Hälfte herabsinken.

356. Mit der Risikotheorie zusammenhängende Begriffsbildungen. I. Es bedeutet eine Annäherung an die Wirklichkeit, wenn man bei der Beurteilung der Solvenz eines Versicherungsunternehmens auch die Gewinnquellen berücksichtigt, die ihm die Bildung eines Sicherheitsfonds ermöglichen, der, wie die Dinge tatsächlich geübt werden, mit den Zweck hat, für ungünstige Abweichungen der Sterblichkeit aufzukommen. Als Gewinnquellen können wirksam sein die Sterblichkeit, der Zinsfuß und die Zuschläge, soweit sie nicht durch die Verwaltungskosten absorbiert werden.

Soll in einem Zeitpunkte die Sicherheit des Unternehmens beurteilt werden, so hat man dem Sterblichkeitsschwankungsfonds $k\mathrm{M}$, den man als erforderlich festgesetzt hat, gegenüber zu halten den Sicherheitsfonds F, der aus den genannten Gewinnquellen in der Vergangenheit angesammelt wurde, und den veranschlagten Barwert G der von dem gegenwärtigen Bestande künftig zu erwartenden Gewinne. Wenn die Summe $F + G$ den Betrag $k\mathrm{M}$ übertrifft, so ist das Unternehmen schon kraft seines Geschäftsplanes gegen die Folgen ungünstiger Sterblichkeitsschwankungen in dem gewünschten Sicherheitsgrade gedeckt und es bleibt ein Überschuß für andere Zwecke übrig. Erreicht die Summe $F + G$ den Betrag $k\mathrm{M}$ nicht, dann bedürfte das Unternehmen eines dem Fehlbetrag gleichen Fonds, um mit der dem k entsprechenden Wahrscheinlichkeit gegen ungünstige Abweichungen der Sterblichkeit geschützt zu sein.

Man hat daher die Differenz

$$\mathfrak{R} = k\mathrm{M} - F - G \tag{48}$$

als eine für die Beurteilung der *Stabilität* eines Unternehmens charakteristische Größe unter dem Namen *Risikoreserve* eingeführt.

Kennzeichnet der Fall $\mathfrak{R} = 0$ gewissermaßen das labile Gleichgewicht, so kann bei $\mathfrak{R} < 0$ von Stabilität, bei $\mathfrak{R} > 0$ von Mangel der Stabilität gesprochen werden.

Bei dem Vorhandensein von Stabilität kann auch von einem *Grade* derselben gesprochen werden; ersetzt man nämlich bei $\mathfrak{R} < 0$ k durch ein größeres k' derart, daß nunmehr

$$k'\mathrm{M} - F - G = 0 \qquad (49)$$

wird, so ist die Stabilität als um so höher zu bezeichnen, je größer k' im Vergleich zu dem festgesetzten k ist; man kann also in der Zahl

$$\sigma = \frac{k'}{k} = \frac{F + G}{k\mathrm{M}} \qquad (50)$$

einen Ausdruck für den *Grad der Stabilität* erblicken.

II. Mit dem Begriff der Risikoreserve hat man die Frage nach der Zahl von Versicherten in Verbindung gebracht, bei der gerade die untere Grenze der Stabilität erreicht wird; es ist jene Zahl, die $\mathfrak{R} = 0$ zur Folge hat.

Um ein Beispiel zu geben, in welchem ihre Bestimmung sich leicht vollziehen läßt, nehmen wir ein Unternehmen an, das über keinen Sicherheitsfonds verfügt und an Gewinnquellen nur die Zuschläge besitzt; dasselbe setze sich überdies aus lauter gleichartigen Versicherungen zusammen.

Unter diesen Annahmen erscheint M in der Form $M\sqrt{s}$, wenn s die Zahl der Versicherungsfälle und M das Risiko des einzelnen bedeutet, G in der Form sg, wenn g den Barwert des aus einer Versicherung zu erwartenden Zuschlagsgewinns vorstellt, und es ist weiter $F = 0$; mithin wird

$$\mathfrak{R} = kM\sqrt{s} - sg$$

und daraus folgt für $\mathfrak{R} = 0$ die *Minimalzahl der Versicherten:*

$$s_0 = \frac{k^2 M^2}{g^2}. \qquad (51)$$

Bei ihrer Überschreitung tritt Stabilität von um so höherem Grade ein, je weiter man über s_0 hinauskommt.[1]

357. Eine andere Auffassung des Risikoproblems. Die Aufbringung eines Sicherheitsfonds, der mit dazu bestimmt ist, eventuelle Verluste aus Sterblichkeitsschwankungen zu decken, hat durch *Sicherheitszuschläge* zu den Nettoprämien zu erfolgen. Man kann nun von Anfang an das Problem so fassen, es sei die Prämienzahlung für eine Versicherung so einzurichten, daß außer der reinen Versicherungsleistung und den in bestimmter Weise präliminierten Unkosten auch ein vorgeschriebenes Vielfache des Risikos gedeckt sei. Diese Fassung hat A. Tauber dem Problem gegeben.[2]

---

1) Bezüglich eines näheren Eingehens auf diese Begriffe sei auf P. Radtkes Abhandlung: Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten, Zeitschr. f. d. g. Versich.-Wissensch. III (1903), p. 399—459, sowie auf den wiederholt zitierten Bericht G. Bohlmanns auf dem VI. intern. Kongr., Wien 1909, verwiesen.

2) Gutachten etc. d. VI. intern. Kongr. f. Versich.-Wissensch., Wien 1909, Bd. I 2, p. 781—838.

Es handle sich um eine auf n Jahre und das Kapital 1 abgeschlossene gemischte Versicherung. Die um die jährlichen laufenden Unkosten gekürzte Bruttoprämie sei P; im ersten Jahre sollen die Abschlußkosten α gedeckt werden.

Stirbt der Versicherte im Laufe des ν-ten Jahres $(\nu < n)$, so haben seine Einzahlungen am Schlusse dieses Jahres den Wert $\left(r = 1 + i = \frac{1}{v}\right)$:

$$(P - \alpha) r^\nu + P(r^{\nu-1} + r^{\nu-2} + \cdots + r) = P \frac{r^{\nu+1} - r}{r - 1} - \alpha r^\nu,$$

und da 1 zur Auszahlung kommt, so erleidet der Versicherer einen Verlust vom Betrage

$$1 + \frac{Pr}{r-1} + \left(\alpha - \frac{Pr}{r-1}\right) r^\nu = 1 + \frac{P}{1-v} + \left(\alpha - \frac{P}{1-v}\right)\frac{1}{v^\nu}$$

bei allen Werten von ν, für die

$$P \frac{r^{\nu+1} - r}{r-1} - \alpha r^\nu < 1 \tag{52}$$

ist. Die größte dieser Zahlen, sie heiße m, ist so gelegen, daß

$$P \frac{1 - v^m}{1 - v} < \alpha + v^m$$

$$\text{und } P \frac{1 - v^{m+1}}{1 - v} > \alpha + v^{m+1};$$

zwischen m und $m + 1$ liegt die *Risikodauer* τ, die der Gleichung

$$P \frac{1 - v^\tau}{1 - v} = \alpha + v^\tau \tag{53}$$

entspricht, also den völligen Ausgleich der beiderseitigen Leistungen herbeiführt.

Um das *durchschnittliche Risiko* R zu Beginn der Versicherung zu erhalten, hat man das Produkt

$$v^\nu \left[1 + \frac{P}{1-v} + \left(\alpha - \frac{P}{1-v}\right)\frac{1}{v^\nu}\right]_{\nu-1|}q_x$$

über die Werte $\nu = 1, 2, \cdots m$ zu summieren; dies gibt

$$\left(1 + \frac{P}{1-v}\right)\sum_1^m v^\nu{}_{\nu-1|}q_x + \left(\alpha - \frac{P}{1-v}\right)\sum_1^m {}_{\nu-1|}q_x;$$

es ist aber

$$\sum_1^m v^\nu{}_{\nu-1|}q_x = {}_{|m}A_x, \qquad \sum_1^m {}_{\nu-1|}q_x + {}_m p_x = 1,$$

folglich

$$R = \left(1 + \frac{P}{1-v}\right)_{|m}A_x + \left(\alpha - \frac{P}{1-v}\right)\left(1 - \frac{l_{x+m}}{l_x}\right),$$

und mit Rücksicht auf (53), das $\frac{P}{1-v} = \frac{\alpha + v^\tau}{1 - v^\tau}$ ergibt,

$$R = \frac{1+\alpha}{1 - v^\tau}\left[{}_{|m}A_x - v^\tau\left(1 - \frac{l_{x+m}}{l_x}\right)\right] = \Phi(\tau). \qquad (54)$$

Dadurch erscheint das Risiko als Funktion der Risikodauer τ und der mit dieser zusammenhängenden ganzen Zahl m dargestellt.

Im Sinne der an die Spitze gestellten Forderung hat nun die Prämie P der Gleichung

$$P_{|n}a_x = \alpha + A_{x,\overline{n}|} + kR$$

zu genügen, wenn k der vorgeschriebene Sicherheitskoeffizient ist. Ersetzt man die Prämie durch den dafür aus (53) resultierenden Ausdruck, so nimmt die Gleichung zunächst die Gestalt an:

$$\frac{\alpha + v^\tau}{1 - v^\tau}(1 - v)_{|n}a_x - \alpha - A_{x,\overline{n}|} = k\Phi(\tau);$$

beachtet man weiter, daß $A_{x,\overline{n}|} = 1 - (1 - v)_{|n}a_x$, so läßt sie sich nach Einführung des Ausdrucks für $\Phi(\tau)$ aus (55) weiter umformen in

$$v^\tau - A_{x,\overline{n}|} = k\left[{}_{|m}A_x - v^\tau(1 - {}_mp_x)\right]. \qquad (55)$$

Diese Gleichung nennt Tauber die *Risikogleichung*. Sie spielt in der Behandlung des Problems folgende Rolle. Ist k gegeben, so führt sie zur Bestimmung von τ und (53) liefert dann die erforderliche Prämie. Bei bekanntem P hingegen rechnet man aus (53) v^τ, bestimmt dazu aus einer Potenztafel der v das zugehörige m und kann daraufhin mittels (55) den Sicherheitskoeffizienten k berechnen, der dieser Prämie entspricht. Bemerkenswert ist der Umstand, daß (55) die Abschlußkosten α nicht enthält, daß also die Risikodauer davon unabhängig ist.

Der ersterwähnte Anwendungsfall bedarf aber noch einer näheren Erläuterung; denn die Bestimmung von τ aus (55) setzt die Kenntnis von m voraus. Berücksichtigt man, daß ${}_{|m}A_x + v^m{}_mp_x = A_{x,\overline{m}|}$ und daß die rechte Seite von (55) mit wachsendem τ wächst, so muß, da die Zahlen m und $m+1$ die Wurzel τ einschließen:

$$v^m - A_{x,\overline{n}|} - k[A_{x,\overline{m}|} - v^m] > 0$$
$$v^{m+1} - A_{x,\overline{n}|} - k[A_{x,\overline{m+1}|} - v^{m+1}] < 0$$

oder aber

$$v^m - k[A_{x,\overline{m}|} - v^m] > A_{x,\overline{n}|}$$
$$v^{m+1} - k[A_{x,\overline{m+1}|} - v^{m+1}] < A_{x,\overline{n}|}$$

sein; legt man also eine Tabelle der Funktion

$$\Omega_k(x, \nu) = v^\nu - k[A_{x,\overline{\nu}|} - v^\nu] = (1 + k)\, v^\nu - k A_{x,\overline{\nu}|}$$

an, so läßt sich auf Grund von x und $A_{x,\overline{n}|}$ aus dieser Tabelle das m unmittelbar entnehmen.

Damit ist der Grundgedanke dieser theoretisch bemerkenswerten Auffassung gekennzeichnet; bezüglich seiner weiteren Verfolgung sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Noch muß bemerkt werden, daß bei der Wahl von k einmal darauf Rücksicht zu nehmen ist, daß das *durchschnittliche* Risiko in Rechnung gezogen erscheint, und dann darauf, daß die Prämienbemessung auf den *einzelnen* Versicherungsfall gegründet wird.

Tafel IV. Deutsche Sterbetafel.

Männliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
0	100 000	25 273	81 527	0,25 273	0,74 727	35,58
1	74 727	4 851	71 833	0,06 492	0,93 508	46,52
2	69 876	2 319	68 606	0,03 319	0,96 681	48,72
3	67 557	1 560	66 706	0,02 309	0,97 691	49,38
4	65 997	1 126	65 385	0,01 705	0,98 295	49,53
5	64 871	843	64 420	0,01 300	0,98 700	49,39
6	64 028	659	63 678	0,01 030	0,98 970	49,03
7	63 369	520	63 094	0,00 820	0,99 180	48,54
8	62 849	418	62 629	0,00 665	0,99 335	47,93
9	62 431	342	62 252	0,00 548	0,99 452	47,25
10	62 089	289	61 939	0,00 466	0,99 534	46,61
11	61 800	253	61 670	0,00 409	0,99 591	45,72
12	61 547	227	61 431	0,00 368	0,99 632	44,91
13	61 320	212	61 213	0,00 347	0,99 653	44,07
14	61 108	216	61 001	0,00 352	0,99 648	43,23
15	60 892	235	60 778	0,00 387	0,99 613	42,38
16	60 657	274	60 525	0,00 451	0,99 549	41,54
17	60 383	320	60 229	0,00 531	0,99 469	40,72
18	60 063	367	59 885	0,00 610	0,99 390	39,94
19	59 696	409	59 496	0,00 685	0,99 315	39,18
20	59 287	444	59 069	0,00 750	0,99 250	38,45
21	58 843	474	58 609	0,00 805	0,99 195	37,73
22	58 369	498	58 121	0,00 853	0,99 147	37,04
23	57 871	493	57 624	0,00 852	0,99 148	36,35
24	57 378	486	57 134	0,00 847	0,99 153	35,66
25	56 892	482	56 651	0,00 848	0,99 152	34,96
26	56 410	483	56 169	0,00 855	0,99 145	34,25
27	55 927	485	55 685	0,00 868	0,99 132	33,55
28	55 442	491	55 197	0,00 885	0,99 115	32,83
29	54 951	497	54 703	0,00 905	0,99 095	32,12
30	54 454	505	54 203	0,00 928	0,99 072	31,41
31	53 949	515	53 693	0,00 954	0,99 046	30,70
32	53 434	526	53 173	0,00 984	0,99 016	29,99
33	52 908	539	52 640	0,01 019	0,98 981	29,29
34	52 369	554	52 094	0,01 058	0,98 942	28,58
35	51 815	571	51 532	0,01 101	0,98 899	27,88
36	51 244	588	50 952	0,01 148	0,98 852	27,19
37	50 656	607	50 355	0,01 199	0,98 801	26,50
38	50 049	627	49 738	0,01 253	0,98 747	25,81
39	49 422	647	49 101	0,01 308	0,98 692	25,13
40	48 775	665	48 445	0,01 363	0,98 637	24,46
41	48 110	682	47 771	0,01 418	0,98 582	23,79
42	47 428	699	47 081	0,01 475	0,98 525	23,13
43	46 729	719	46 372	0,01 537	0,98 463	22,46
44	46 010	738	45 644	0,01 605	0,98 395	21,81
45	45 272	761	44 894	0,01 680	0,98 320	21,16
46	44 511	783	44 122	0,01 761	0,98 239	20,51
47	43 728	809	43 327	0,01 848	0,98 152	19,87
48	42 919	833	42 506	0,01 941	0,98 059	19,23
49	42 086	858	41 660	0,02 040	0,97 960	18,60

Deutsche Sterbetafel.

Weibliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
0	100 000	21 740	84 355	0,21 740	0,78 260	38,45
1	78 260	4 980	75 275	0,06 364	0,93 636	48,06
2	73 280	2 338	71 965	0,03 258	0,96 742	50,30
3	70 892	1 597	70 028	0,02 253	0,97 747	50,98
4	69 295	1 169	68 657	0,01 687	0,98 313	51,14
5	68 126	877	67 657	0,01 287	0,98 713	51,01
6	67 249	677	66 889	0,01 007	0,98 993	50,67
7	66 572	537	66 288	0,00 807	0,99 193	50,18
8	66 035	436	65 806	0,00 660	0,99 340	49,51
9	65 599	362	65 410	0,00 552	0,99 448	48,91
10	65 237	311	65 076	0,00 476	0,99 524	48,18
11	64 926	277	64 784	0,00 427	0,99 573	47,41
12	64 649	259	64 518	0,00 401	0,99 599	46,61
13	64 390	254	64 263	0,00 394	0,99 606	45,80
14	64 136	258	64 008	0,00 402	0,99 598	44,97
15	63 878	269	63 745	0,00 422	0,99 578	44,15
16	63 609	287	63 468	0,00 451	0,99 549	43,34
17	63 322	309	63 170	0,00 487	0,99 513	42,53
18	63 013	332	62 850	0,00 527	0,99 473	41,74
19	62 681	357	62 506	0,00 570	0,99 430	40,96
20	62 324	383	62 136	0,00 614	0,99 386	40,19
21	61 941	407	61 741	0,00 658	0,99 342	39,43
22	61 534	432	61 321	0,00 701	0,99 299	38,09
23	61 102	454	60 878	0,00 743	0,99 257	37,96
24	60 648	474	60 414	0,00 783	0,99 217	37,24
25	60 174	494	59 929	0,00 820	0,99 180	36,53
26	59 680	510	59 427	0,00 854	0,99 146	35,83
27	59 170	523	58 910	0,00 885	0,99 115	35,13
28	58 647	536	58 380	0,00 913	0,99 087	34,44
29	58 111	545	57 841	0,00 939	0,99 061	33,76
30	57 566	556	57 289	0,00 965	0,99 035	33,07
31	57 010	565	56 729	0,00 992	0,99 008	32,39
32	56 445	576	56 158	0,01 020	0,98 980	31,71
33	55 869	587	55 577	0,01 050	0,98 950	31,03
34	55 282	597	54 985	0,01 080	0,98 920	30,35
35	54 685	607	54 383	0,01 110	0,98 890	29,60
36	54 087	616	53 771	0,01 140	0,98 860	29,01
37	53 462	625	53 150	0,01 168	0,98 832	28,34
38	52 837	630	52 522	0,01 192	0,98 808	27,66
39	52 207	631	51 892	0,01 210	0,98 790	26,99
40	51 576	630	51 261	0,01 222	0,98 778	26,32
41	50 946	626	50 632	0,01 228	0,98 772	25,64
42	50 320	619	50 010	0,01 230	0,98 770	24,95
43	49 701	611	49 395	0,01 230	0,98 770	24,25
44	49 090	609	48 785	0,01 240	0,98 760	23,55
45	48 481	611	48 176	0,01 260	0,98 740	22,84
46	47 870	622	47 561	0,01 300	0,98 700	22,12
47	47 248	643	46 929	0,01 360	0,98 640	21,41
48	46 605	666	46 275	0,01 430	0,98 570	20,70
49	45 939	694	45 596	0,01 510	0,98 490	19,99

Männliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
50	41 228	885	49 789	0,02 145	0,97 885	17,98
51	40 343	910	39 891	0,02 256	0,97 744	17,36
52	39 433	936	38 968	0,02 374	0,97 626	16,75
53	38 497	963	38 019	0,02 501	0,97 499	16,15
54	37 534	990	37 043	0,02 639	0,97 361	15,55
55	36 544	1 020	36 038	0,02 790	0,97 210	14,96
56	35 524	1 050	35 003	0,02 956	0,97 044	14,37
57	34 474	1 082	33 937	0,03 139	0,96 861	13,79
58	33 392	1 116	32 838	0,03 342	0,96 658	13,22
59	32 276	1 152	31 705	0,03 568	0,96 432	12,66
60	31 124	1 189	30 534	0,03 820	0,96 180	12,11
61	29 935	1 227	29 326	0,04 100	0,95 900	11,57
62	28 708	1 266	28 080	0,04 409	0,95 591	11,05
63	27 442	1 303	26 795	0,04 748	0,95 252	10,53
64	26 139	1 337	25 475	0,05 118	0,94 882	10,03
65	24 802	1 369	24 121	0,05 520	0,94 480	9,55
66	23 433	1 396	22 738	0,05 956	0,94 044	9,08
67	22 037	1 417	21 331	0,06 429	0,93 571	8,62
68	20 620	1 431	19 906	0,06 942	0,93 058	8,18
69	19 189	1 439	18 470	0,07 500	0,92 500	7,75
70	17 750	1 440	17 029	0,08 108	0,91 892	7,34
71	16 310	1 430	15 593	0,08 770	0,91 230	6,94
72	14 880	1 412	14 171	0,09 489	0,90 511	6,56
73	13 468	1 383	12 772	0,10 267	0,89 733	6,19
74	12 085	1 342	11 408	0,11 105	0,88 895	5,85
75	10 743	1 289	10 091	0,12 004	0,87 996	5,51
76	9 454	1 226	8 832	0,12 965	0,87 035	5,20
77	8 228	1 151	7 643	0,13 989	0,86 011	4,90
78	7 077	1 067	6 532	0,15 077	0,84 923	4,62
79	6 010	975	5 511	0,16 230	0,83 770	4,35
80	5 035	879	4 583	0,17 448	0,82 552	4,10
81	4 156	778	3 754	0,18 731	0,81 269	3,86
82	3 378	678	3 027	0,20 074	0,79 926	3,64
83	2 700	580	2 398	0,21 467	0,78 533	3,43
84	2 120	485	1 866	0,22 900	0,77 100	3,24
85	1 635	399	1 425	0,24 363	0,75 637	3,06
86	1 236	319	1 067	0,25 846	0,74 154	2,90
87	917	251	784	0,27 344	0,72 656	2,74
88	666	192	563	0,28 852	0,71 148	2,60
89	474	144	397	0,30 370	0,69 630	2,46
90	330	105	273	0,31 902	0,68 098	2,34
91	225	75	184	0,33 457	0,66 543	2,22
92	150	53	121	0,35 047	0,64 953	2,10
93	97	36	77	0,36 689	0,63 311	1,99
94	61	23	48	0,38 404	0,61 596	1,89
95	38	15	30	0,40 217	0,59 783	1,80
96	23	10	17,4	0,42 158	0,57 842	1,68
97	13	5,7	9,7	0,44 259	0,55 741	1,57
98	7,3	3,4	5,4	0,46 560	0,53 440	1,49
99	3,9	1,9	2,8	0,49 102	0,50 898	1,41
100	2,0	1,0	1,4	0,51 930	0,48 070	1,36

Weibliches Geschlecht.

Alter x	Überlebende l_x	Gestorbene d_x	Bevölkerung L_x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Lebenswahrscheinlichkeit p_x	(Abgekürzte) Lebenserwartung e_x
50	45 245	724	44 887	0,01 600	0,98 400	19,29
51	44 521	754	44 148	0,01 695	0,98 305	18,59
52	43 767	786	43 378	0,01 795	0,98 205	17,91
53	42 981	819	42 576	0,01 905	0,98 095	17,22
54	42 162	854	41 740	0,02 025	0,97 975	16,55
55	41 308	894	40 867	0,02 165	0,97 835	15,88
56	40 414	942	39 949	0,02 330	0,97 670	15,22
57	39 472	996	38 981	0,02 525	0,97 475	14,57
58	38 476	1 058	37 955	0,02 750	0,97 250	13,94
59	37 418	1 125	36 864	0,03 005	0,96 995	13,31
60	36 293	1 192	35 705	0,03 285	0,96 715	12,71
61	35 101	1 258	34 480	0,03 585	0,96 415	12,13
62	33 843	1 322	33 190	0,03 905	0,96 095	11,56
63	32 521	1 381	31 837	0,04 247	0,95 753	11,01
64	31 140	1 437	30 428	0,04 613	0,95 387	10,47
65	29 703	1 486	28 966	0,05 005	0,94 995	9,96
66	28 217	1 531	27 457	0,05 425	0,94 575	9,45
67	26 686	1 568	25 906	0,05 875	0,94 125	8,97
68	25 118	1 597	24 323	0,06 360	0,93 640	8,50
69	23 521	1 620	22 713	0,06 885	0,93 115	8,04
70	21 901	1 636	21 085	0,07 470	0,92 530	7,60
71	20 265	1 648	19 442	0,08 135	0,91 865	7,17
72	18 617	1 657	17 789	0,08 900	0,91 100	6,76
73	16 960	1 653	16 132	0,09 745	0,90 255	6,37
74	15 307	1 630	14 488	0,10 650	0,89 350	6,00
75	13 677	1 587	12 877	0,11 600	0,88 400	5,66
76	12 090	1 521	11 320	0,12 585	0,87 415	5,34
77	10 569	1 438	9 838	0,13 600	0,86 400	5,03
78	9 131	1 336	8 450	0,14 640	0,85 360	4,75
79	7 795	1 225	7 168	0,15 710	0,84 290	4,48
80	6 570	1 106	6 002	0,16 830	0,83 170	4,22
81	5 464	985	4 956	0,18 025	0,81 975	3,98
82	4 479	865	4 032	0,19 310	0,80 690	3,75
83	3 614	747	3 226	0,20 685	0,79 315	3,53
84	2 867	635	2 536	0,22 135	0,77 865	3,33
85	2 232	527	1 956	0,23 635	0,76 365	3,14
86	1 705	429	1 479	0,25 160	0,74 840	2,96
87	1 276	341	1 095	0,26 700	0,73 300	2,80
88	935	264	794	0,28 250	0,71 750	2,65
89	671	200	564	0,29 810	0,70 190	2,51
90	471	148	391	0,31 384	0,68 616	2,37
91	323	106	265	0,32 981	0,67 019	2,25
92	217	75	176	0,34 612	0,65 388	2,13
93	142	52	113	0,36 296	0,63 704	2,01
94	90	34	71	0,38 052	0,61 948	1,91
95	56	22	44	0,39 905	0,60 095	1,81
96	34	14	26	0,41 885	0,58 115	1,70
97	20	9	15	0,44 025	0,55 975	1,59
98	11	5	8,1	0,46 362	0,53 638	1,46
99	5,9	2,9	4,2	0,48 939	0,51 061	1,35
100	3,0	1,6	2,1	0,51 800	0,48 200	1,24

Tafel V.

Sterbetafel *M* und *WI* der 23 deutschen Gesellschaften

nebst Grundzahlen zu $3\frac{1}{2}\%$.

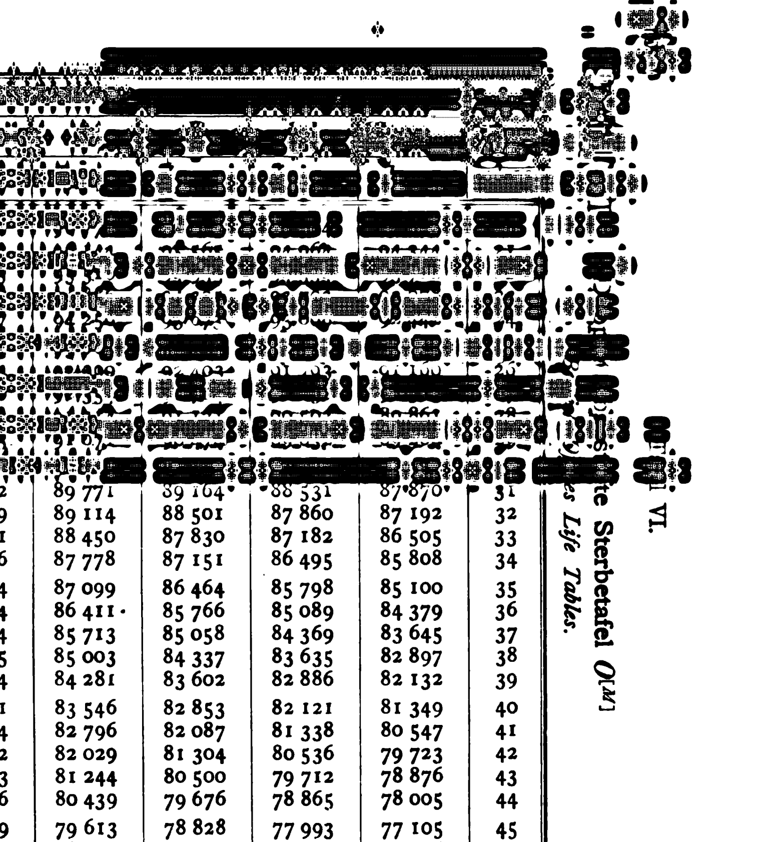
x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
20	100 000	919	50 257	1 013 125	446,24	15 386,49
21	99 081	908	48 109	980 868	425,99	14 940,25
22	98 173	887	46 057	932 759	402,06	14 514,26
23	97 286	861	44 097	886 702	377,08	14 112,20
24	96 425	835	42 229	842 605	353,33	13 735,12
25	95 590	816	40 449	800 376	333,61	13 381,79
26	94 774	804	38 747	759 927	317,59	13 048,18
27	93 970	797	37 119	721 180	304,17	12 730,59
28	93 173	795	35 560	684 061	293,15	12 426,42
29	92 378	800	34 062	648 501	285,02	12 133,27
30	91 578	808	32 626	614 439	278,13	11 848,25
31	90 770	818	31 246	581 813	272,06	11 570,12
32	89 952	831	29 917	550 567	267,03	11 298,06
33	89 121	841	28 637	520 650	261,11	11 031,03
34	88 280	856	27 408	492 013	256,77	10 769,92
35	87 424	873	26 224	464 605	253,02	10 513,15
36	86 551	889	25 084	438 381	248,94	10 260,13
37	85 662	906	23 987	413 297	245,12	10 011,19
38	84 756	928	22 931	389 310	242,59	9 766,07
39	83 828	950	21 913	366 379	239,94	9 523,48
40	82 878	975	20 933	344 466	237,93	9 283,54
41	81 903	1006	19 987	323 533	237,19	9 045,61
42	80 897	1035	19 072	303 546	235,78	8 808,42
43	79 862	1063	18 192	284 474	233,79	8 572,64
44	78 799	1092	17 344	266 282	232,21	8 338,67
45	77 707	1117	16 523	248 938	229,51	8 106,46
46	76 590	1140	15 736	232 415	226,31	7 876,95
47	75 450	1169	14 978	216 679	224,22	7 650,64
48	74 281	1204	14 247	201 701	223,12	7 426,42
49	73 077	1246	13 542	187 454	223,09	7 203,30
50	71 831	1303	12 861	173 912	225,42	6 980,21
51	70 528	1362	12 201	161 051	227,65	6 754,79
52	69 166	1425	11 561	148 850	230,14	6 527,14
53	67 741	1490	10 940	137 289	232,49	6 297,00
54	66 251	1556	10 337	126 349	234,58	6 064,51
55	64 695	1621	9 753,2	116 012,3	236,12	5 829,93
56	63 074	1691	9 187,4	106 259,1	237,97	5 593,81
57	61 383	1759	8 638,5	97 071,7	239,18	5 355,84
58	59 624	1832	8 107,2	88 433,2	240,68	5 116,66
59	57 792	1900	7 592,5	80 326,0	241,17	4 875,98

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
60	55 892	1976	7 094,4	72 733,5	242,33	4 634,81
61	53 916	2038	6 612,2	65 639,1	241,48	4 392,48
62	51 878	2097	6 147,2	59 026,9	240,07	4 151,00
63	49 781	2149	5 699,1	52 879,7	237,70	3 910,93
64	47 632	2197	5 268,8	47 180,6	234,79	3 673,23
65	45 435	2246	4 855,8	41 911,8	231,92	3 438,44
66	43 189	2302	4 459,6	37 056,0	229,67	3 206,52
67	40 887	2355	4 079,1	32 596,4	227,01	2 976,85
68	38 532	2399	3 714,3	28 517,3	223,43	2 749,84
69	36 133	2432	3 365,3	24 803,0	218,84	2 526,41
70	33 107	2452	3 032,5	21 437,7	213,19	2 307,57
71	31 249	2455	2 716,7	18 405,2	206,23	2 094,38
72	28 794	2436	2 418,8	15 688,5	197,70	1 888,15
73	26 358	2406	2 139,2	13 269,7	188,67	1 690,45
74	23 952	2360	1 878,2	11 130,5	178,80	1 501,78
75	21 592	2299	1 635,9	9 252,3	168,30	1 322,98
76	19 293	2210	1 412,2	7 616,4	156,31	1 154,68
77	17 083	2103	1 208,1	6 204,2	143,70	998,37
78	14 980	1982	1 023,6	4 996,1	130,86	854,67
79	12 998	1848	858,1	3 972,5	117,87	723,81
80	11 150	1730	711,3	3 114,4	106,63	605,94
81	9 420	1599	580,6	2 403,1	95,22	499,31
82	7 821	1443	465,8	1 822,5	83,02	404,09
83	6 378	1264	366,9	1 356,7	70,26	321,07
84	5 114	1080	284,4	989,8	58,01	250,81
85	4 034	896	216,6	705,4	46,50	192,80
86	3 138	715	162,8	488,8	35,85	146,30
87	2 423	566	121,5	326,0	27,42	110,45
88	1 857	442	89,9	204,5	20,68	83,03
89	1 415	344	66,2	114,6	15,56	62,35
90	1 071	1071	48,4	48,4	46,79	46,79

[illegible] VI.

[illegible] Sterbetafel $O^{[M]}$

[illegible] Life Tables.



21	93 060	92 814	92 404	91 936	91 435	90 907	90 352	89 771	89 164	88 531	87 870	31
22	92 422	92 175	91 763	91 293	90 790	90 258	89 699	89 114	88 501	87 860	87 192	32
23	91 781	91 532	91 119	90 646	90 140	89 604	89 041	88 450	87 830	87 182	86 505	33
24	91 137	90 885	90 470	89 995	89 485	88 945	88 376	87 778	87 151	86 495	85 808	34
25	90 488	90 233	89 816	89 338	88 824	88 279	87 704	87 099	86 464	85 798	85 100	35
26	89 834	89 576	89 156	88 675	88 156	87 605	87 024	86 411	85 766	85 089	84 379	36
27	89 174	88 914	88 490	88 005	87 481	86 924	86 334	85 713	85 058	84 369	83 645	37
28	88 508	88 244	87 817	87 327	86 797	86 233	85 635	85 003	84 337	83 635	82 897	38
29	87 835	87 567	87 135	86 640	86 103	85 531	84 924	84 281	83 602	82 886	82 132	39
30	87 153	86 881	86 445	85 943	85 400	84 819	84 201	83 546	82 853	82 121	81 349	40
31	86 462	86 185	85 744	85 236	84 684	84 093	83 464	82 796	82 087	81 338	80 547	41
32	85 761	85 479	85 032	84 516	83 955	83 354	82 712	82 029	81 304	80 536	79 723	42
33	85 049	84 761	84 307	83 783	83 212	82 599	81 943	81 244	80 500	79 712	78 876	43
34	84 324	84 030	83 568	83 036	82 454	81 827	81 156	80 439	79 676	78 865	78 005	44
35	83 586	83 284	82 814	82 272	81 678	81 037	80 349	79 613	78 828	77 993	77 105	45
36	82 832	82 522	82 044	81 491	80 883	80 227	79 520	78 764	77 955	77 093	76 176	46
37	82 062	81 743	81 255	80 690	80 068	79 394	78 668	77 889	77 054	76 164	75 215	47
38	81 273	80 945	80 446	79 868	79 230	78 538	77 790	76 986	76 124	75 202	74 220	48
39	80 464	80 126	79 616	79 023	78 368	77 655	76 884	76 053	75 161	74 207	73 187	49




Doppelt abgestufte Sterbetafel $O^{[M]}$ Tafel VI.

British Offices Life Tables.

40	79 634	79 285	78 761	78 153	77 480	76 745	75 948	75 089	74 164	73 174	72 115	50
41	78 780	78 419	77 881	77 256	76 562	75 804	74 980	74 089	73 130	72 101	71 000	51
42	77 900	77 526	76 973	76 329	75 614	74 803	73 976	73 052	72 056	70 985	69 839	52
43	76 992	76 604	76 035	75 371	74 632	73 820	72 935	71 975	70 939	69 824	68 630	53
44	76 053	75 650	75 064	74 379	73 614	72 772	71 853	70 855	69 776	68 615	67 369	54
45	75 082	74 663	74 058	73 349	72 557	71 683	70 728	69 689	68 564	67 353	66 054	55
46	74 076	73 640	73 014	72 280	71 459	70 551	69 556	68 474	67 301	66 037	64 681	56
47	73 032	72 577	71 929	71 169	70 316	69 372	68 336	67 207	65 983	64 663	63 247	57
48	71 948	71 472	70 801	70 013	69 126	68 143	67 063	65 885	64 607	63 229	61 750	58
49	70 820	70 323	69 626	68 808	67 885	66 861	65 734	64 505	63 171	61 731	60 187	59
50	69 646	69 126	68 402	67 551	66 591	65 523	64 348	63 064	61 670	60 167	58 555	60
51	68 422	67 878	67 125	66 241	65 240	64 127	62 900	61 559	60 104	58 535	56 852	61
52	67 146	66 576	65 793	64 873	63 830	62 669	61 388	59 988	58 469	56 832	55 078	62
53	65 814	65 217	64 403	63 444	62 358	61 146	59 809	58 348	56 763	55 056	53 230	63
54	64 424	63 798	62 951	61 953	60 820	59 556	58 161	56 637	54 985	53 207	51 308	64
55	62 972	62 317	61 434	60 395	59 215	57 897	56 443	54 854	53 134	51 285	49 313	65
56	61 456	60 770	59 851	58 769	57 539	56 166	54 651	52 998	51 209	49 289	47 246	66
57	59 873	59 155	58 199	57 073	55 793	54 363	52 787	51 068	49 210	47 222	45 110	67
58	58 221	57 470	56 475	55 304	53 973	52 486	50 848	49 064	47 140	45 084	42 907	68
59	56 498	55 713	54 679	53 463	52 080	50 536	48 837	46 989	45 000	42 881	40 644	69
60	54 702	53 882	52 809	51 547	50 113	48 513	46 754	44 845	42 795	40 617	38 325	70
61	52 833	51 978	50 866	49 558	48 073	46 418	44 602	42 635	40 529	38 298	35 961	71
62	50 890	50 000	48 849	47 497	45 962	44 255	42 385	40 365	38 208	35 933	33 560	72
63	48 873	47 950	46 761	45 366	43 784	42 028	40 109	38 041	35 842	33 532	31 134	73
64	46 785	45 829	44 604	43 168	41 543	39 742	37 779	35 672	33 440	31 106	28 697	74
65	44 628	43 641	42 382	40 909	39 245	37 405	35 406	33 268	31 013	28 669	26 264	75
66	42 406	41 389	40 100	38 594	36 897	35 025	32 998	30 840	28 576	26 236	23 851	76
67	40 125	39 082	37 765	36 233	34 508	32 613	30 569	28 403	26 144	23 824	21 477	77
68	37 791	36 725	35 387	33 833	32 090	30 181	28 132	25 972	23 733	21 450	19 160	78
69	35 412	34 329	32 975	31 408	29 655	27 743	25 702	23 563	21 361	19 135	16 921	79
70	33 000	31 904	30 542	28 969	27 218	25 316	23 297	21 195	19 048	16 896	14 778	80
71	30 567	29 464	28 101	26 533	24 794	22 916	20 934	18 887	16 813	14 754	12 751	81
72	28 125	27 023	25 668	24 116	22 402	20 562	18 634	16 658	14 675	12 728	10 856	82
73	25 692	24 597	23 260	21 735	20 060	18 274	16 915	14 528	12 654	10 835	9 109,2	83
74	23 283	22 205	20 896	19 410	17 788	16 070	14 298	12 516	10 767	9 090,4	7 522,9	84
75	20 918	19 865	18 594	17 160	15 604	13 970	12 300	10 638	9 027,6	7 506,0	6 105,6	85

Tafel VII.

Sterbetafeln AH_G^M, $AH_{G(5)}^M$, $AH_{G(10)}^M$ aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten.

Gemischte Versicherungen.

Alter	AH_G^M		$AH_{G(5)}^M$		$AH_{G(10)}^M$	
x	q_x	l_x	q_x	l_x	q_x	l_x
20	0,00 293	100 000	—	—	—	—
21	,00 303	99 707	—	—	—	—
22	,00 313	99 405	—	—	—	—
23	,00 324	99 094	—	—	—	—
24	,00 336	98 773	—	—	—	—
25	,00 349	98 441	0,00 373	100 000	—	—
26	,00 363	98 098	,00 391	99 627	—	—
27	,00 377	97 743	,00 411	99 237	—	—
28	,00 393	97 374	,00 432	98 829	—	—
29	,00 411	96 991	,00 455	98 402	—	—
30	,00 430	96 592	,00 479	97 954	0,00 497	100 000
31	,00 450	96 177	,00 504	97 486	,00 522	99 503
32	,00 472	95 745	,00 532	96 994	,00 550	98 984
33	,00 496	95 293	,00 561	96 478	,00 579	98 439
34	,00 521	94 821	,00 592	95 937	,00 610	97 870
35	,00 549	94 327	,00 625	95 369	,00 643	97 273
36	,00 578	93 809	,00 661	94 772	,00 678	96 648
37	,00 611	93 267	,00 699	94 146	,00 716	95 992
38	,00 645	92 697	,00 739	93 489	,00 756	95 305
39	,00 683	92 099	,00 782	92 798	,00 799	94 585
40	,00 723	91 470	,00 827	92 073	,00 844	93 829
41	,00 767	90 809	,00 876	91 311	,00 893	93 037
42	,00 814	90 113	,00 928	90 511	,00 945	92 206
43	,00 865	89 379	,00 984	89 671	,01 000	91 334
44	,00 920	88 606	,01 043	88 789	,01 059	90 421
45	,00 979	87 791	,01 106	87 863	,01 122	89 463
46	,01 043	86 931	,01 173	86 891	,01 189	88 458
37	,01 112	86 024	,01 245	85 872	,01 261	87 406
48	,01 187	85 067	,01 321	84 803	,01 337	86 304
49	,01 267	84 057	,01 403	83 682	,01 419	85 150
50	,01 354	82 992	,01 490	82 508	,01 505	83 942
51	,01 448	81 868	,01 582	81 279	,01 598	82 678
52	,01 549	80 683	,01 681	79 993	,01 696	81 357
53	,01 658	79 433	,01 786	78 648	,01 801	79 978
54	,01 776	78 116	,01 898	77 244	,01 913	78 537

Alter x	AH_G^M		$AH_{G(5)}^M$		$AH_{G(10)}^M$	
	q_x	l_x	q_x	l_x	q_x	l_x
55	0,01 903	76 729	0,02 018	75 777	0,02 032	77 035
56	,02 040	75 269	,02 145	74 248	,02 159	75 469
57	,02 187	73 734	,02 281	72 656	,02 294	73 840
58	,02 346	72 122	,02 425	70 999	,02 438	72 146
59	,02 518	70 429	,02 579	69 277	,02 592	70 387
60	,02 703	68 656	,02 743	67 490	,02 755	68 562
61	,02 902	66 800	,02 918	65 639	,02 930	66 673
62	,03 117	64 862	,03 103	63 724	,03 115	64 720
63	,03 349	62 840	,03 301	61 747	,03 313	62 704
64	,03 598	60 736	,03 512	59 708	,03 523	60 627
65	,03 867	58 550	,03 736	57 611	,03 747	58 491
66	,04 156	56 286	,03 975	55 459	,03 985	56 299
67	,04 468	53 947	,04 229	53 254	,04 238	54 056
68	,04 803	51 537	,04 499	51 002	,04 508	51 765
69	,05 164	49 062	,04 787	48 707	,04 795	49 431
70	,05 552	46 528	,05 093	46 376	,05 100	47 061
71	,05 969	43 945	,05 418	44 014	,05 424	44 661
72	,06 418	41 322	,05 764	41 630	,05 769	42 238
73	,06 900	38 670	,06 131	39 230	,06 136	39 802
74	,07 418	36 002	,06 521	36 825	,06 525	37 359
75	,07 974	33 331	,06 936	34 424	,06 939	34 922
76	,08 571	30 673	,07 377	32 036	,07 379	32 498
77	,09 211	28 044	,07 844	29 673	,07 845	30 100
78	,09 898	25 461	,08 340	27 345	,08 340	27 739
79	,10 634	22 941	,08 867	25 065	,08 866	25 425
80	,11 421	20 501	,09 425	22 842	,09 423	23 171
81	,12 264	18 160	,10 017	20 689	,10 013	20 988
82	,13 166	15 933	,10 644	18 617	,10 639	18 886
83	,14 129	13 835	,11 309	16 635	,11 302	16 877
84	,15 157	11 880	,12 012	14 754	,12 004	14 969
85	,16 253	10 080	,12 756	12 982	,12 747	13 173
86	,17 422	8 441	,13 543	11 326	,13 532	11 493
87	,18 665	6 971	,14 375	9 792	,14 362	9 938
88	,19 987	5 670	,15 254	8 384	,15 239	8 511
89	,21 391	4 536	,16 181	7 105	,16 165	7 214

Tafel VIIa.

Kurze Renten, Einmal- und Jahresprämien der gemischten Versicherung.

Grundlagen: AH^M_G, $3\frac{1}{2}\,\%$.

$x+n$	50			55			60			65		
x	$_{\vert n}a_x$	$10^3 A_{x,\overline{n}\vert}$	$10^3 P_{x,\overline{n}\vert}$	$_{\vert n}a_x$	$10^3 A_{x,\overline{n}\vert}$	$10^3 P_{x,\overline{n}\vert}$	$_{n\vert}a_x$	$10^3 A_{x,\overline{n}\vert}$	$10^3 P_{x,\overline{n}\vert}$	$_{\vert n}a_x$	$10^3 A_{x,\overline{n}\vert}$	$10^3 P_{x,\overline{n}\vert}$
20	18,084	388,46	21,48	19,428	343,02	17,65	20,462	308,05	15,05	21,228	282,14	13,29
21	17,734	400,29	22,57	19,129	353,13	18,46	20,202	316,83	15,68	20,998	289,94	13,80
22	17,372	412,53	23,74	18,820	363,56	19,31	19,935	325,88	16,34	20,761	297,95	14,35
23	16,999	425,17	25,01	18,502	374,33	20,23	19,659	335,20	17,05	20,516	306,21	14,92
24	16,612	438,23	26,38	18,173	385,45	21,21	19,375	344,82	17,79	20,265	314,71	15,53
25	16,213	451,73	27,86	17,834	396,91	22,25	19,082	354,72	18,59	20,006	323,46	16,16
26	15,801	465,68	29,47	17,484	408,74	23,37	18,780	364,92	19,43	19,740	332,45	16,84
27	15,374	480,09	31,22	17,123	420,94	24,58	18,469	375,43	20,32	19,467	341,70	17,55
28	14,934	494,99	33,14	16,751	433,54	25,88	18,149	386,25	21,28	19,186	351,21	18,30
29	14,479	510,39	35,25	16,367	446,54	27,28	17,820	397,40	22,30	18,896	360,98	19,10
30	14,008	526,30	37,57	15,970	459,95	28,80	17,480	408,88	23,39	18,599	371,04	19,95
31	13,521	542,76	40,14	15,561	473,79	30,44	17,131	420,70	24,56	18,294	381,37	20,84
32	13,018	559,78	43,00	15,139	488,07	32,24	16,771	432,88	25,81	17,980	391,99	21,20
33	12,498	577,38	46,20	14,703	502,80	34,19	16,400	445,41	27,15	17,657	402,89	22,81
34	11,959	595,58	49,80	14,253	518,01	36,34	16,018	458,32	28,61	17,326	414,09	23,90
35	11,402	614,42	53,88	13,789	533,71	38,70	15,625	471,61	30,18	16,986	425,59	25,05
36	10,826	633,91	58,55	13,309	549,92	41,32	15,221	485,29	31,88	16,637	437,40	26,29
37	10,229	654,10	63,94	12,814	566,67	44,22	14,804	499,38	33,73	16,278	449,52	27,61
38	9,610	675,01	70,23	12,303	583,96	47,46	14,375	513,89	35,75	15,910	461,97	29,03
39	8,970	696,68	77,67	11,774	601,83	51,11	13,933	528,84	37,95	15,532	474,75	30,56

40	8,305	719,14	86,59	11,228	620,30	55,24	13,478	544,24	40,38	15,144	487,87	32,21
41	7,616	742,45	97,48	10,663	639,41	59,96	13,008	560,10	43,05	14,746	501,34	34,00
42	6,901	766,65	111,10	10,079	659,17	65,40	12,525	576,46	46,02	14,334	515,28	35,95
43	6,157	791,79	128,59	9,474	679,63	71,74	12,026	593,33	49,33	13,916	529,37	38,03
44	5,384	817,93	151,91	8,847	700,83	79,22	11,511	610,73	53,05	13,486	543,96	40,33
45	4,580	845,13	184,53	8,197	722,81	88,18	10,980	628,69	57,25	13,043	558,94	42,85
46	3,742	873,47	233,44	7,522	745,62	99,12	10,432	647,24	62,04	12,588	574,33	45,62
47	2,868	903,03	314,90	6,822	769,31	112,77	9,865	666,41	67,55	12,120	590,16	48,69
48	1,955	933,90	477,76	6,093	793,95	130,29	9,278	686,24	73,96	11,638	606,44	52,10
49	1,000	966,18	966,18	5,335	819,59	153,62	8,671	706,78	81,51	11,141	623,27	55,94
50				4,544	846,33	186,24	8,039	728,14	90,57	10,633	640,44	60,23
51				3,719	874,25	235,10	7,388	750,17	101,54	10,107	658,23	65,13
52				2,855	903,45	316,44	6,709	773,14	115,25	9,564	676,59	70,74
53				1,950	934,05	478,96	6,001	797,06	132,82	9,003	695,56	77,26
54				1,000	966,18	966,18	5,264	822,01	156,17	8,423	715,18	84,91
55							4,492	848,11	188,81	7,821	735,51	94,04
56							3,685	875,39	237,55	7,197	756,62	105,13
57							2,835	904,12	318,80	6,547	778,59	118,91
58							1,944	934,28	480,71	5,870	801,50	136,54
59							1,000	966,18	966,18	5,162	825,46	159,92
60										4,418	850,57	192,49
61										3,636	877,03	241,18
62										2,810	904,97	322,03
63										1,934	934,60	483,29
64										1,000	966,18	966,18

Tafel

Sterbetafel H^M der 20 bri-
nebst Grundzahlen, Renten, Verbindungs-

x	l_x	d_x	μ_x	D_x	N_x	S_x
0	127 283	14 358	0,15920	127 283	2 553 055	52 129 621
1	112 925	3 962	,07901	109 110	2 425 772	49 703 849
2	108 963	2 375	,02366	101 720	2 316 662	47 278 077
3	106 588	1 646	,01787	96 137	2 214 942	44 961 415
4	104 942	1 325	,01379	91 451	2 118 805	42 746 473
5	103 617	1 061	,01142	87 243	2 027 354	40 627 668
6	102 556	852	,00925	83 430	1 940 111	38 600 314
7	101 704	683	,00748	79 939	1 856 681	36 660 203
8	101 021	557	,00607	76 717	1 776 742	34 803 522
9	100 464	464	,06502	73 714	1 700 025	33 026 780
10	100 000	408	,00428	70 892	1 626 311	31 326 755
11	99 592	369	,00388	68 215	1 555 419	29 700 444
12	99 223	346	,00359	65 664	1 487 204	28 145 025
13	98 877	337	,00342	63 224	1 421 540	26 657 821
14	98 540	337	,00340	60 877	1 358 316	25 236 281
15	98 203	360	,00353	58 615	1 297 439	23 877 965
16	97 843	384	,00378	56 426	1 238 824	22 580 526
17	97 459	425	,00414	54 304	1 182 398	21 341 702
18	97 034	465	,00458	52 238	1 128 094	20 159 304
19	96 569	508	,00504	50 231	1 075 856	19 031 210
20	96 061	548	,00550	48 277	1 025 625	17 955 354
21	95 513	582	,00592	46 378	977 348	16 929 729
22	94 931	609	,00629	44 537	930 970	15 952 381
23	94 322	631	,00659	42 754	886 433	15 021 411
24	93 691	647	,00682	41 033	843 679	14 134 978
25	93 044	658	,00701	39 371	802 646	13 291 299
26	92 386	664	,00716	37 771	763 275	12 488 653
27	91 722	673	,00729	36 231	725 504	11 725 378
28	91 049	678	,00742	34 750	689 273	10 999 874
29	90 371	686	,00755	33 324	654 523	10 310 601
30	89 685	691	,00768	31 953	621 199	9 656 078
31	88 994	700	,00782	30 634	589 246	9 034 879
32	88 294	709	,00798	29 366	558 612	8 445 633
33	87 585	719	,00815	28 145	529 246	7 887 021
34	86 866	729	,00833	26 970	501 101	7 357 775
35	86 137	742	,00854	25 839	474 131	6 856 674
36	85 395	756	,00876	24 750	448 292	6 382 543
37	84 639	770	,00901	23 702	423 542	5 934 251
38	83 869	786	,00928	22 692	399 840	5 510 709
39	83 083	806	,00957	21 719	377 148	5 110 869
40	82 277	823	,00990	20 781	355 429	4 733 721
41	81 454	846	,01025	19 877	334 648	4 378 292
42	80 608	871	,01064	19 006	314 771	4 043 644
43	79 737	895	,01106	18 165	295 765	3 728 873
44	78 842	924	,01153	17 353	277 600	3 433 108
45	77 918	954	,01204	16 570	260 247	3 155 508
46	76 964	986	,01260	15 814	243 677	2 895 261
47	75 978	1 021	,01321	15 083	227 863	2 651 584
48	74 957	1 061	,01388	14 377	212 780	2 423 721
49	73 896	1 101	,01462	13 694	198 403	2 210 941

VIII.

tischen Gesellschaften

renten und Todesfallversicherungen zu $3\frac{1}{2}\%$.

C_x	M_x	R_x	a_x	a_{xx}	a_{xxx}	A_x	x
13 872	40 948	785 908	20,058	15,079	11,633	0,32171	0
3 698,5	27 075,5	744 959,6	22,233	18,513	15,760	,24861	1
2 142,1	23 377,0	717 884,1	22,775	19,467	17,004	,22982	2
1 434,4	21 234,9	694 507,1	23,039	19,974	17,696	,22088	3
1 115,6	19 800,5	673 272,2	23,169	20,260	18,107	,21652	4
863,14	18 684,94	653 471,69	23,238	20,447	18,393	,21417	5
669,67	17 821,80	634 786,75	23,255	20,546	18,567	,21362	6
518,68	17 152,13	616 964,95	23,225	20,570	18,642	,21456	7
408,70	16 633,45	599 812,82	23,160	20,530	18,633	,21681	8
328,94	16 224,75	583 179,37	23,062	20,439	18,555	,22011	9
279,46	15 895,81	566 954,62	22,940	20,307	18,424	,22423	10
244,20	15 616,35	551 058,81	22,802	20,146	18,257	,22892	11
221,24	15 372,15	535 442,46	22,648	19,964	18,060	,23410	12
208,19	15 150,91	520 070,31	22,484	19,765	17,843	,23964	13
201,15	14 942,72	504 919,40	22,312	19,555	17,612	,24547	14
207,61	14 741,57	489 976,68	22,134	19,337	17,372	,25151	15
213,96	14 533,96	475 235,11	21,955	19,118	17,132	,25758	16
228,80	14 320,00	460 701,15	21,774	18,901	16,895	,26370	17
241,87	14 091,20	446 381,15	21,596	18,690	16,669	,26974	18
255,30	13 849,33	432 289,95	21,418	18,486	16,452	,27571	19
266,09	13 594,03	418 440,62	21,245	18,289	16,248	,28159	20
273,04	13 327,94	404 846,59	21,074	18,101	16,055	,28738	21
276,05	13 054,90	391 518,65	20,903	17,917	15,870	,29313	22
276,35	12 778,85	378 463,75	20,733	17,736	15,691	,29890	23
273,77	12 502,50	365 684,90	20,561	17,555	15,514	,30471	24
269,02	12 228,73	353 182,40	20,387	17,374	15,337	,31061	25
262,29	11 959,71	340 953,67	20,208	17,189	15,159	,31664	26
256,86	11 697,42	328 993,96	20,024	17,000	14,976	,32284	27
250,01	11 440,56	317 296,54	19,835	16,805	14,787	,32924	28
244,41	11 190,55	305 855,98	19,641	16,605	14,593	,33582	29
237,86	10 946,14	294 665,43	19,441	16,399	14,394	,34257	30
232,81	10 708,28	283 719,29	19,235	16,187	14,189	,34954	31
227,83	10 475,47	273 011,01	19,023	15,968	13,978	,35671	32
223,23	10 247,64	262 535,54	18,804	15,744	13,761	,36412	33
218,69	10 024,41	252 287,90	18,580	15,513	13,558	,37167	34
215,06	9 805,72	242 263,49	18,349	15,277	13,309	,37949	35
211,70	9 590,66	232 457,77	18,112	15,035	13,075	,38750	36
208,33	9 378,96	222 867,11	17,870	14,787	12,836	,39571	37
205,47	9 170,63	213 488,15	17,620	14,532	12,590	,40414	38
203,58	8 965,16	204 317,52	17,365	14,272	12,339	,41278	39
200,84	8 761,58	195 352,36	17,103	14,007	12,084	,42161	40
199,47	8 560,74	186 590,78	16,835	13,736	11,824	,43068	41
198,42	8 361,27	178 030,04	16,562	13,459	11,559	,43993	42
196,99	8 162,85	169 668,77	16,282	13,179	11,291	,44938	43
196,49	7 965,86	161 505,92	15,997	12,893	11,018	,45904	44
196,02	7 769,37	153 540,06	15,706	12,603	10,742	,46889	45
195,74	7 573,35	145 770,69	15,409	12,308	10,462	,47892	46
195,83	7 377,61	138 197,34	15,107	12,010	10,180	,48914	47
196,63	7 181,78	130 819,73	14,800	11,709	9,895	,49953	48
197,14	6 985,15	123 637,95	14,488	11,404	9,608	,51008	49

VI.

... Sterbetafel $O^{[M]}$

... Life Tables.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	93 060	92 814	92 404	91 936	91 435	90 907	90 352	89 771	89 164	88 531	87 870	31
22	92 422	92 175	91 763	91 293	90 790	90 258	89 699	89 114	88 501	87 860	87 192	32
23	91 781	91 532	91 119	90 646	90 140	89 604	89 041	88 450	87 830	87 182	86 505	33
24	91 137	90 885	90 470	89 995	89 485	88 945	88 376	87 778	87 151	86 495	85 808	34
25	90 488	90 233	89 816	89 338	88 824	88 279	87 704	87 099	86 464	85 798	85 100	35
26	89 834	89 576	89 156	88 675	88 156	87 605	87 024	86 411	85 766	85 089	84 379	36
27	89 174	88 914	88 490	88 005	87 481	86 924	86 334	85 713	85 058	84 369	83 645	37
28	88 508	88 244	87 817	87 327	86 797	86 233	85 635	85 003	84 337	83 635	82 897	38
29	87 835	87 567	87 135	86 640	86 103	85 531	84 924	84 281	83 602	82 886	82 132	39
30	87 153	86 881	86 445	85 943	85 400	84 819	84 201	83 546	82 853	82 121	81 349	40
31	86 462	86 185	85 744	85 236	84 684	84 093	83 464	82 796	82 087	81 338	80 547	41
32	85 761	85 479	85 032	84 516	83 955	83 354	82 712	82 029	81 304	80 536	79 723	42
33	85 049	84 761	84 307	83 783	83 212	82 599	81 943	81 244	80 500	79 712	78 876	43
34	84 324	84 030	83 568	83 036	82 454	81 827	81 156	80 439	79 676	78 865	78 005	44
35	83 586	83 284	82 814	82 272	81 678	81 037	80 349	79 613	78 828	77 993	77 105	45
36	82 832	82 522	82 044	81 491	80 883	80 227	79 520	78 764	77 955	77 093	76 176	46
37	82 062	81 743	81 255	80 690	80 068	79 394	78 668	77 889	77 054	76 164	75 215	47
38	81 273	80 945	80 446	79 868	79 230	78 538	77 790	76 986	76 124	75 202	74 220	48
39	80 464	80 126	79 616	79 023	78 368	77 655	76 884	76 053	75 161	74 207	73 187	49

Doppelt abgestufte Sterbetafel $O^{[M]}$ Tafel VI.

British Offices Life Tables.

40	79 634	79 285	78 761	78 153	77 480	76 745	75 948	75 089	74 164	73 174	72 115	50
41	78 780	78 419	77 881	77 256	76 562	75 804	74 980	74 089	73 130	72 101	71 000	51
42	77 900	77 526	76 973	76 329	75 614	74 803	73 976	73 052	72 056	70 985	69 839	52
43	76 992	76 604	76 035	75 371	74 632	73 820	72 935	71 975	70 939	69 824	68 630	53
44	76 053	75 650	75 064	74 379	73 614	72 772	71 853	70 855	69 776	68 615	67 369	54
45	75 082	74 663	74 058	73 349	72 557	71 683	70 728	69 689	68 564	67 353	66 054	55
46	74 076	73 640	73 014	72 280	71 459	70 551	69 556	68 474	67 301	66 037	64 681	56
47	73 032	72 577	71 929	71 169	70 316	69 372	68 336	67 207	65 983	64 663	63 247	57
48	71 948	71 472	70 801	70 013	69 126	68 143	67 063	65 885	64 607	63 229	61 750	58
49	70 820	70 323	69 626	68 808	67 885	66 861	65 734	64 505	63 171	61 731	60 187	59
50	69 646	69 126	68 402	67 551	66 591	65 523	64 348	63 064	61 670	60 167	58 555	60
51	68 422	67 878	67 125	66 241	65 240	64 127	62 900	61 559	60 104	58 535	56 852	61
52	67 146	66 576	65 793	64 873	63 830	62 669	61 388	59 988	58 469	56 832	55 078	62
53	65 814	65 217	64 403	63 444	62 358	61 146	59 809	58 348	56 763	55 056	53 230	63
54	64 424	63 798	62 951	61 953	60 820	59 556	58 161	56 637	54 985	53 207	51 308	64
55	62 972	62 317	61 434	60 395	59 215	57 897	56 443	54 854	53 134	51 285	49 313	65
56	61 456	60 770	59 851	58 769	57 539	56 166	54 651	52 998	51 209	49 289	47 246	66
57	59 873	59 155	58 199	57 073	55 793	54 363	52 787	51 068	49 210	47 222	45 110	67
58	58 221	57 470	56 475	55 304	53 973	52 486	50 848	49 064	47 140	45 084	42 907	68
59	56 498	55 713	54 679	53 463	52 080	50 536	48 837	46 989	45 000	42 881	40 644	69
60	54 702	53 882	52 809	51 547	50 113	48 513	46 754	44 845	42 795	40 617	38 325	70
61	52 833	51 978	50 866	49 558	48 073	46 418	44 602	42 635	40 529	38 298	35 961	71
62	50 890	50 000	48 849	47 497	45 962	44 255	42 385	40 365	38 208	35 933	33 560	72
63	48 873	47 950	46 761	45 366	43 784	42 028	40 109	38 041	35 842	33 532	31 134	73
64	46 785	45 829	44 604	43 168	41 543	39 742	37 779	35 672	33 440	31 106	28 697	74
65	44 628	43 641	42 382	40 909	39 245	37 405	35 406	33 268	31 013	28 669	26 264	75
66	42 406	41 389	40 100	38 594	36 897	35 025	32 998	30 840	28 576	26 236	23 851	76
67	40 125	39 082	37 765	36 233	34 508	32 613	30 569	28 403	26 144	23 824	21 477	77
68	37 791	36 725	35 387	33 833	32 090	30 181	28 132	25 972	23 733	21 450	19 160	78
69	35 412	34 329	32 975	31 408	29 655	27 743	25 702	23 563	21 361	19 135	16 921	79
70	33 000	31 904	30 542	28 969	27 218	25 316	23 297	21 195	19 048	16 896	14 778	80
71	30 567	29 464	28 101	26 533	24 794	22 916	20 934	18 887	16 813	14 754	12 751	81
72	28 125	27 023	25 668	24 116	22 402	20 562	18 634	16 658	14 675	12 728	10 856	82
73	25 692	24 597	23 260	21 735	20 060	18 274	16 915	14 528	12 654	10 835	9 109,2	83
74	23 283	22 205	20 896	19 410	17 788	16 070	14 298	12 516	10 767	9 090,4	7 522,9	84
75	20 918	19 865	18 594	17 160	15 604	13 970	12 300	10 638	9 027,6	7 506,0	6 105,6	85

Tafel IX.

Aktivitätsordnung und Invaliditätstafel nach H. *Zimmermann*.

Aktivitätsrenten zu $3\frac{1}{2}\%$.

x	l^a_x	w_x	q^{aa}_x	J_x	d^{aa}_x	${}^a a^{(12)}_x$	x
20	100 000	0,00021	0,00907	21	907	19,1449	20
21	99 072	,00026	,00866	26	858	18,9766	21
22	98 188	,00033	,00828	32	813	18,7941	22
23	97 343	,00040	,00792	39	771	18,5972	23
24	96 533	,00047	,00762	45	736	18,3858	24
25	95 752	,00054	,00739	52	707	18,1616	25
26	94 993	,00062	,00717	59	681	17,9241	26
27	94 253	,00071	,00700	67	660	17,6741	27
28	93 526	,00080	,00690	75	645	17,4116	28
29	92 806	,00085	,00685	79	636	17,1380	29
30	92 091	,00096	,00683	88	629	16,8525	30
31	91 374	,00113	,00686	103	627	16,5559	31
32	90 644	,00131	,00703	119	637	16,2504	32
33	89 888	,00156	,00717	140	645	15,9370	33
34	89 103	,00187	,00741	167	660	15,6167	34
35	88 276	,00220	,00766	194	676	15,2904	35
36	87 406	,00248	,00801	217	700	14,9590	36
37	86 489	,00282	,00830	244	718	14,6218	37
38	85 527	,00310	,00867	265	742	14,2793	38
39	84 520	,00341	,00898	288	759	13,9293	39
40	83 473	,00382	,00936	319	781	13,5721	40
41	82 373	,00437	,00966	360	796	13,2083	41
42	81 217	,00488	,01010	396	821	12,8390	42
43	80 000	,00554	,01055	443	844	12,4628	43
44	78 713	,00626	,01104	493	869	12,0823	44
45	77 351	,00698	,01157	540	895	11,6965	45
46	75 916	,00771	,01227	585	932	11,3061	46
47	74 399	,00887	,01288	660	958	10,9099	47
48	72 781	,01026	,01354	747	985	10,5118	48
49	71 049	,01178	,01441	837	1024	10,1126	49
50	69 188	,01375	,01524	951	1055	9,7148	50
51	67 182	,01609	,01600	1081	1075	9,3197	51
52	65 026	,01838	,01690	1195	1099	8,9283	52
53	62 732	,02075	,01784	1302	1119	8,5392	53
54	60 311	,02373	,01842	1431	1111	8,1522	54
55	57 769	,02687	,01916	1552	1107	7,7657	55
56	55 110	,03059	,02005	1686	1105	7,3797	56
57	52 319	,03507	,02082	1835	1089	6,9971	57
58	49 395	,04069	,02191	2010	1082	6,6191	58
59	46 303	,04695	,02339	2174	1083	6,2524	59

x	l_x^a	w_x	q_x^{aa}	J_x	d_x^{aa}	${}^a a_x^{(12)}$	x
60	43 046	0,05427	0,02520	2336	1085	5,9001	60
61	39 625	,06185	,02683	2451	1063	5,5673	61
62	36 111	,07039	,02922	2542	1055	5,2501	62
63	32 514	,07914	,03137	2573	1020	4,9548	63
64	28 921	,08814	,03357	2549	971	4,6778	64
65	25 401	,09752	,03515	2477	893	4,4166	65
66	22 031	,10851	,03708	2391	816	4,1668	66
67	18 824	,12009	,03879	2261	730	3,9341	67
68	15 833	,13166	,04101	2085	649	3,7176	68
69	13 099	,14479	,04227	1897	553	3,5163	69
70	10 649	,15781	,04438	1681	472	3,3302	70
71	8 496	,17085	,04733	1452	402	3,1608	71
72	6 642	,18374	,05143	1220	342	3,0110	72
73	5 080	,19246	,05655	978	287	2,8853	73
74	3 815	,19975	,06268	762	239	2,7737	74
75	2 814	,20617	,06830	580	192	2,6759	75
76	2 042	,21197	,07354	433	150	2,5882	76
77	1 459	,21730	,07844	317	115	2,5089	77
78	1 027	,22226	,08308	228	85	2,4367	78
79	714	,22692	,08747	162	63	2,3657	79
80	489	,23134	,09166	113	45	2,3010	80
81	331	,23537	,09575	78	31	2,2348	81
82	222	,23922	,09968	53	23	2,1574	82
83	146	,24409	,10228	36	14	2,0878	83
84	96	,25046	,10561	24	10	1,9786	84
85	62	,25914	,11004	16	7	1,8479	85
86	39	,27164	,11623	11	4	1,6946	86
87	24	,29125	,12542	7	3	1,4846	87
88	14	,32641	,14044	5	2	1,2191	88
89	7	,40773	,16849	3	1	0,9501	89
90	3	,80000	,20000	2	1	0,5360	90

Tafel

Invalidensterbetafel.

Invalidenrenten und Anwartschaften zu $3\frac{1}{2}\%$ — Witwen- und

x (y)	l^{i}_{x}	q^{ii}_{x}	${}^{i}a_{x}$	${}^{ai}a_{x}$	l_{y}	$a^{(12)}_{y}$	l_{z}	$a^{(12)}_{z}$	z
20	109 694	0,1020	9,048	1,29473	62 324	20,2431	200 000	9,04	0
21	98 505	,0981	9,276	1,35072	61 941	20,0587	152 987	11,04	1
22	88 842	,0943	9,497	1,40823	61 534	19,8754	143 156	11,16	2
23	80 464	,0905	9,710	1,46710	61 102	19,6935	138 449	10,90	3
24	73 182	,0868	9,912	1,52734	60 648	19,5122	135 292	10,52	4
25	66 830	,0831	10,101	1,58914	60 174	19,3309	132 997	10,05	5
26	61 275	,0795	10,273	1,65253	59 680	19,1494	131 277	9,51	6
27	56 403	,0757	10,427	1,71756	59 170	18,9667	129 941	8,92	7
28	52 132	,0720	10,556	1,78420	58 647	18,7816	128 884	8,28	8
29	48 380	,0685	10,658	1,85271	58 111	18,5941	128 030	7,61	9
30	45 066	,0656	10,731	1,92356	57 566	18,4029	127 326	6,89	10
31	42 109	,0640	10,779	1,99640	57 010	18,2083	126 726	6,15	11
32	39 414	,0640	10,813	2,07103	56 445	18,0096	126 196	5,37	12
33	36 892	,0640	10,851	2,14764	55 869	17,8074	125 710	4,56	13
34	34 531	,0639	10,892	2,22584	55 282	17,6015	125 244	3,71	14
35	32 324	,0639	10,938	2,30529	54 685	17,3913	124 770	2,84	15
36	30 258	,0639	10,988	2,38612	54 078	17,1768	124 266	1,93	16
37	28 325	,0639	11,043	2,46898	53 462	16,9574	123 705	0,98	17
38	26 515	,0639	11,104	2,55357	52 837	16,7329	123 076	.	18
39	24 821	,0633	11,171	2,64042	52 207	16,5018			
40	23 251	,0622	11,238	2,72958	51 576	16,2625			
41	21 804	,0599	11,299	2,82041	50 946	16,0139			
42	20 497	,0583	11,340	2,91202	50 320	15,7546			
43	19 302	,0558	11,364	3,00500	49 701	15,4831			
44	18 225	,0546	11,361	3,09893	49 090	15,1985			
45	17 230	,0530	11,343	3,19348	48 481	14,9021			
46	16 317	,0525	11,304	3,28966	47 870	14,5944			
47	15 460	,0520	11,255	3,38785	47 248	14,2777			
48	14 656	,0516	11,197	3,48554	46 605	13,9545			
49	13 899	,0512	11,128	3,58152	45 939	13,6253			
50	13 187	,0510	11,049	3,67650	45 245	13,2910			
51	12 515	,0503	10,959	3,76759	44 521	12,9518			
52	11 886	,0496	10,853	3,85273	43 767	12,6075			
53	11 297	,0486	10,730	3,93384	42 981	12,2581			
54	10 748	,0485	10,584	4,01225	42 162	11,9038			

X.

nach H. *Zimmermann*.

Waisenrenten. Grundlagen: Deutsche Sterbetafel, $3\frac{1}{2}\,\%$.

x	l^{i}_{x}	q^{ii}_{x}	${}^{i}a_{x}$	${}^{ai}a_{x}$	l_{y}	$a^{(12)}_{y}$	y
55	10 227	0,0485	10,425	4,08341	41 308	11,5445	55
56	9 731	,0487	10,252	4,14845	40 414	11,1816	56
57	9 257	,0489	10,067	4,20626	39 472	10,8168	57
58	8 804	,0495	9,867	4,25358	38 476	10,4517	58
59	8 368	,0501	9,655	4,28774	37 418	10,0885	59
60	7 949	,0512	9,430	4,30924	36 293	9,7290	60
61	7 542	,0529	9,196	4,31689	35 101	9,3734	61
62	7 143	,0550	8,957	4,31091	33 843	9,0223	62
63	6 750	,0573	8,715	4,29281	32 521	8,6760	63
64	6 363	,0602	8,471	4,26307	31 140	8,3340	64
65	5 980	,0629	8,227	4,22278	29 703	7,9969	65
66	5 604	,0653	7,982	4,16985	28 217	7,6642	66
67	5 238	,0685	7,731	4,10127	26 686	7,3364	67
68	4 879	,0715	7,480	4,01553	25 118	7,0133	68
69	4 530	,0744	7,223	3,91513	23 521	6,6945	69
70	4 193	,0780	6,959	3,79107	21 901	6,3809	70
71	3 866	,0820	6,689	3,64660	20 265	6,0732	71
72	3 549	,0865	6,414	3,48357	18 617	5,7735	72
73	3 242	,0922	6,134	3,30421	16 960	5,4857	73
74	2 943	,0992	5,853	3,12284	15 307	5,2113	74
75	2 651	,1068	5,577	2,94663	13 677	4,9508	75
76	2 368	,1161	5,303	2,77669	12 090	4,7041	76
77	2 093	,1261	5,039	2,61424	10 569	4,4697	77
78	1 829	,1383	4,783	2,46023	9 131	4,2475	78
79	1 576	,1491	4,544	2,31025	7 795	4,0346	79
80	1 341	,1626	4,311	2,16939	6 570	3,8309	80
81	1 123	,1736	4,092	2,03210	5 464	3,6531	81
82	928	,1864	3,873	1,89458	4 479	3,4474	82
83	755	,2003	3,655	1,77621	3 614	3,2690	83
84	604	,2171	3,435	1,64843	2 867	3,0999	84
85	473	,2360	3,218	1,52919	2 232	2,9427	85
86	361	,2575	3,008	1,42314	1 705	2,7948	86
87	268	,2820	2,800	1,31676	1 276	2,6577	87
88	193	,3104	2,586	1,22616	935	2,5305	88
89	133	,3436	2,383	1,22616	671	2,4101	89
90	87	,3832	2,188	1,23749	471	2,2966	90
91	54	,4313	1,980		323	2,1903	91
92	31	,4918	1,768		217	2,0815	92
93	16	,5720	1,539		142	1,9771	93
94	7	,6900	1,276		90	1,8857	94
95	2	1,000	1,000		56	1,7774	95

Sachregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Namenregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

